システム制御 II

第2学期 火 1, 2限 8:40-10:50
5号館 第16講義室

担当:平田 健太郎

7/9

第4回　安定性と系の固有値, 安定判別法

講義日程（予定）

6/18 1回目 はじめに/古典制御の問題点
6/25 2回目 系のモデリングと状態方程式表現
7/2 3回目 状態方程式の解/伝達関数との関係
7/9 4回目 安定性と系の固有値，安定判別法
7/16 5回目 可制御性
7/23 6回目 可観測性
7/30 7回目 レギュレータ/オブザーバ
8/6 8回目 まとめ/期末試験

評価: 出席, レポート提出状況, 試験結果などから総合的に判定

前回のSummary

$f(s)=|sI-A|$ のとき，$f(A)=0.$　ケーリー・ハミルトンの定理

$$e^{At} := I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 \cdots$$ 行列指数関数

➡ $$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

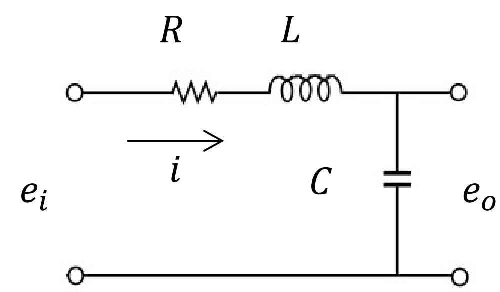
➡ $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ の解は

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

行列指数関数 e^{At} の計算方法

- 定義式に従う
- 対角化を利用する
- ラプラス変換を経由する

課題:



RLC回路の状態空間表現

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u =: Az + Bu$$

$$y = v_c = \frac{1}{C} z_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} =: \tilde{C} z$$

$R = L = C = 1$ とする.

状態ベクトルを $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, z_1 = \int i dt,\ z_2 = i$ と定めた.

➡ このままだと A 行列の構造がマス･バネ･ダンパーの例題と同じなのでつまらない.

$$\frac{d}{dt} z_1 = z_2 \qquad \frac{d}{dt} z_2 = -z_2 - z_1 + u \qquad y = z_1$$

状態の選び方は一意でない. $z' := \begin{bmatrix} z_1{}' \\ z_2 \end{bmatrix}, z_1' := z_1 - z_2$とすると

$$\frac{d}{dt}z_1' = \frac{d}{dt}z_1 - \frac{d}{dt}z_2 = z_2 - (-z_2 - z_1 + u\,)$$

$$= 2z_2 + z_1 - u = 2z_2 + (z_1' + z_2) - u = z_1' + 3z_2 - u$$

右辺も z_1' を用いて表す

$$\frac{d}{dt}z_2 = -z_2 - z_1 + u = \; -z_2 - (z_1' + z_2) + u = -z_1' - 2z_2 + u$$

$$y = z_1 = z_1' + z_2$$

$$\dot{z}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} z' + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u =: \bar{A}z + \bar{B}u$$

$e^{\bar{A}t}$ を求めよ.

$$y = [1 \quad 1]z' =: \bar{C}z'$$

解答: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\quad sI - A = \begin{bmatrix} s-1 & -3 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2+s+1}\begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s-p_1)(s-p_2)} & \dfrac{3}{(s-p_1)(s-p_2)} \\ \dfrac{-1}{(s-p_1)(s-p_2)} & \dfrac{s-1}{(s-p_1)(s-p_2)} \end{bmatrix}$$

$$p_1, p_2 = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}j\right)$$

$$\frac{s+2}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{a}{s-p_1} + \frac{b}{s-p_2}$$ とおいて，係数一致からも解ける

ヘビサイドの展開定理を使うと

$$a = \frac{s+2}{(s-p_1)(s-p_2)}(s-p_1)\bigg|_{s=p_1} = \frac{p_1+2}{p_1-p_2} = \frac{3+\sqrt{3}j}{2\sqrt{3}j} = \frac{\sqrt{3}-3j}{2\sqrt{3}}$$

$$b = \frac{s+2}{(s-p_1)(s-p_2)}(s-p_2)\bigg|_{s=p_2} = \frac{p_2+2}{p_2-p_1} = \frac{3-\sqrt{3}j}{-2\sqrt{3}j} = \frac{\sqrt{3}+3j}{2\sqrt{3}} = \bar{a}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+s+1}\begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s-p_1)(s-p_2)} & \dfrac{3}{(s-p_1)(s-p_2)} \\ \dfrac{-1}{(s-p_1)(s-p_2)} & \dfrac{s-1}{(s-p_1)(s-p_2)} \end{bmatrix}$$

$$p_1, p_2=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{3}j\right)$$

$$G_{11}(s):=\frac{s+2}{(s-p_1)(s-p_2)}=\frac{a}{s-p_1}+\frac{b}{s-p_2} \qquad a=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}j\right)=-p_1, \qquad b=\bar{a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[G_{11}(s)]=-p_1e^{p_1t}-\overline{p_1}e^{\overline{p_1}t}=e^{-\frac{t}{2}}\left(-p_1e^{j\omega t}-\overline{p_1}e^{-j\omega t}\right), \qquad \omega:=\sqrt{3}/2$$

$$\alpha:=-p_1$$

$$\alpha e^{j\omega t}+\bar{\alpha}e^{-j\omega t}=2Re[\alpha]\cos\omega t-2Im[\alpha]\sin\omega t$$

$$=\cos\omega t+\sqrt{3}\sin\omega t$$

$$\mathcal{L}^{-1}[G_{11}(s)]=e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\omega t+\sqrt{3}\sin\omega t\right)$$

以下同様にして計算

別解：対角化を利用する

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

固有値: $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}j\right)$

$$(\lambda_1 I - A)x_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j & -3 \\ 1 & \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix} x_1 = 0$$

固有ベクトル ➡ $x_1 = k \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) \end{bmatrix}$ $\quad x_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 + \sqrt{3}j \end{bmatrix}$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = \frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{3}j\right)\left(-3 + \sqrt{3}j\right) = \frac{1}{4}(-3 - 9) = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

固有値: $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}j\right)$

$$(\lambda_2 I - A)x_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j & -3 \\ -1 & -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix} x_2 = 0$$

固有ベクトル ➡ $x_2 = k \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) \end{bmatrix}$ $\qquad x_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 - \sqrt{3}j \end{bmatrix}$

$$(\lambda_1 I - A)x_1 = 0 \qquad (\lambda_2 I - A)x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad A[x_1 \quad x_2] = [\lambda_1 x_1 \quad \lambda_2 x_2] = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

$$A\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -3+\sqrt{3}j & -3-\sqrt{3}j \end{bmatrix}}_{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -3+\sqrt{3}j & -3-\sqrt{3}j \end{bmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}j}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{3}j}{2} \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

$A = T\Lambda T^{-1}$ 对角化 $\Rightarrow$ $e^{At} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}T^{-1}$

$$T = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -3+\sqrt{3}j & -3-\sqrt{3}j \end{bmatrix}$$

$$|T| = 6\{(-3-\sqrt{3}j) - (-3+\sqrt{3}j)\} = -12\sqrt{3}j$$

$$T^{-1} = -\frac{1}{12\sqrt{3}j}\begin{bmatrix} -3-\sqrt{3}j & -6 \\ 3-\sqrt{3}j & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{At} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

（複素行列の積は面倒だが原理的には計算可）

あるいは

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) \qquad \sin\omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

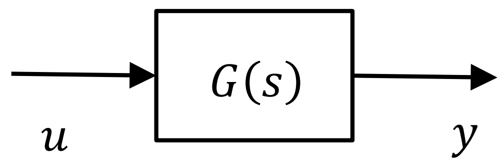
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad \Rightarrow \quad F(s+a) = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt = \mathcal{L}[f(t)e^{-at}]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t] = \frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+s+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

4. 安定性

古典制御において, 伝達関数システムの安定性は「入出力安定性」であった.



任意の有界入力に対して, 出力が常に有界となるとき, システムは
入出力安定という.

$G(s)$ がプロパーな有理伝達関数であるとき, 入出力安定である
ための必要十分条件は, $G(s)$ の全ての極の実部が負となることである.

伝達関数を考えるとき, 初期値は0であったことに注意

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

現代制御において, 状態方程式システム　$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ の解は

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

であるから, 解は初期値に対応する成分と入力に対応する成分を持つ.

初期値応答 (自励系) の安定性

$$(\Sigma) \qquad \dot{x} = Ax, x(0) = x_0$$

漸近安定:　任意の初期値に対して, $x(t) \to 0, \ (t \to \infty)$ となるとき, 線形システム (Σ) は漸近安定という.

（ A が対角化可能なら）

$$A = T^{-1}\Lambda T \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \lambda_i\text{: } A \text{ の固有値}$$

$$e^{At} = T^{-1}e^{\Lambda t}T = T^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}T$$

$t \to \infty$ のとき $e^{\lambda_i t} \to 0, i = 1, \cdots n$ となるには？

λ は実行列の固有値なので, 一般に$\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda = \sigma + j\omega \rightarrow e^{\lambda t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

$\left| e^{j\omega t} \right| = 1, \forall t$ なので, モード $e^{\lambda t}$ は

$$\begin{cases} \sigma = Re[\lambda] < 0 \text{ ならば，} t \rightarrow \infty \text{ のとき } 0 \text{ に収束} \\ \sigma = Re[\lambda] > 0 \text{ ならば，} t \rightarrow \infty \text{ のとき発散} \\ \sigma = Re[\lambda] = 0 \text{ ならば，} t \rightarrow \infty \text{ のとき} \pm 1 \text{間を振動し続ける} \end{cases}$$

$Re[\lambda_k] < 0, \forall k$ ならば，$t \rightarrow \infty$ のとき $e^{\lambda_k t} \rightarrow 0$

（λ_k が重複固有値でないとき）

A が対角化できないとき

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_q) \end{bmatrix}$$ なる変換が可能　⇒ ジョルダン標準形

例)

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

べき乗は対角ブロックごとに考えればよい.

⇒ 部分の行列指数関数がどうなるか？

行列指数関数の性質からうまく求まる

$$J = \lambda I + N, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

N はべき零行列.

$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする. $N^2, N^3, \cdots$ を求めよ.

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行列指数関数の性質

(a) $e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau}$

(b) $AB = BA \Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$

(c) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$

スカラーの場合: $2^{1+3} = 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^1 \times 2^3$

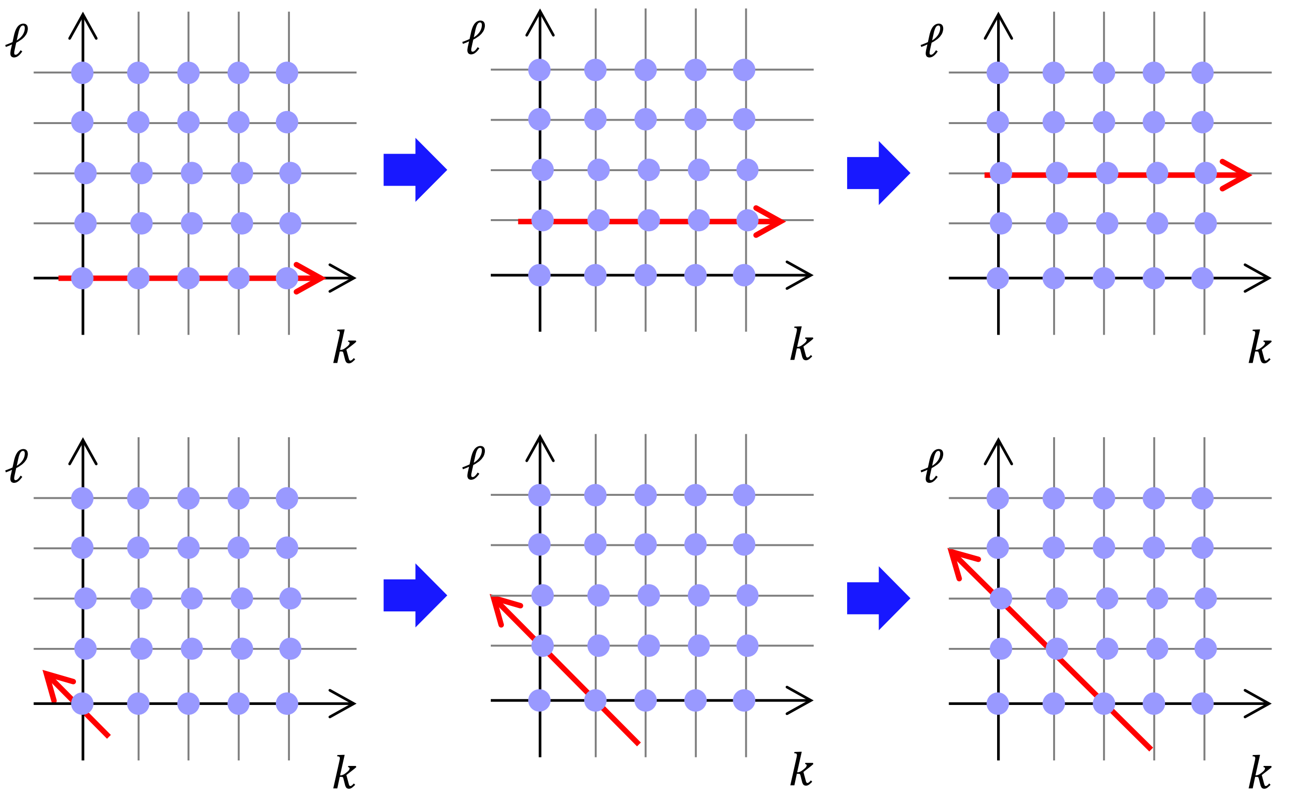
拡張

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

証明 (a)

$$e^{At}e^{A\xi}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{A^\ell t^\ell}{\ell!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\xi^k}{k!}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^\ell t^\ell}{\ell!}\frac{A^k\xi^k}{k!}$$

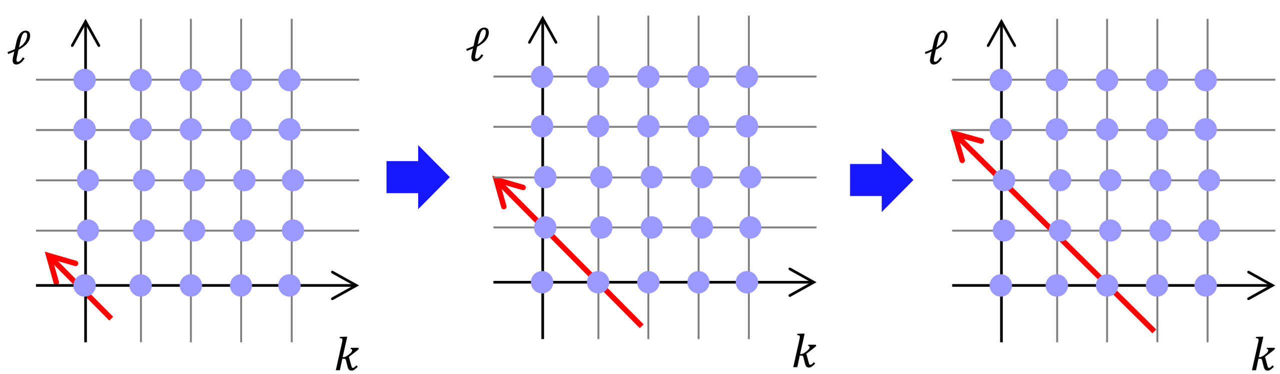
二重和の順序変更



$$e^{At}e^{A\xi}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{A^\ell t^\ell}{\ell!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\xi^k}{k!}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^\ell t^\ell}{\ell!}\frac{A^k\xi^k}{k!}$$

$n\coloneqq k+\ell=0,1,2,\cdots \qquad k=0,\cdots,n \qquad \ell=n-k$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{A^{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!}\frac{A^k\xi^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\frac{\xi^k}{k!}$$



$$e^{At}e^{A\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\frac{\xi^k}{k!}$$

二項定理から

$$(t+\xi)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,t^{n-k}\xi^k, \qquad {}_nC_k=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

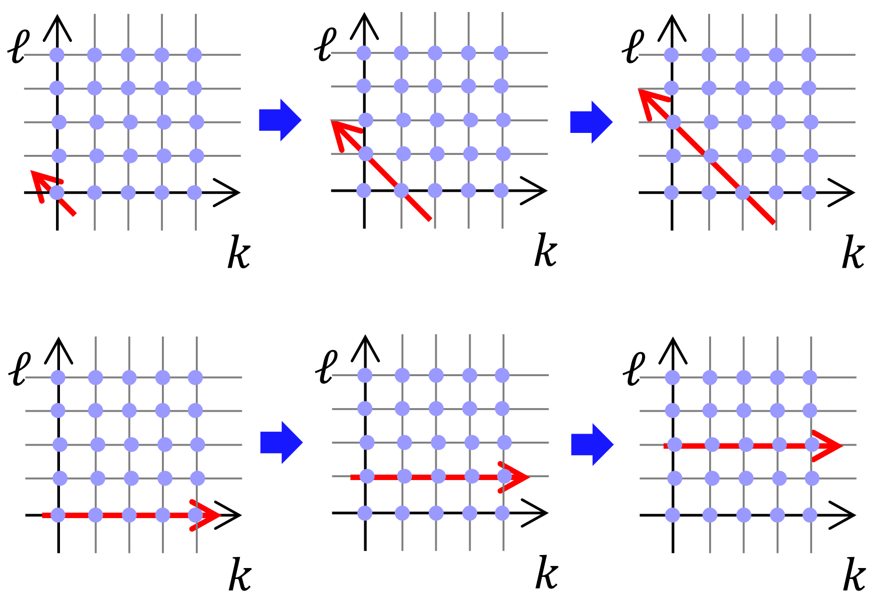
$$\therefore\ e^{At}\,e^{A\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n\frac{(t+\xi)^n}{n!}=e^{A(t+\xi)}$$

証明 (b)

$AB = BA$のとき

$$e^{(A+B)t} = \sum_{n=0}^{\infty} (A+B)^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, A^{n-k} B^k \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} A^{n-k} B^k \frac{t^{n-k} t^k}{(n-k)!\,k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A^{\ell} B^k \frac{t^{\ell} t^k}{\ell!\,k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^{\ell} t^{\ell}}{\ell!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k t^k}{k!} = e^{At}\, e^{Bt}$$



$$n = \ell + k$$

$$e^{Nt}=\sum_{n=0}^{\infty}N^n\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{k-1}N^n\frac{t^n}{n!}=\begin{bmatrix}1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & t^{k-2}/(k-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & t^{k-3}/(k-3)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

λI と N は可換であるから, $e^{Jt}=e^{(\lambda I+N)t}=e^{\lambda t}e^{Nt}$

$$\therefore\quad e^{Jt}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & t^{k-2}/(k-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & t^{k-3}/(k-3)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & t^2e^{\lambda t}/2! & \cdots & t^{k-1}e^{\lambda t}/(k-1)! \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & t^{k-2}e^{\lambda t}/(k-2)! \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \ddots & t^{k-3}e^{\lambda t}/(k-3)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

$t\to\infty$ のとき

$Re[\lambda]<0$ ならば $e^{\lambda t}\to 0$
$t^k\to\infty$

どっちが強いか

$Re[\lambda] = -\sigma$, $\sigma > 0$ とする.

$$e^{\sigma t} = 1 + \sigma t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\sigma^k t^k + \frac{1}{(k+1)!}\sigma^{k+1} t^{k+1} + \cdots$$

$$\therefore\ e^{\sigma t}/t^k = \frac{1}{t^k} + \frac{\sigma}{t^{k-1}} + \frac{\sigma^2}{2t^{k-2}} + \cdots + \frac{\sigma^k}{k!} + \frac{\sigma^{k+1}}{(k+1)!}t + \cdots$$

$$\therefore\ e^{\sigma t}/t^k \to \infty\ (t \to \infty)$$

$\left|t^k e^{\lambda t}\right| = \frac{t^k}{e^{\sigma t}} = \frac{1}{e^{\sigma t}/t^k}$ より $t^k e^{\lambda t} \to 0\ (t \to \infty)$

これは任意 k について成り立つので 指数関数$e^{-\sigma t}$の増加のスピードはどんな多項式よりも速い

$Re[\lambda_i] < 0, \forall i$ ならば，$t \to \infty$ のとき $t^n e^{\lambda t} \to 0$

$$t^n e^{\lambda t} \to 0, (t \to \infty) \;\Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$

$$A = T^{-1} J T \qquad J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix} \qquad e^{At} = T^{-1} e^{Jt} T = T^{-1} \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_k t} \end{bmatrix} T$$

$$e^{J_k t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & t^2/2!\, e^{\lambda t} & \cdots & t^{k-1} e^{\lambda t}/(k-1)! \\ 0 & e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \ddots & t^{k-2} e^{\lambda t}/(k-2)! \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \ddots & t^{k-3} e^{\lambda t}/(k-3)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

(Σ)　$\dot{x} = Ax$ が漸近安定であるための必要十分条件は

A の全ての固有値の実部が負であること

別の観点からの特徴付け:

伝達関数 $G(s) = N(s)/D(s)$ の安定条件:

分母多項式の零点（伝達関数の極）: $p_i, i = 1, \cdots, n \quad \forall i, Re(p_i) < 0$

伝達関数の極を直接計算しない安定判別法として, Routh-Hurwitzの方法があったように, A の固有値を直接計算しない状態方程式の安定判別法があれば望ましい.

➡ リアプノフ（Lyapunov）の判別方法

系のエネルギーに着目した方法

一般論：　非線形な自励系を考える.

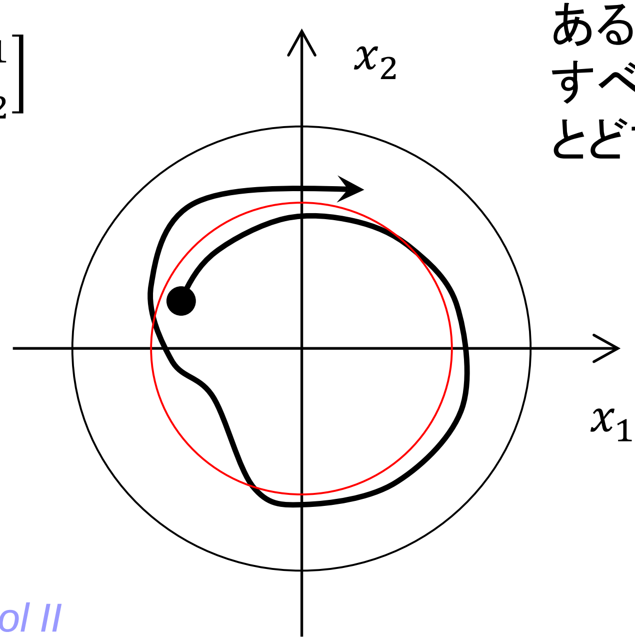
$$\dot{x}(t) = f[x(t)]$$

$f(x) = 0$ となる点を平衡点という.　$f(0) = 0$, すなわち原点 $x = 0$ は平衡点とする.

任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し, $\|x(0)\| < \delta$ なるすべての $x(0)$ と $t \geq 0$ について $\|x(t)\| < \epsilon$ となるならば, 原点 $x = 0$ は（リアプノフの意味で）安定という.

2次元のイメージ

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



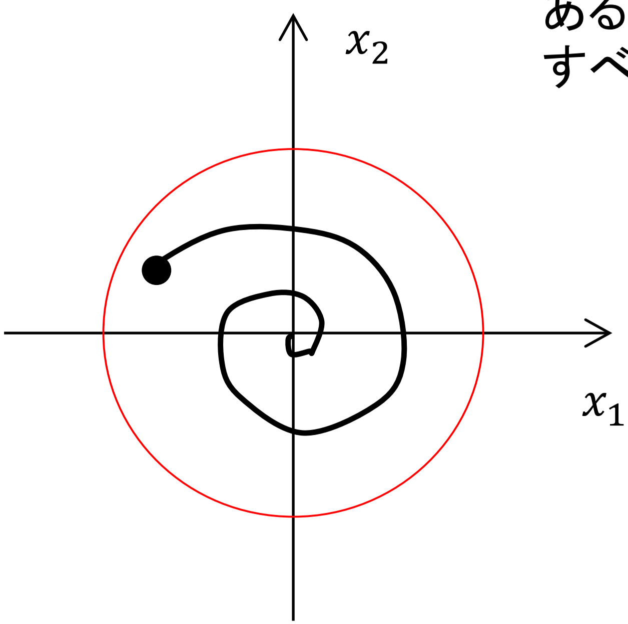
ある半径の円内の初期値からスタートしたすべての軌道が, 未来永劫ある半径の円内にとどまるとき

⇓

安定（リアプノフ安定）

安定でかつ, ある $\delta' > 0$ が存在し, $\|x(0)\| < \delta'$ なるすべての $x(0)$ に対して $x(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ となるならば, 原点 $x = 0$ は漸近安定という.

2次元のイメージ　$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



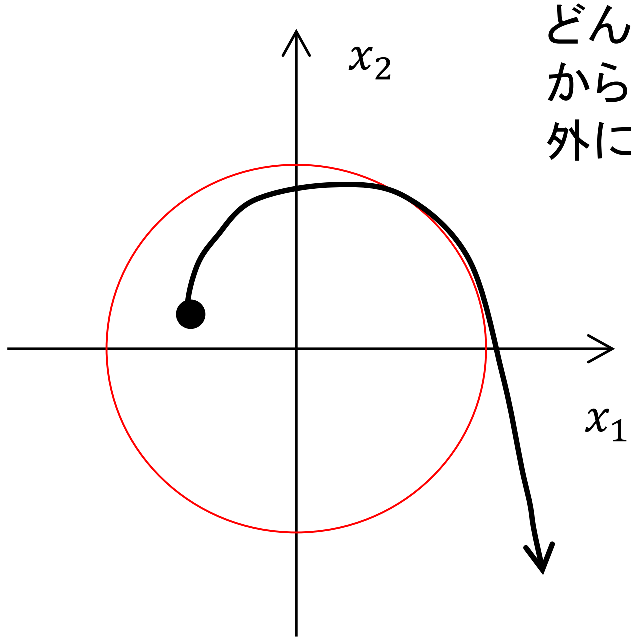
ある半径の円内の初期値からスタートしたすべての軌道が, 原点に収束するとき

↓

漸近安定

ある $\epsilon > 0$ に対して, どんな $\delta > 0$ を選んでも, $\|x(0)\| < \delta$ を満たす
ある $x(0)$ に対して $\|x(t)\| > \epsilon$ となる $t > 0$ が存在するならば, 原点
$x = 0$ を不安定という.

2次元のイメージ　$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



どんなに半径を大きくしても, 円内の初期値からスタートした軌道が, ある半径よりも外に出てしまう

不安定

リアプノフの方法

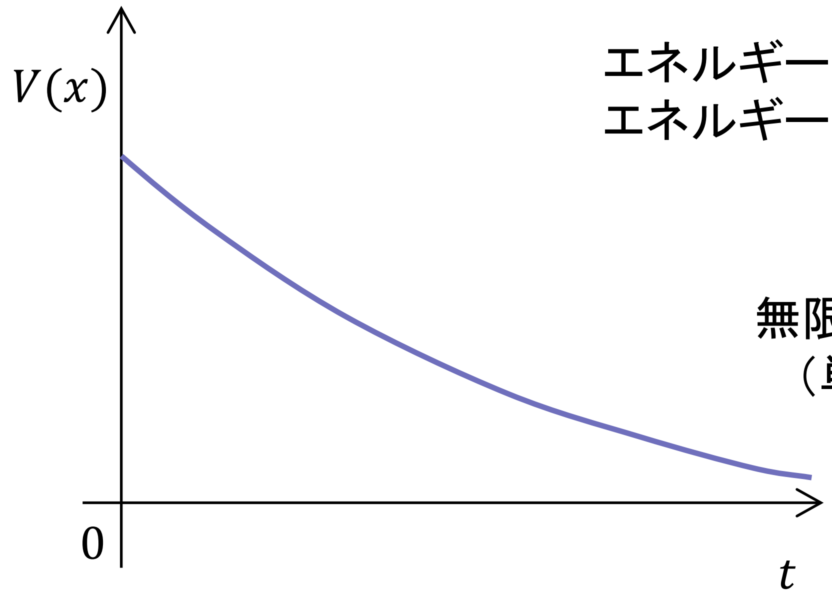
以下の性質をもつ状態 $x(t)$ のスカラー関数 $V(x)$ をリアプノフ関数という.

- $V(x)$ は正定関数, i.e., $V(x) > 0, \forall x \neq 0$
- $\partial V / \partial x$ は連続
- システムの解軌道に沿った $V(x)$ の時間微分が準負定,
  i.e., $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0$

x の全域でリアプノフ関数 $V(x)$ が存在し, $\|x\| \to \infty$ のとき $V(x) \to \infty$,
$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$ を満たすならば, 原点は(大域的に)漸近安定である.

$V(x)$ は系のエネルギーを表しており, $\dot{V}(x) < 0$ はエネルギーが時間的に減少して0 に近づくことを意味している.

どのようにして $V(x)$ を探すか？



エネルギーが時間的に単調に減少する.
エネルギーは正の値をとる.

無限時間経過後は0に収束
（単調な有界列は収束）

正定性

実対称行列 A に対して, 適合するサイズのベクトル x を用いて, スカラー量 $x^T Ax$ を二次形式という.非零ベクトル x に対して, 二次形式の値が常に正(負)となるとき, 行列 A は正定(負定)であるといい, $A > 0$ ($A < 0$)で表す.

実対称行列 A が正定であるための必要十分条件は, 全ての固有値が正であることである.

実対称行列は, 直交行列によって常に対角化可能なので

$$P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$y := P^T x$$

$$x^T Ax = x^T P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} P^T x = y^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Pは正則であるから, $x \neq 0 \Leftrightarrow y = P^T x \neq 0$. よって $x^T Ax > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0, \forall i$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ は正定か？

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$\lambda = 1, 3$ 　　A は正定

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$$

$\lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ 　　B は正定でない

どのようにして $V(x)$ を探すか？

線形システムに対しては, 状態の二次形式として $V(x)$ を探索すれば十分であることが知られている.

$$V(x) = x^T P x$$

$V(x)$ が正定関数, i.e., $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ であるためには, $P > 0$（正定行列）でなければならない.

Pが定数行列であるので, システムの解軌道 $\dot{x} = Ax$ に沿った $V(x)$ の時間微分は

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax)^T P x + x^T P (Ax) = x^T (A^T P + PA) x$$

となる. $A^T P + PA = -Q, Q$は正定行列（定数）であれば $\dot{V}(x)$ は負定である.

リアプノフ方程式

$\dot{x} = Ax$ が与えられたとき, 任意の正定行列 Q に対して, 方程式

$$A^T P + PA = -Q$$

が正定解 P をもつとき, $\dot{x} = Ax$ は漸近安定である. この方程式をリアプノフ方程式という.

正定解 P の存在が, 漸近安定であるための十分条件であることは先の議論からほぼ明らかであるが, これは必要条件でもある.

また, 存在するとき, 解は一意である.

リアプノフの安定定理

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ の解，あるいは行列 A が安定である．
$\Leftrightarrow$ 任意の $Q > 0$ に対してリアプノフ方程式

$$PA + A^T P + Q = 0 \qquad (1)$$

が一意的な解 $P > 0$ をもつ．

証明:

$(\Leftarrow)$ $P>0$ が存在するとき, $V(x)=x^TPx>0$ とおくと

$$\dot V(x)=\dot x^TPx+x^TP\dot x=x^T(A^TP+PA)x=-x^TQx<0$$

区間 $[0,t]$ で積分して

$$\int_0^t x^T(\tau)Qx(\tau)d\tau=V(x_0)-V(x(t))<V(x_0)<\infty$$

これは $t\ \to\ \infty$ についても成り立つ. $Q\ >\ 0$ より非積分関数は $||Q^{1/2}x(\tau)||^2$ であるから $x(\tau)\to 0$ でなければならない.

補足(平方根行列)

$M \geq 0 \Leftrightarrow \exists T \quad \mathrm{s.t.} \;\; TT^T = T^T T = I, T^T M T = \mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n], \lambda_i \geq 0, \forall i$

$M^{1/2} := T\ \mathrm{diag}\left[\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\right] T^T$ とおくと $M^{1/2} M^{1/2} = M$

これを M の平方根行列という. $M > 0$ ならば $M^{1/2} > 0.$

証明:

$(\Rightarrow)$ $\dfrac{d}{dt}[e^{A^Tt}Qe^{At}]$ を区間 $[0,\infty)$ で積分して $P=\displaystyle\int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}dt$ とおく

$$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{A^Tt}Qe^{At}\right)=A^Te^{A^Tt}Qe^{At}+e^{A^Tt}Qe^{At}A$$

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^Tt}Qe^{At}\right)dt$$

$$=\left[e^{A^Tt}Qe^{At}\right]_0^\infty=A^T\int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}dt+\int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}dt\,A$$

$\dot{x}(t)=Ax(t)$（の解）は安定 $\Longrightarrow$ $e^{At}\to 0,(t\to\infty)$

$P:=\int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}dt$ とおくと　$A^TP+PA=-Q$

$e^{At}\to 0$ のとき, 右辺の積分は収束する. （証明は割愛）

行列指数関数の性質として $e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau}$ が成り立つので,
$\tau = -t$ とおくと $e^{A0} = I = e^{At}e^{-At}$ ★

$$x^T P x = \int_0^\infty x^T e^{A^T t} Q e^{At} x \, dt$$

★より e^{At} は常に正則なので $x \neq 0 \leftrightarrow e^{At}x \neq 0$

$y = e^{At}x$ とおくと, $x^T P x = \int_0^\infty y^T Q y \, dt$ であり $x \neq 0 \leftrightarrow y \neq 0$

被積分関数は $x \neq 0$ のとき常に正 ➡ $x^T P x > 0, (x \neq 0)$ ➡ $P > 0$

一意性は別途示される.

一意性の証明

$A^T P + PA = -Q$ は P の要素に関する線形方程式である. 線形方程式$Mx = b$ の解が一意であるための必要十分条件は M が正則であることだから, $A^T P + PA = -Q$ を通常の $Mx = b$ の形式に書き直す必要がある.

A が安定であるとき, 対応する M が正則であることが示される.

例題:

$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$ の安定性をリアプノフ方程式を使って調べる.

$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ とする. P は2次の実対称行列なので $P=\begin{bmatrix}p & q\\ q & r\end{bmatrix}$

とおいて $A^TP+PA=-Q$ を解く. 得られた P が正定かどうかを固有値を求めて確かめる.