システム制御Ⅱ

第2学期 火 1, 2限 8:40-10:50
5号館 第16講義室

担当:平田 健太郎

7/23 6回目 可観測性

講義日程（予定）

6/18　1回目 はじめに/古典制御の問題点
6/25　2回目 系のモデリングと状態方程式表現
7/2　 3回目 状態方程式の解/伝達関数との関係
7/9　 4回目 安定性と系の固有値，安定判別法
7/16　5回目 可制御性
7/23　6回目 可観測性
7/30　7回目 レギュレータ/オブザーバ
8/6　 8回目 まとめ/期末試験

評価: 出席, レポート提出状況, 試験結果などから総合的に判定

前回のSummary

背景: 可制御性と状態フィードバック安定化

- 可制御性の定義

- 可制御であるための必要十分条件

  - 可制御性グラミアン $W(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} BB^T e^{-A^T t} dt$ が正定

  - 可制御行列 $W = [B\ AB\ A^2B \cdots A^{n-1}B]$ が行フルランク

- 可制御性正準形（実現）

$$y(s) = G(s)u(s), \qquad G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

⇩ 実現

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n & \cdots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

この実現の可制御行列 W を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W = [B \ AB \ A^2B \cdots A^{n-1}B]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ 1 & * & & * \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 係数 $\{a_i\}, \{b_i\}$ の値によらず

$$\mathrm{rank}\, W = n$$

ゆえに, この実現を可制御正準形という.

状態空間表現と伝達関数の関係

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$x(0) = 0$ としてラプラス変換

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}B}_{\text{伝達関数}}U(s)$$

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}, \qquad D(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

の可制御正準形（実現）の A 行列は

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

一方

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{C\,\mathrm{adj}(sI-A)B}{|sI-A\,|}$$

であり，余因子行列 $\mathrm{adj}(sI-A)$ は s の多項式なので，分母は $|sI-A\,|$ からしか生じない．

$$|sI-A|=D(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

$$\tilde{A} = A + BK$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_n \quad \cdots \quad k_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\tilde{a}_n & -\tilde{a}_{n-1} & \cdots & -\tilde{a}_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a}_i = a_i - k_i, \quad i = 1, \cdots n$$

閉ループ極（$\tilde{A}$の固有値） $|sI - \tilde{A}| = 0$ はどうなるか?

$\tilde{A}$ は形は可制御正準形の A 行列と同じなので, 先と同様に

$$|sI - \tilde{A}| = s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_{n-1} s + \tilde{a}_n = 0$$

を満たす s が閉ループ極である. K によって自由に多項式の係数を決定できるから, 望みの閉ループ極に対応するフィードバックゲイン K を容易に設定できる.

閉ループ極が $p_1, \cdots, p_n$ であるとき $\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)$ との係数比較により $\tilde{a}_j$ を定め

$k_j = a_j - \tilde{a}_j, \quad j = 1, \ldots, n$ とすればよい.

実現は一通りではない(一意ではない).

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx \quad \Rightarrow \quad y = C(sI - A)^{-1}Bu$$

正則な T によって $\bar{x} = Tx$ とする(座標変換). このとき

$$\dot{\bar{x}} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = TAT^{-1}(Tx) + TBu =: \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$y = Cx = CT^{-1}Tx = CT^{-1}\bar{x}$$

よって $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ と $\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u, y = \bar{C}x$

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB, \bar{C} = CT^{-1}$$

の入出力関係は同じ.(状態 x のもつ意味は異なる)

座標変換によって, 与えられた状態空間表現を可制御正準形に変換すれば
状態フィードバックゲインの設計が容易にできる.

座標変換によって伝達関数は不変である. 確かめよ.

$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB, \bar{C} = CT^{-1}$ であるとき

$$\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB$$

$sI - TAT^{-1} = T(sI - A)T^{-1}$ なので

$$(sI - TAT^{-1})^{-1} = T(sI - A)^{-1}T^{-1}$$

したがって

$$\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = CT^{-1}T(sI - A)^{-1}T^{-1}TB = C(sI - A)^{-1}B.$$

座標変換によって伝達関数は不変である.

与えられた状態方程式を可制御正準形に変換する方法 (1入力)

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$$

$$W = [B\ AB\ A^2B \cdots A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^n$$

$$T^{-1} = W \begin{bmatrix} a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \unicode{x22F0} & \unicode{x22F0} & \\ a_1 & \unicode{x22F0} & & \\ 1 & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB, \bar{C} = CT^{-1}$ とすると $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ は可制御正準形になる.

（証明は省略）

【補足】

例

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

1) W を求める.
2) $|sI - A| = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ を計算する.
3) T^{-1}, T を求める.
4) $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ を求める.

【補足】

$\dot{x} = Ax + Bu$ に対する安定化状態フィードバックゲインの設計手順

1) $|sI - A|$ から特性方程式の係数 $a_1, \cdots, a_n$ を求める.

2) 上記係数と, A, Bより求まる可制御行列 W から変換行列 T を求める.

＊ 可制御正準形に変換されることは理論的に保証されるので, 実際に正準形になっているかのチェック($\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$の計算）は不要.

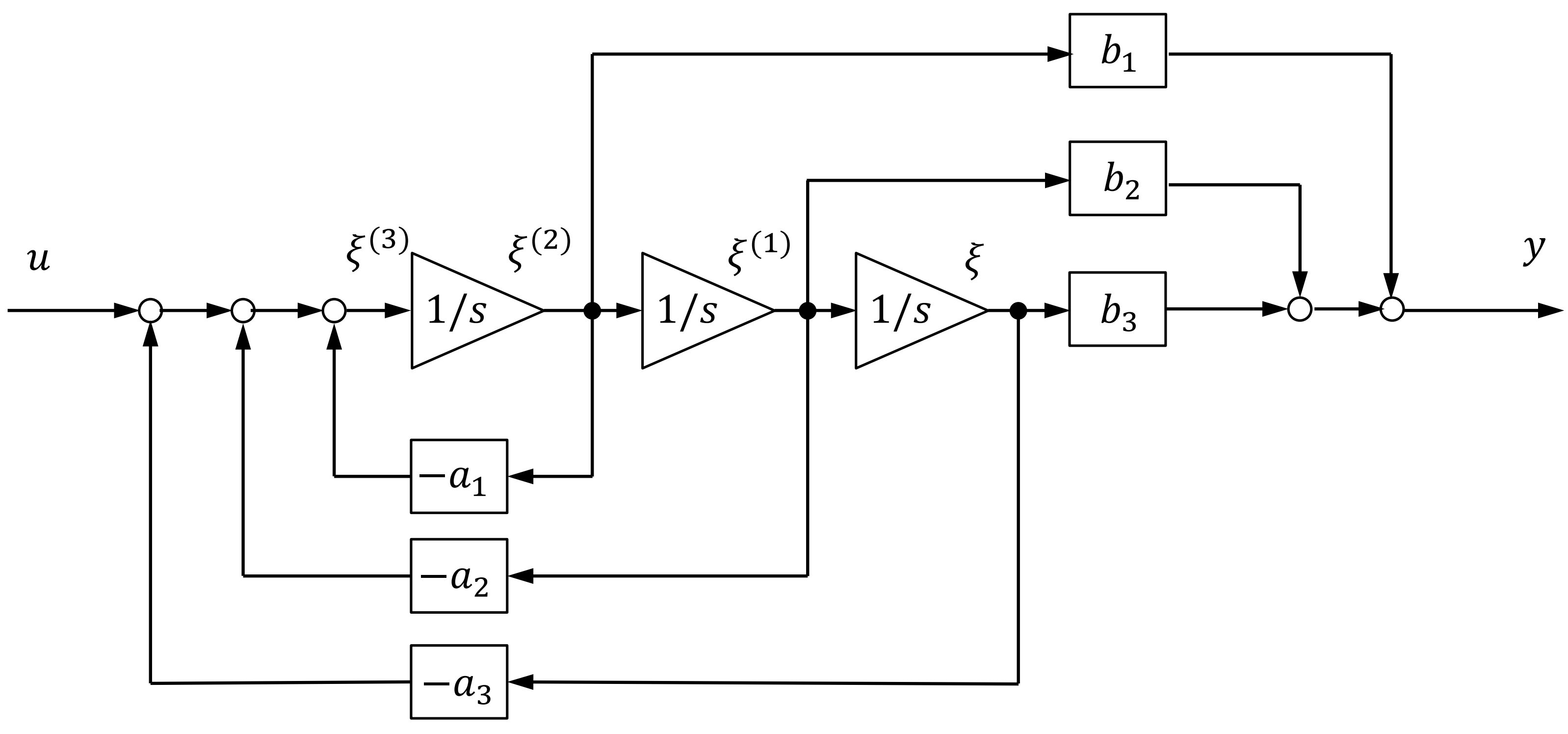
3) $\bar{A} + \bar{B}\bar{K}$ の構造から $\bar{K}$ を決定する（係数一致）.

4) $u = \bar{K}\bar{x} = \bar{K}Tx = Kx$ なので元の座標系でのゲイン K を $K = \bar{K}T$ とする.

可制御正準形のブロック線図

$$\frac{d^3}{dt^3}\xi + a_1\frac{d^2}{dt^2}\xi + a_2\frac{d}{dt}\xi + a_3\xi = u$$

$$y = b_1\frac{d^2}{dt^2}\xi + b_2\frac{d}{dt}\xi + b_3\xi$$



それぞれの可制御性を調べよ.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 可観測性

対象システム: 線形時不変系

$$(\Sigma) \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu\,(t) \\ y(t) &= Cx\,(t) \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

[定義 (可観測性)]

有限長の入出力データ $\{u(t),\ y(t), 0 \leq t \leq t_1\}$ に基づいて初期状態 $x_0 = x(0)$ が一意的に決定できるとき, 点 x_0 は可観測であるという.
任意の $x_0 \in \mathbb{R}^n$ が可観測であるとき, システム(Σ) は可観測であるという.

可観測グラミアン $M(0,t_1) := \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$

可観測行列 $M := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

可観測性グラミアンもその構造から, 半正定行列である.

定理:

(Σ)が可観測であるための必要十分条件は
可観測性グラミアン $M(0, t_1)$ が正定であることである.

$M \in \mathbb{R}^{pn \times n}$ のランクが n であるとき, (Σ) は可観測である
（必要十分条件）.

$$\operatorname{rank} M = n$$

$M(0, t_1)$ が正定ならば, (Σ)は可観測である.

証明

$M(0, t_1)$ が正定であるとき, 全ての固有値は正なので, 逆行列が存在する.

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau =: Ce^{At}x_0 + f(t)$$

である. 右辺第2項は $u(\cdot)$ から計算できるので, これを $f(t)$ とした. 前から $e^{A^T t}C^T$ をかけて $[0, t_1]$ で積分すると

$$\int_0^{t_1} e^{A^T t}C^T[y(t) - f(t)]dt = \int_0^{t_1} e^{A^T t}C^T Ce^{At}dt\, x_0 = M(0, t_1)x_0$$

したがって$M(0, t_1)^{-1}$を前からかけることにより, x_0 が求められる. よって (Σ)は可観測.

$M(0, t_1)$ が正定でないならば, (Σ)は可観測でない.

証明

$M(0, t_1)$ が正定でない（零固有値をもつ）ので, $\eta^T M(0, t_1)\eta = 0$ となる非零の η が存在する. よって

$$\eta^T M(0, t_1)\eta = \int_0^{t_1} \eta^T e^{A^T t} C^T C e^{At}\eta \, dt = \int_0^{t_1} \|Ce^{At}\eta\|^2 \, dt = 0$$

となるから, $Ce^{At}\eta = 0,\ t \in [0, t_1]$. ここで $\mathrm{u}(t) = 0$ とおいたシステム

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad y(t) = Cx(t), x(0) = \eta$$

を考えると, 出力は $y(t) = Ce^{At}\eta$ となる. これは初期値 $\eta \neq 0$ に対する出力が恒等的に 0 であることを示しており, η は初期値 0 と見分けることができない. したがって (Σ)は可観測でない.

(Σ)が可観測 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\, M = n$ の証明

$M(0,t_1)$ が正定 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\, M = n$ より示せ.

$(\Leftarrow)$

$M(0,t_1)$ が正定でないとする. 構造から $M(0,t_1) \geq 0$ なので, $M(0,t_1)$ は零固有値をもつ. すなわち $M(0,t_1)\zeta = 0$ となるような非零ベクトル ζ が存在. これより

$$0 = \zeta^T M(0,t_1)\zeta = \int_0^{t_1} \zeta^T e^{A^T t} C^T C e^{At}\zeta dt = \int_0^{t_1} \|\mu(t)\|^2 dt, \quad \mu(t) = Ce^{At}\zeta$$

したがって $\mu(t) \equiv 0, t \in [0,t_1]$ となる. $\mu(0) = 0$ より $C\zeta = 0$ となる.

さらに $\mu^k(0) = 0, k = 1,2,\cdots,$ より $CA^k\zeta = 0,\ k = 1,2,\cdots$ が得られる. したがって $M\zeta = 0$, すなわち $\mathrm{rank}\, M < n$. 対偶を取ると, $\mathrm{rank}\, M \geq n$ ならば $M(0,t_1) > 0$ (M のランクは n を越えないから $\mathrm{rank}\, M = n$).

(⇒)

rank $M \neq n$ のとき $M\zeta = 0$ を満たす非零ベクトル ζ が存在.

➡ $CA^k\zeta = 0 \quad \cdots \quad (1) \qquad k = 0,1,\dots,n-1$

ケーリーハミルトンの定理を用いると, 無限級数 e^{At} を $n-1$ 次までのべきで次のように表現できる.

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)A^i.$$

ここで $\mu(t) = Ce^{At}\zeta$ とすると先の議論のとおり, $\zeta^T M(0,t_1)\zeta = \int_0^{t_1} \|\mu(t)\|^2 dt$ であるが, 上式から $\mu(t)$ は

$$\mu(t) = Ce^{At}\zeta = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)CA^i\zeta\,.$$

と表現できる. 条件 (1) より, 任意の時刻で$\mu(t) = 0$ となる. したがって $\zeta^T M(0,t_1)\zeta = 0$ となるので, $M(0,t_1)$ は正定でない.

対偶をとると $M(0,t_1) > 0$ ならば rank $M = n$ である.

可制御正準形

$$y(s) = G(s)u(s), \qquad G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n \quad \cdots \quad b_2 \quad b_1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

スカラの伝達関数は転置をとっても同じ.

$$G^T(s) = B^T(sI - A^T)^{-1}C^T$$

可制御正準形の転置をとると, A^Tに新たなAが, C^Tに新たなBが, B^Tに新たなCが対応する.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -a_n \\ 1 & & 0 & -a_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

この実現の可観測行列 $M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & ⋰ & 1 & * \\ 0 & ⋰ & * & * \\ 1 & * & * & * \end{bmatrix}$ ➡ $\mathrm{rank}\, M = n$

“可観測”正準形

可観測であることと等価な条件のひとつは
「出力フィードバック $A+LC$ によって任意の極配置が可能」ということである.

可制御正準形の場合と同様に確かめられる.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & 0 & -a_n \\ 1 & & 0 & -a_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix} l_n \\ \vdots \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$\dot{x}=Ax+Ly, y=Cx$ ➡ 閉ループ系 $\dot{x}=(A+LC)x=\tilde{A}x$

閉ループ極($\tilde{A}$の固有値) $|sI-\tilde{A}|=0$ はどうなるか?

座標変換によって, 与えられた状態空間表現を可観測正準形に変換すれば
出力フィードバックゲインの設計が容易にできる.

➡ 何の役に立つかは次回

伝達関数から可観測正準形をつくる方法

例）　$$y(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} u(s) = \frac{N(s)}{D(s)} u(s)$$

$$0 = D(s)y(s) - N(s)u(s) = (s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)y - (b_1 s^2 + b_2 s + b_3)u$$

$$= s\{\underbrace{s[\underbrace{(s + a_1)y - b_1 u}_{\zeta}] + a_2 y - b_2 u}_{\xi}\} + a_3 y - b_3 u$$

$$s\xi = -a_3 y + b_3 u$$

$$s\zeta = \xi - a_2 y + b_2 u$$

$$sy = \zeta - a_1 y + b_1 u$$

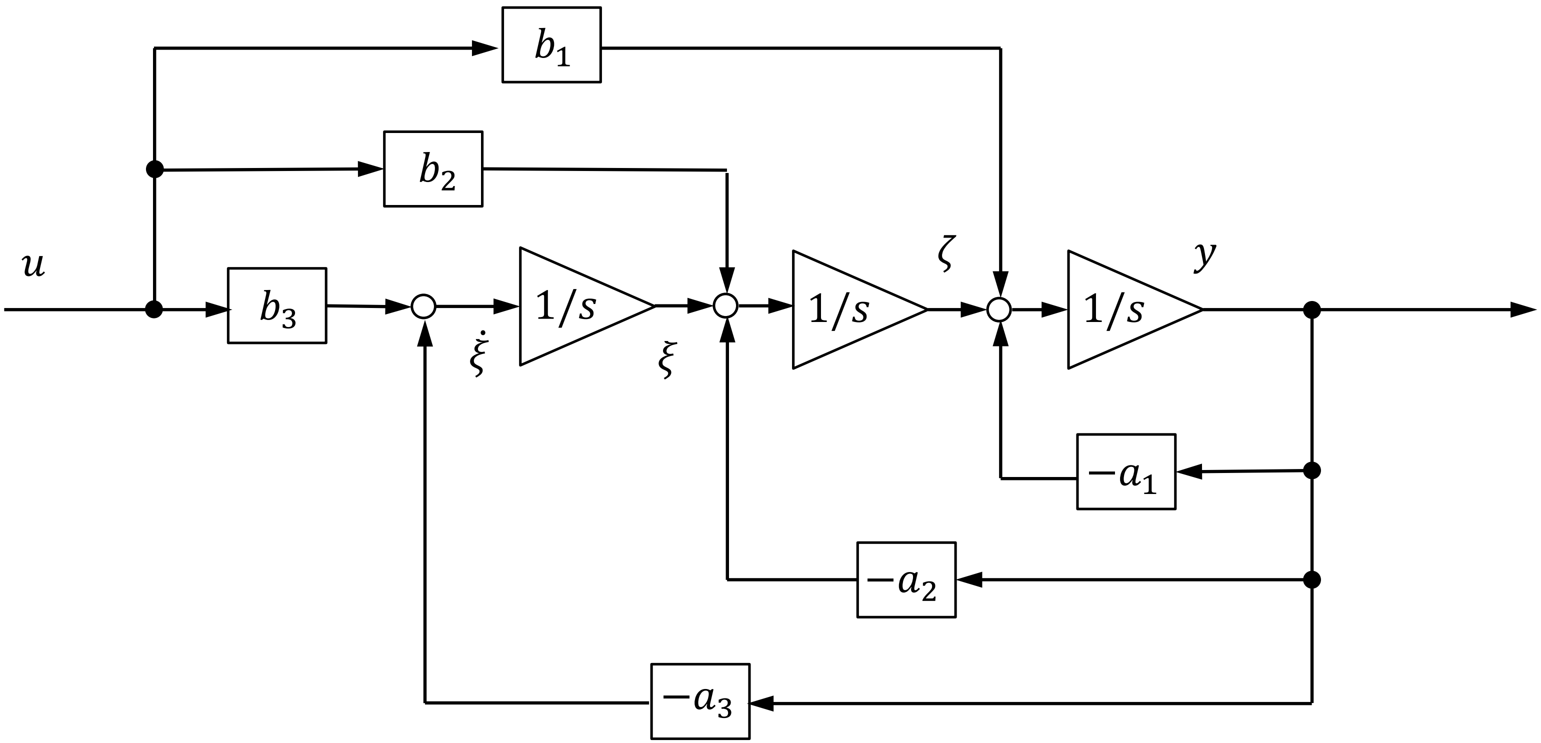
$$x = \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} u, \qquad y = [0 \quad 0 \quad 1]x$$

可観測正準形のブロック線図

$$s\xi = -a_3 y + b_3 u$$

$$s\zeta = \xi - a_2 y + b_2 u$$

$$sy = \zeta - a_1 y + b_1 u$$



それぞれの(可制御性), 可観測性を調べ,
初期値を 0 としたときの, u から y への伝達関数を求めよ.

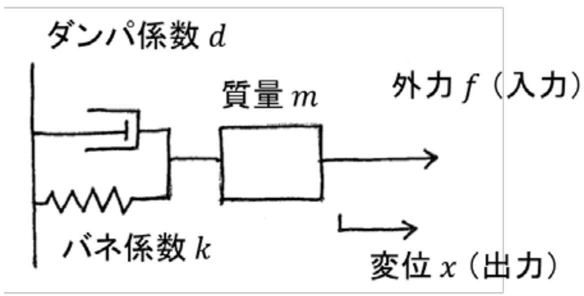
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ある n 次元の状態ベクトルに関する状態空間表現は, 可制御かつ可観測のとき, n 次の伝達関数に対応する. (そうでないときは, 入出力関係から見たとき, 冗長な部分を含む.)

逆に同じ伝達関数を与える実現の中で, 異なる次元をもつものがある.
実現の中で状態空間の次元が最小のものを最小実現という.
最小実現は可制御かつ可観測である.



$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = f$$

最小実現は2次元

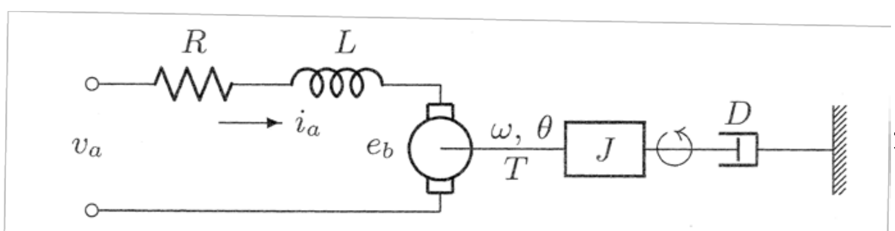


図 3.13　直流サーボモータ

ローターの
運動方程式　2次
＋
RL 回路方程式 1次

最小実現は3次元

対角正準形

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

第iモード $\frac{1}{s-\lambda_i}$ が伝達関数に現れるためには, $b_i \neq 0$ かつ $c_i \neq 0$.

対角正準形のブロック線図