システム制御 II

第2学期 火 1, 2限 8:40-10:50
5号館 第16講義室

担当:平田 健太郎

7/16　5回目 可制御性

講義日程（予定）

6/18　1回目 はじめに/古典制御の問題点
6/25　2回目 系のモデリングと状態方程式表現
7/2　3回目 状態方程式の解/伝達関数との関係
7/9　4回目 安定性と系の固有値，安定判別法
7/16　5回目 可制御性
7/23　6回目 可観測性
7/30　7回目 レギュレータ/オブザーバ
8/6　8回目 まとめ/期末試験

評価: 出席, レポート提出状況, 試験結果などから総合的に判定

前回のSummary

(Σ)　$\dot{x} = Ax$ が漸近安定であるための必要十分条件は A の全ての固有値の実部が負であること

系のエネルギーに着目した安定判別の方法もある.

通常, 安定性は「解」や「平衡点」に対して考えるものであるが, 線形システム $\dot{x} = Ax$ に対して $x = 0$ は常に解(零解)であり, 平衡点でもある. したがって, 「(Σ) $\dot{x} = Ax$ の零解が安定である」あるいは「(Σ) $\dot{x} = Ax$ において原点が安定である」という代わりに「システム(Σ)が安定である」という言い方を許容している. さらに安定条件は A の固有値分布によって決まるため, A の全ての固有値の実部が負であることを「Aが安定(行列)である」あるいは「Aがフルビッツ (安定) である」などという.

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ の解は

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$y(t) = Cx(t), x(0) = 0$ とする. $g(t) = Ce^{At}B$ (スカラー)とすれば

第2項についての安定性は古典制御(伝達関数)の場合と同じ

インパルス応答 $g(t)$ が絶対可積分であることが, $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ が(入出力)安定であるための必要十分条件であった. A の全ての固有値の実部が負であるとき, $g(t)$ は収束する指数関数の和なので絶対可積分.

$$\int_0^\infty |g(t)|\, dt \leq M < \infty$$

A の全ての固有値の実部が負であることは入出力安定性も保証する.

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ に対して $u(t) = Kx(t)$ というフィードバックを施す.

これを状態フィードバックという.

状態フィードバックによって $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t)$

$$= (A + BK)x(t) =: A_c x(t)$$

となるので, 閉ループ系の安定性は, 自励系 $\dot{x}(t) = A_c x(t)$ の安定性に帰着される.

$A_c = A + BK$ のすべての固有値の実部が負となるように, ゲイン K を決定する.

⇓

状態フィードバック安定化

5. 可制御性

そもそも $A+BK$ のすべての固有値の実部が負となるように, ゲイン K を決められるか, は行列 A, B に依存する

$\Downarrow$

システム, あるいは行列対 A, B の可制御性の概念

対象システム: 線形時不変系

$$(\Sigma) \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu\,(t) \\ y(t) &= Cx\,(t) \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

[定義 (可制御性)]

初期状態 $x(0) = x_0$ と有限時刻 $t_1 > 0$ が与えられたとき，システムを x_0 から 原点 $x = 0$ に遷移させる, すなわち $x(t_1) = 0$ とするような制御入力 $u(\tau)$, $\tau \in [0, t_1]$ が存在するとき, 点 x_0 は可制御であるという.
任意の $x_0 \in \mathbb{R}^n$ が可制御であるとき, システム (Σ)は可制御であるという.

n 次元ベクトルの組 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ に対して, a_i と a_j の内積を (i,j) 要素にもつ行列をグラム行列 (Gramian) という.

$$\text{ベクトルの内積: } \langle a_i, a_j \rangle = a_j^T a_i$$

区間 $[a,b]$ で2乗可積分な関数

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt = \int_a^b f^T(t) f(t)\, dt < M < \infty$$

からなる空間 $\mathcal{L}^2[a,b]$ において, 関数同士の内積が

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b g^T(t) f(t)\, dt$$

と定められる.

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} = e^{-At}B$$ とする.　f_i は横ベクトルであることに注意.

f_i と f_j の内積を (i,j) 要素にもつグラム行列 W を考える.

$$W(0,t_1) := \left[\left\langle f_i(t), f_j(t) \right\rangle\right] = \int_0^{t_1} e^{-At}BB^T e^{-A^T t}dt$$

これを可制御性グラミアンという.

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} = e^{-At}B$$

$\{f_1(t), \cdots, f_n(t)\}$の組が $\mathbb{R}^n$ に値をとる関数を十分に表現できるかどうか？

$\{f_1(t), \cdots, f_n(t)\}$が $\mathbb{R}^n$ に値をとる関数の基底として十分か？

⇩

可制御性グラミアンが正則か？

可制御性グラミアンはその構造から, 半正定行列である.

$W(0, t_1)$ の二次形式は

$$\eta^T W(0, t_1)\eta = \int_0^{t_1} \eta^T e^{-At} B B^T e^{-A^T t} \eta \, dt = \int_0^{t_1} |\xi(t)|^2 dt$$

$$\xi(t) = B^T e^{-A^T t} \eta \in \mathbb{R}^m$$

となるので, 任意の $\eta \neq 0$ に対して $\eta^T W(0, t_1)\eta \geq 0$.

⇓

$$W(0, t_1) \geq 0$$

関数ではなく通常の数ベクトルの場合を考えると

n 次元ベクトルの組 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ が線形独立であるかどうか？
線形独立ならば, これらから $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ の基底を選べる. 正規直交基底も
生成できる.

$$\text{線形独立} \;\Leftrightarrow\; |A| \neq 0,\; A \coloneqq [a_1\ a_2\ \cdots a_n]$$

$$W \coloneqq A^T A = \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{bmatrix}$$

グラミアンに相当

$W > 0$ のとき平方根行列 $W^{1/2}$ (正則) が存在して

$$\tilde{A} \coloneqq [\tilde{a}_1\ \tilde{a}_2\ \cdots \tilde{a}_n] = [a_1\ a_2\ \cdots a_n]W^{-1/2} = AW^{-1/2}$$

とすると $\left[\langle \tilde{a}_i, \tilde{a}_j \rangle\right] = \tilde{A}^T \tilde{A} = W^{-1/2} A^T A W^{-1/2} = W^{-1/2} W W^{-1/2} = I$

よって $\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n\}$ は正規直交系である.

$W > 0$ ならば基底として十分！

定理:

(Σ)が可制御であるための必要十分条件は
可制御性グラミアン $W(0, t_1)$ が正定であることである.

$W(0,t_1)$ が正定ならば, (Σ)は可制御である.

証明

$W(0,t_1)$ が正定であるとき, 全ての固有値は正なので, 逆行列が存在する.
制御入力 $u(\tau)$ を

$$u(\tau) = -B^T e^{-A^T\tau} W^{-1}(0,t_1)x_0, \tau \in [0,t_1]$$

と定める. 状態方程式の解より

$$x(t_1) = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= \boxed{}$$

$$= \boxed{} = 0.$$

たしかに, 制御入力 $u(\tau)$ によって x_0 から原点に状態を遷移させることができる. x_0 は任意のベクトルとすることができるので, (Σ)は可制御.

$W(0,t_1)$ が正定でないならば, (Σ)は可制御でない.

証明

$W(0,t_1)$ が正定でない（零固有値をもつ）ので，$W(0,t_1)\eta = 0$ となる非零の η が存在する.

(Σ)が可制御であるならば, この初期値を原点に遷移させる制御入力 $u(\tau)$ が存在する. すなわち

$\cdots$ (1)

一方, $0 = \eta^T W(0,t_1)\eta = \int_0^{t_1} |\xi(\tau)|^2 d\tau$ より，時間関数 $\xi(\tau) = B^T e^{-A^T\tau}\eta$ は $\tau \in [0,t_1]$ において恒等的に 0. すなわち

よって, (1)の両辺に左から η^T をかけると $\eta^T\eta = \|\eta\|^2 = 0$. これは $\eta \neq 0$ に矛盾するので, (Σ)は可制御でない.

可制御性をチェックするために積分 $\int_0^{t_1} e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}dt$

を計算するのは実用的ではない．より代数的な方法はないか？

$$W := [B \ AB \ A^2B \cdots A^{n-1}B]$$

を可制御行列という. $W \in \mathbb{R}^{n\times nm}$. W のランクが n であるとき,
(Σ) は可制御である（必要十分条件）.

$$\mathrm{rank}\, W = n$$

ランク（階数）: 線形独立な行ベクトルまたは列ベクトルの最大本数
正方行列であれば, フルランク ⇔ 正則

行列 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$ とすると, ベクトル $a_1,a_2,\cdots,a_n$ のうち, 一次独立であるベクトルの最大本数が $\mathrm{rank}\,A$である ($\mathrm{rank}\,A \le n$).

明らかに, 一次独立であるベクトルの最大本数はベクトルの並び順には依存しないから, 列の入れ替えに対して階数は不変.

また, 列のスカラ倍に対して階数は不変.

さらに, ある列のスカラ倍を他の列に加えても階数は不変.

基本変形

階数は, 行列式が非零となる最大の小行列のサイズとしても定義できる.
上記は行列式が不変である条件なので, この定義による方が見通しがよい.

例題: 次の行列のランクを求めよ.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 11 & -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

(Σ)が可制御 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} W = n$ の証明

$W(0, t_1)$ が正定 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} W = n$ より示す.

$(\Leftarrow)$
$W(0, t_1)$ が正定でないとする. その構造から $W(0, t_1)$ は半正定なので
零固有値をもつ. すなわち $W(0, t_1)\eta = 0$ となるような非零の η が存在.

$$\Rightarrow \quad 0 = \eta^T W(0, t_1)\eta = \int_0^{t_1} \eta^T e^{-At} B B^T e^{-A^T t} \eta \, dt = \int_0^{t_1} |\xi(t)|^2 dt$$

$\xi(t) = \eta^T e^{-At} B$ (横ベクトル) $\qquad \xi(t) = 0, \xi \in [0, t_1]$

$\xi(t) = 0, \xi \in [0, t_1]$ より $\xi(0) = 0$

$\xi(t) = \eta^T e^{-At} B$ に $t = 0$ を代入して $\eta^T B = 0$.

さらに $\frac{d}{dt}\xi(t) = 0\ , \xi \in [0, t_1]$より

$$\left.\frac{d}{dt}\xi(t)\right|_{t=0} = -\eta^T A e^{-At} B\Big|_{t=0} = -\eta^T AB = 0.$$

以下同様に $\frac{d^k}{dt^k}\xi(t) = 0\ , k = 2, \cdots, n-1, \xi \in [0, t_1]$ より

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}\xi(t)\right|_{t=0} = (-1)^k \eta^T A^k e^{-At} B\Big|_{t=0} = (-1)^k \eta^T A^k B = 0.$$

まとめると $\eta^T [B\ AB \cdots A^{n-1}B] = \eta^T W = 0$

よって W の行ベクトルは一次独立でない $\Rightarrow \operatorname{rank} W < n.$

したがって $\operatorname{rank} W \geq n \ \Rightarrow W(0, t_1) > 0$.

$\operatorname{rank} W \leq n$ なので $\operatorname{rank} W \geq n \Leftrightarrow \operatorname{rank} W = n.$

$W(0,t_1)$ が正定 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} W = n$ より示す.

$(\Rightarrow)$
$\operatorname{rank} W \neq n$ とする. 先と同様, $\eta^T W = 0$ となるような非零の η が存在.

$$\Longrightarrow \quad \eta^T A^k B = 0 \quad \cdots \quad (1) \qquad k = 0,1,\dots,n-1$$

ケーリー・ハミルトンの定理より $f(s) = |sI - A|$ のとき, $f(A) = 0$ であるから

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I = 0$$

が成り立つ. これによって行列指数関数

$$e^{-At} = I - \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 - \frac{1}{3!}A^3 t^3 + \frac{1}{4!}A^4 t^4 \cdots$$

を A の $n-1$次までのべきを使って以下のように表現できる.

$$e^{-At} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t) A^i$$

ゆえに

$$\eta^T e^{-At} B = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t) \eta^T A^i B$$

となるが, (1)より

$$\eta^T e^{-At} B = 0, \quad \forall t$$

が成り立つ．先と同様に

$$\eta^T e^{-At} B = 0, \forall t \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t_1} \eta^T e^{-At} B B^T e^{-A^T t} \eta \, dt = \eta^T W(0, t_1) \eta = 0.$$

非零の η に対して二次形式が0となるので $W(0, t_1) \not> 0$.

したがって$W(0, t_1) > 0 \Rightarrow \operatorname{rank} W = n.$ $\square$

第2回の講義で扱った「伝達関数から状態空間表現を求める方法」を一般化する.

$$y(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} u(s) = \frac{N(s)}{D(s)} u(s)$$

$$\Downarrow$$

$$y(s) = N(s)\xi(s), \quad \xi(s) = \frac{u(s)}{D(s)}$$

$$\Big\Downarrow \ \mathcal{L}^{-1}$$

変数 ξ に関する連立1階微分方程式にする

$$D(s)\xi(s) = u(s)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\xi(t) = -a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\xi(t) - \cdots - a_{n-1}\frac{d}{dt}\xi(t) - a_n\xi(t) + u(t)$$

$$D(s)\xi(s) = u(s) \Rightarrow \frac{d^n}{dt^n}\xi(t) = -a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\xi(t) - \cdots - a_{n-1}\frac{d}{dt}\xi(t) - a_n\xi(t) + u(t)$$

$$y(s) = N(s)\xi(s) \Rightarrow y(t) = b_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\xi(t) + \cdots + b_{n-1}\frac{d}{dt}\xi(t) + b_n\xi(t)$$

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \frac{d}{dt}\xi, \cdots, x_n = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n & \cdots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y(s) = G(s)u(s), \qquad G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

★

$$y = \begin{bmatrix} b_n & \cdots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

伝達関数から状態空間表現を求めることを実現という. (得られた状態空間表現を伝達関数の実現ともいう.)

この実現の可制御行列 W を求めよ.

計算用ページ

先の結果から, ★ の実現を, 可制御正準形という.

可制御であることと等価な条件のひとつは
「状態フィードバックによって任意の極配置が可能」ということである.

可制御正準形を用いてこれを確かめよう.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, K=\begin{bmatrix} k_n & \cdots & k_1 \end{bmatrix}$$

$\dot{x}=Ax+Bu, u=Kx$ $\Rightarrow$ 閉ループ系 $\dot{x}=(A+BK)x=\tilde{A}x$

閉ループ極($\tilde{A}$の固有値) $\left|sI-\tilde{A}\right|=0$ はどうなるか?

計算用ページ

実現は一通りではない(一意ではない).

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx \quad \Rightarrow \quad y = C(sI - A)^{-1}Bu$$

正則な T によって $\bar{x} = Tx$ とする(座標変換). このとき

$$\dot{\bar{x}} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = TAT^{-1}(Tx) + TBu =: \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$y = Cx = CT^{-1}Tx = CT^{-1}\bar{x}$$

よって $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ と $\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u, y = \bar{C}x$

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB, \bar{C} = CT^{-1}$$

の入出力関係は同じ.(状態 x のもつ意味は異なる)

座標変換によって, 与えられた状態空間表現を可制御正準形に変換すれば
状態フィードバックゲインの設計が容易にできる.

座標変換によって伝達関数は不変である. 確かめよ.

$$\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B} = ?$$