システム制御 II

第2学期 火 1, 2限 8:40-10:50
5号館 第16講義室

担当:平田 健太郎

7/30 7回目 レギュレータ/オブザーバ

講義日程（予定）

6/18　1回目 はじめに/古典制御の問題点
6/25　2回目 系のモデリングと状態方程式表現
7/2　 3回目 状態方程式の解/伝達関数との関係
7/9　 4回目 安定性と系の固有値，安定判別法
7/16　5回目 可制御性
7/23　6回目 可観測性
7/30　7回目 レギュレータ/オブザーバ
8/6　 8回目 まとめ/期末試験

評価: 出席, レポート提出状況, 試験結果などから総合的に判定

期末試験　8/6　9:00 集合

講義資料, ノート等持ち込み可

前回のSummary

可制御正準形への変換, 状態フィードバックの設計法

可制御正準形のブロック線図

可観測性の定義

可観測であるための必要十分条件

可観測正準形のブロック線図

対角正準形

最小実現

それぞれの(可制御性), 可観測性を調べ,
初期値を 0 としたときの, uからyへの伝達関数を求めよ.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

可制御正準形なので当然だが

$$W = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$ $\mathrm{rank}\, W = 2$ → 可制御

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$ $\mathrm{rank}\, M = 1$ → 可観測でない！

$$C(sI - A)^{-1}B = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= [1 \quad 1] \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

状態ベクトルは2次元なのに伝達関数は1次 → 実現が冗長（最小でない）

それぞれの(可制御性), 可観測性を調べ,
初期値を 0 としたときの, uからyへの伝達関数を求めよ.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}\, W = 2$$ → 可制御

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}\, M = 1$$ → 可観測でない！

$$C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

こちらも状態ベクトルは2次元なのに伝達関数は1次 → 実現が冗長（最小でない）

対角正準形が可制御, 可観測 $\Leftrightarrow b_i \neq 0, c_i \neq 0, \forall i$

安定化状態フィードバック制御器をレギュレータという.

安定化出力フィードバックによる状態推定器をオブザーバという.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$u(t) = Kx(t)$$

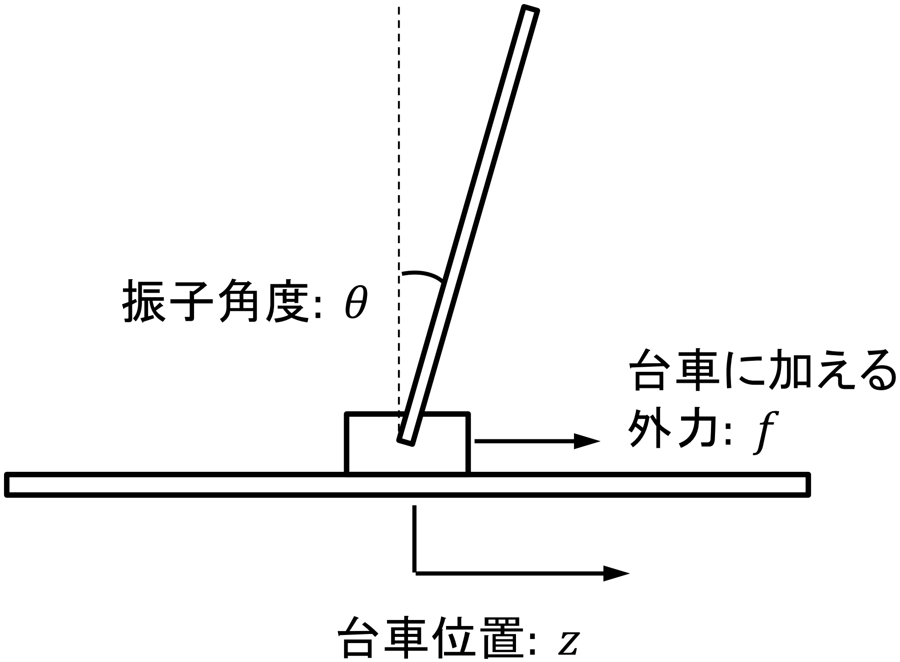
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t)$$

$$= (A + BK)x(t) =: A_c x(t)$$

状態フィードバック制御によって閉ループ系が
こうなるのは極めて自然.

$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t)$　この出力フィードバックはどこから出てくるか？

オブザーバ(状態推定器)の必要性



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

状態は4次元ベクトル $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$

ポテンショメータやエンコーダで
計測できるのは, 角度や位置

$$y = \begin{bmatrix} \theta \\ z \end{bmatrix}$$

⇩

状態フィードバックを施すには
角速度, 加速度を推定しなければ
ならない.

微分演算は避けるべき. Why?

オブザーバ

制御対象:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

A, B, C が既知, 信号 $u(t), y(t)$が入手できるとき, 次の機構で状態 x の推定値 $\hat{x}$ を求める.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L[y(t) - C\,\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

L は $A + LC$ が安定となるように選ぶ.この機構を状態推定器(オブザーバー)という.

オブザーバーで状態が推定できる仕組み

推定誤差を $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ と定める.

$$
\begin{array}{rl}
 & \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L[y(t) - C\,\hat{x}(t)] \\
-) & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\
\hline
\end{array}
$$

$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = A[\hat{x}(t) - x(t)] - L[y(t) - C\,\hat{x}(t)] \Leftarrow y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = A[\hat{x}(t) - x(t)] - LC[x(t) - \hat{x}(t)]$$

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t)$$

$A + LC$ が安定であれば, $e(t) \to 0\ (t \to \infty)$. すなわち $\hat{x}(t) \to x(t)$

なぜオブザーバーが可観測性と関係するか？

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

A, Bが既知, 信号 $u(t)$が入手できるとき, 初期値 $x(0)$ が分かっていれば状態 $x(t)$ は次式により推定できる.

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

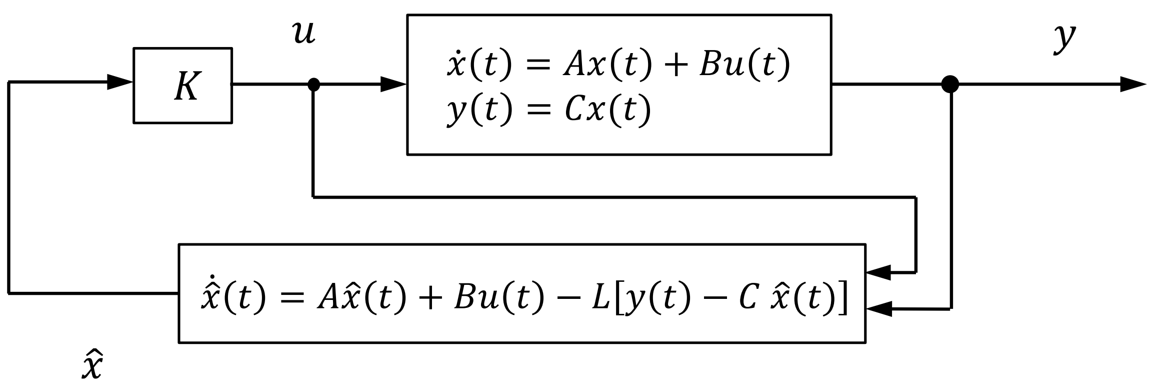
C, A の可観測性から, 信号 $u(t), y(t)$ から初期値 $x(0)$ を特定できれば状態推定が可能となる.

オブザーバーを用いたフィードバック制御

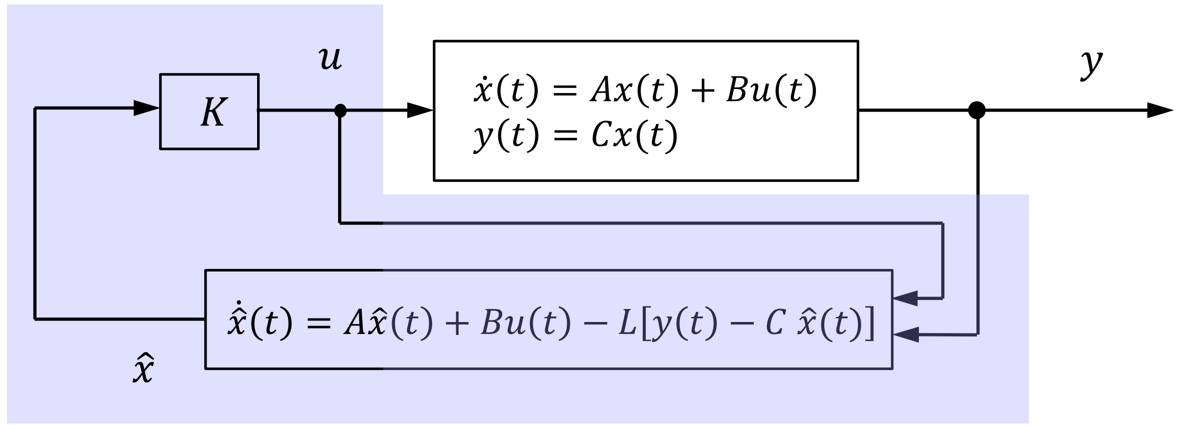
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t)$$

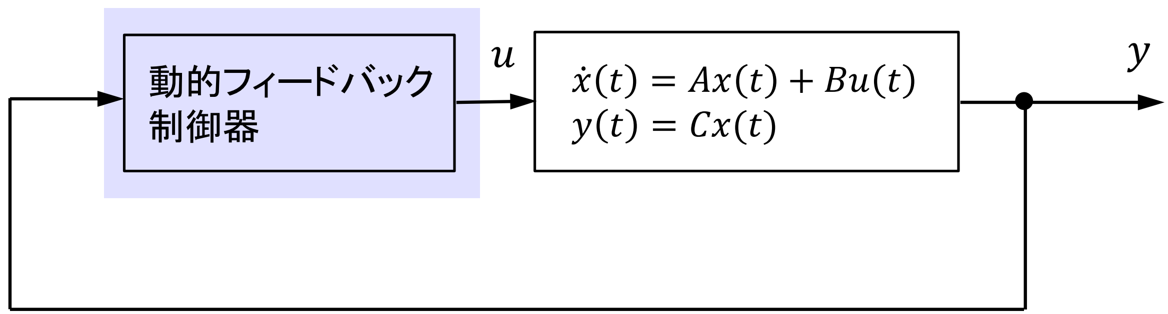
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L[y(t) - C\,\hat{x}(t)]$$

$$u(t) = K\hat{x}(t)$$ 状態 $x(t)$ を推定値で代用



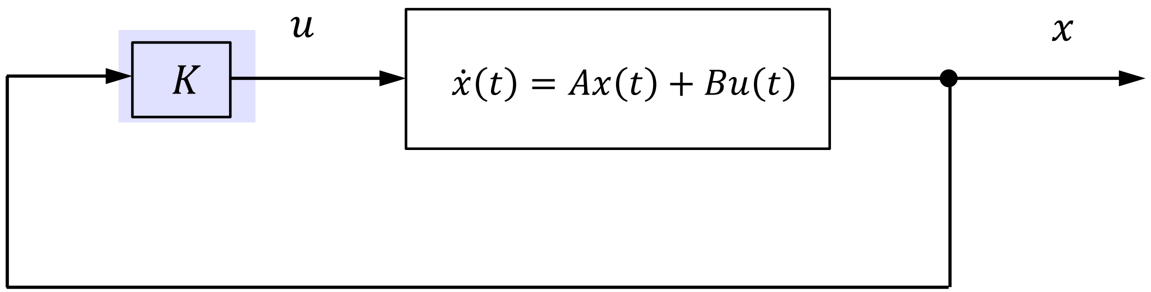
ブロック線図





動的出力フィードバック制御

(dynamic output feedback control)



cf. 静的状態フィードバック制御

(static state feedback control)

分離定理

閉ループ系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L[y(t) - C\,\hat{x}(t)]$$

$$u(t) = K\hat{x}(t)$$

$y(t)$ を消去

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BK\hat{x}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + BK\hat{x}(t) - LC[x(t) - \hat{x}(t)]$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A + BK + LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A+BK+LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

左から $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}$ を掛けると

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} = I$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -A-LC & A+LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & BK \\ -A-LC & A+LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

ブロック上三角行列の固有値は, $\{A+BK$の固有値$\} \cup \{A+LC$の固有値$\}$

閉ループ系の安定性は $A+BK$ が安定となるように K を選び, $A+LC$ が安定となるように L を選べば達成できる.

閉ループ系の安定性は $A+BK$ が安定となるように K を選び, $A+LC$ が安定となるように L を選べば達成できる.

⬇

- 推定値に対する(疑似的な)状態フィードバック制御則 $u(t)=K\hat{x}(t)$ でも真の状態フィードバック制御則 $u(t)=Kx(t)$ と同じ働きをする.
- レギュレータの設計(K の選び方)とオブザーバの設計(L の選び方) は独立して行うことができる (相互に影響しない.)

⬇

分離定理

最適レギュレータ

閉ループ系を安定にする状態フィードバック $u(t) = Kx(t)$ は無数に存在する. どの K がいちばん良いか？

良し悪しの評価の基準が必要.

次の評価関数のもとで最適となる制御器のことを最適レギュレータという.

$$J = \int_0^\infty \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt$$

Q: 半正定行列, R: 正定行列

評価関数 (Performance Index)

$$J = \int_0^{\infty} \{ \underline{x^T(t)Qx(t)} + \underline{u^T(t)Ru(t)} \} dt$$

Q, R の性質から各項の値は非負

時間積分 ⇒ 時間の経過に伴う応答の全体を評価する

第1項: 制御の性能 (目的である $x = 0$ との偏差)
第2項: 制御のために使われるエネルギー
を表す

入力の強さと状態の収束度合いのバランス（トレードオフ）
を考え，最適なゲインを選ぶ.

最適制御問題 LQR Problem

仮定: (A, B) は可制御, $(\sqrt{Q}, A)$ は可観測

問題: 閉ループ系を安定化し, 評価関数 J を最小にする
制御入力 $u(t)$ を見つけよ.

解: 仮定のもとで次の代数リッカチ方程式 (Algebraic Riccati Equation)は
一意な正定解 P をもつ.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

このとき, 最適制御則は以下で与えられる.

$$u(t) = -R^{-1}B^T P x(t) \qquad ★$$

演習（昨年度の試験問題）

1. つぎの状態空間表現で与えられるシステムを考える.

$$(\Sigma) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

この状態空間表現の可制御性, 可観測性を調べよ.（ただし可制御性はパラメータ a の値に依存するので, 可制御となる a の条件もあわせて示せ.）

$$W = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 4-3a \\ a & 4-4a \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

正方行列なので行列式が非零のとき, フルランク

$$|W| = 4 - 4a - a(4-3a) = 3a^2 - 8a + 4 = (3a-2)(a-2) = 0$$

$a \neq 2, 2/3$ のとき可制御

$\mathrm{rank}\, M = 2$ より可観測

以下では $a = 1$ とする. このとき u から y までの伝達関数は何次になるはずかを予想せよ. (理由を付して答えよ.)

では実際に u から y までの伝達関数を計算せよ. また a が可制御とならない値をとった場合, 伝達関数はどうなるか, 具体的に示せ.

状態方程式の次数が 2 なので, 実現が可制御かつ可観測ならば, 伝達関数も2次になる. だから $a = 1$ のとき2次となるはず.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} s-4 & 3 \\ -4 & s+4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad -1]\frac{1}{s^2 - 16 + 12}\begin{bmatrix} s+4 & -3 \\ 4 & s-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 - 4}[s \quad -s+1]\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s-2)}[(1-a)s + a]$$

$a = 1$のとき, $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s-2)}$

$a = 2, 2/3$ のとき, 分子は $-s + 2$, $\dfrac{1}{3}(s+2)$ となって伝達関数は1次になる.

(Σ) に対して $\tilde{x} = T_1 x$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なる座標変換を施す. 変換後の実現

$$(\tilde{\Sigma}) \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \quad y = \tilde{C}\tilde{x}$$

の係数行列 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ を求めよ.

$$\tilde{A} = T_1 A T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T_1 B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

これは可制御正準形

システム (Σ) に対して $u = Kx$ なる状態フィードバックを施して，閉ループ極を $s = -1, -2$ に配置したい．ゲイン K を求めよ

$(\tilde{\Sigma})$ は可制御正準形なので，変換後の $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$ に対するフィードバック則 $u = \tilde{K}\tilde{x}$ を求めて，元の座標系に戻す．

$$\tilde{K} = [k_2 \quad k_1] \Rightarrow A_c := \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_2 \quad k_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 + k_2 & k_1 \end{bmatrix}$$

閉ループ極は特性方程式

$$0 = |sI - A_c| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -(4 + k_2) & s - k_1 \end{vmatrix} = s^2 - k_1 s - (4 + k_2)$$

の根で与えられるので $s^2 - k_1 s - (4 + k_2) = (s + 1)(s + 2)$ となればよい．

$$k_1 = -3, k_2 = -6$$

$$u = \tilde{K}\tilde{x} = \tilde{K}(T_1 x) = [-6 \quad -3] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x = [-6 \quad 3]x = Kx \qquad K = [-6 \quad 3]$$

[確認]

$$|sI - (A + BK)| = \left| sI - \left(\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [-6 \quad 3] \right) \right| = \left| sI - \left(\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \right) \right|$$

$$= \left| sI - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \right| = (s + 2)(s + 1)$$

つぎに $(\tilde{\Sigma})$ に対して $\bar{x} = T_2\tilde{x}$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

なる座標変換を施す. 変換後の実現

$$(\bar{\Sigma}) \quad \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \quad y = \bar{C}\bar{x}$$

に対して, その極を $s = -2$ (重根)に配置するオブザーバーを求めよ.
この結果から, (Σ) に対するオブザーバーを導出せよ.

$$\bar{A} = T_2\tilde{A}T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T_2\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \tilde{C}T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

これは可観測正準形

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} \ell_2 \\ \ell_1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A_o = \bar{A} + \bar{L}\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_2 \\ \ell_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4+\ell_2 \\ 1 & \ell_1 \end{bmatrix}$$

$$0 = |sI - A_o| = \begin{vmatrix} s & -4-\ell_2 \\ -1 & s-\ell_1 \end{vmatrix} = s^2 - \ell_1 s - (4+\ell_2) = (s+2)^2$$

$$\ell_1 = -4, \ell_2 = -8 \quad \Longrightarrow \quad \bar{L} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T_2 \tilde{A} T_2^{-1}, \bar{C} = \tilde{C} T_2^{-1} \qquad \tilde{A} = T_1 A T_1^{-1}, \tilde{C} = C T_1^{-1}$$

$$\bar{A} + \bar{L}\bar{C} = T_2\left(\tilde{A} + T_2^{-1}\bar{L}\tilde{C}\right)T_2^{-1} = T_2 T_1 (A + T_1^{-1} T_2^{-1} \bar{L} C) T_1^{-1} T_2^{-1}$$

$$= T_2 T_1 (A + LC) T_1^{-1} T_2^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad L = T_1^{-1} T_2^{-1} \bar{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

[確認]

$$|sI - (A + LC)| = \left| sI - \left(\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \right| = \left| sI - \left(\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \right) \right|$$

$$= \left| sI - \begin{bmatrix} -8 & 9 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s+8 & -9 \\ 4 & s-4 \end{vmatrix} = s^2 + 4s - 32 + 36 = (s+2)^2$$