システム制御 II

第2学期 火 1, 2限 8:40-10:50
5号館 第16講義室

担当:平田 健太郎

7/2

第3回 状態方程式の解/伝達関数との関係

講義日程（予定）

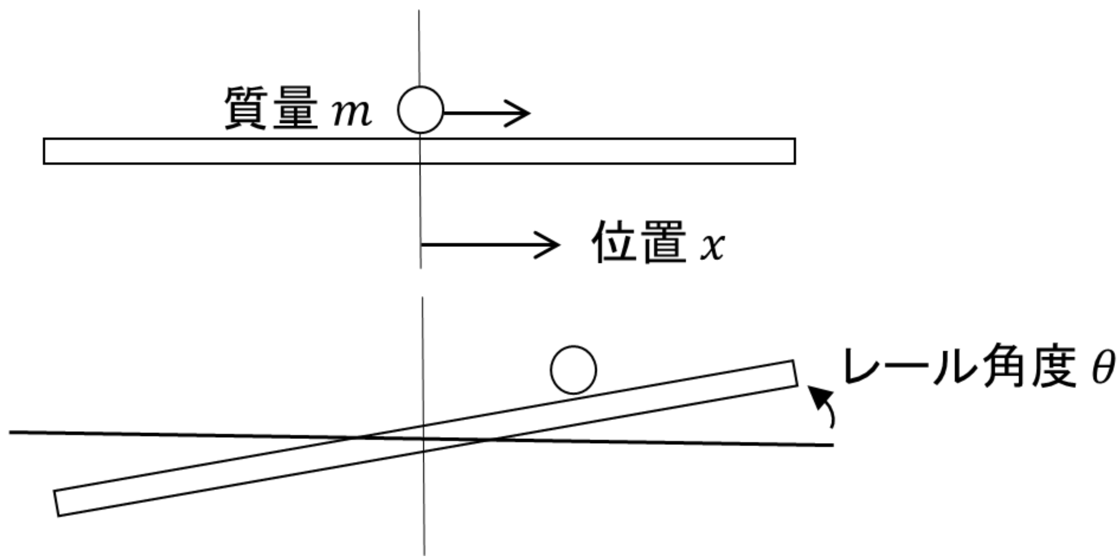
6/18　1回目 はじめに/古典制御の問題点
6/25　2回目 系のモデリングと状態方程式表現
7/2　3回目 状態方程式の解/伝達関数との関係
7/9　4回目 安定性と系の固有値，安定判別法
7/16　5回目 可制御性
7/23　6回目 可観測性
7/30　7回目 レギュレータ/オブザーバ
8/6　8回目 まとめ/期末試験

評価: 出席, レポート提出状況, 試験結果などから総合的に判定

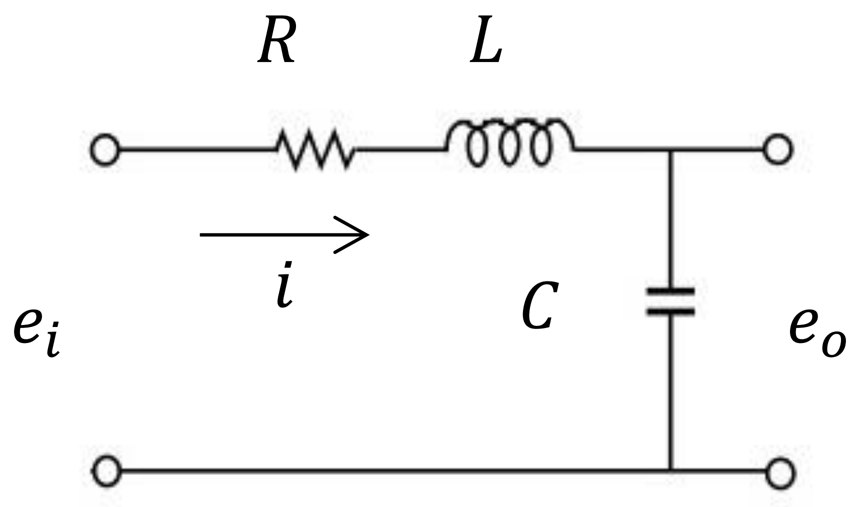
例題

1. 下図のような ball & beam のモデルを導出しよう. ボールの質量は m [kg], ビーム中心からの距離 x [m], 水平からのビームの傾斜角 θ [rad,] 重力加速度 g [N/kg] とする. ボールとビーム間の摩擦は無視できるとし, ボールの径も無視して質点とみなす.

傾斜角 θを微小として, 傾斜角 θ を入力 u, 距離 xを出力 y として状態空間表現を求めよ.



2.下図のRLC回路を考える．ただし，e_i：入力電圧 [V], i：電流 [A], e_o：コンデンサの端子電圧 [V], R: 抵抗[Ω], L: 自己インダクタンス[H], C: 静電容量[F]とする．e_i を入力 u, e_o を出力 y とするとき，系の状態空間表現を求めよ．



計算用ページ:

計算用ページ:

3. 状態方程式の解

スカラー系からの類推で考えてみる

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p$$

When $n = p = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + bu(t) \qquad x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$$

入力項のある線形定係数常微分方程式

「微分方程式」の知識から解ける

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t) \qquad x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$$

「微分方程式」の知識:

まず斉次形 $(= 0)$ の解を求める. ➡ 基本解

定数変化法から入力 $u(t)$ に対応する解を求める. ➡ 特殊解

演習問題1: 定数変化法で上の微分方程式を解け

一般解＝基本解＋特殊解　Why? (Linear)

計算用ページ:　$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t)$

一般解＝基本解＋特殊解　Why?（Linear)

$$D\big(x(t)\big) := \frac{d^n}{dt^n}x(t) + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t) + a_2\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}x(t) + \cdots + a_n x(t)$$

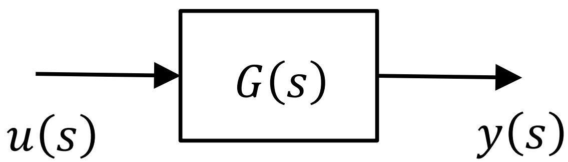
$$D\big(x_b(t)\big) = 0, \qquad D(x_s(t)) = f(t)$$

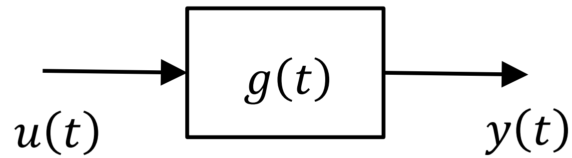
関数（作用素）$D(\cdot)$ が線形であるので $x_g(t) = x_b(t) + x_s(t)$ に対して

$$D\left(x_g(t)\right) = D\big(x_b(t) + x_s(t)\big) = D\big(x_b(t)\big) + D\big(x_s(t)\big) = f(t)$$

ここでも「線形性」が重要な役割を果たしている

古典制御:　伝達関数(初期値= 0)の入出力関係





周波数領域(ラプラス変換後)

時間領域

$$y(s) = G(s)u(s)$$

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

複素関数同士の(単純な)積

合成積

$$u(s) = \mathcal{L}[u(t)] \qquad y(s) = \mathcal{L}[y(t)] \qquad G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

$g(t)$: システムのインパルス応答

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

How to extend it to matrix case?

Extension of e^{at}

Matrix Exponential Function

多項式を行列の場合に拡張するのは比較的容易

$$f(s) = s^2 - (a+d)s + (ad - bc)$$

$$f(A) \coloneqq A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, I\text{: 単位行列}$$

ちなみに $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき, $f(A) = 0$. これをケーリー・ハミルトンの定理という.

確かめよ.

計算用ページ:

上の $f(s)$ は $f(s) = \begin{vmatrix} s-a & -b \\ -d & s-d \end{vmatrix} = |sI - A|$,

すなわち行列 A の特性方程式である．行列 A の固有値 λ は $f(\lambda) = 0$ を満たす．

行列 A が対角化できるとき　$T^{-1}AT = \Lambda,\ \ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$A = T\Lambda T^{-1}$ ➡ $A^k = (T\Lambda T^{-1})^k = T\Lambda^k T^{-1}$　　$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

$$= a_0 TT^{-1} + a_1 T\Lambda T^{-1} + a_2 T\Lambda^2 T^{-1} + \cdots + a_n T\Lambda^n T^{-1}$$

$$= T(a_0 I + a_1 \Lambda + \cdots + a_n \Lambda^n)T^{-1} = Tf(\Lambda)T^{-1}$$

【対角化（線形代数）】は重要！

$$f(A) = Tf(\Lambda)T^{-1} \qquad \varLambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$f(\Lambda) = a_0 I + a_1 \varLambda + \cdots + a_n \varLambda^n$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_n{\lambda_1}^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} = 0.$$

$\therefore f(s) = |sI - A|$ に対して $f(A) = 0.$

(必ずしも対角化可能である必要はない)

ケーリー・ハミルトンの定理の証明（対角化可能と仮定しない一般の場合）

$p(\lambda)=|\lambda I-A|$ とし, 行列 $\lambda I-A$ の余因子行列を $Q(\lambda)$ で表す. このとき

$$p(\lambda)I=Q(\lambda)(\lambda I-A)$$

が成り立つ.

$$p(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}p_k\lambda^k,\ Q(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}Q_k\lambda^k$$

とおく. ($Q(\lambda)$ の各成分は λ の $n-1$ 次以下の多項式なので.)

$$\sum_{k=0}^{n}p_k\lambda^kI=\sum_{k=0}^{n-1}Q_k\lambda^k\,(\lambda I-A)\ =\sum_{k=0}^{n-1}(Q_k\lambda^{k+1}-Q_kA\lambda^k)=\sum_{k=1}^{n}Q_{k-1}\lambda^k-\sum_{k=0}^{n-1}Q_kA\lambda^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \lambda^k I = \sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}\lambda^k - \sum_{k=0}^{n-1} Q_k A \lambda^k$$

における λ のべき乗の係数比較から

$$p_0 I = -Q_0 A$$

$$p_k I = Q_{k-1} - Q_k A \ \ (k = 1, \dots, n-1)$$

$$p_n I = Q_{n-1}$$

これより

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} p_k A^k = -Q_0 A + \sum_{k=1}^{n-1} (Q_{k-1} - Q_k A)\, A^k + Q_{n-1} A^n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Q_{k-1} A^k - \sum_{k=0}^{n-1} Q_k A^{k+1} = 0. \qquad \square$$

実にスマート！

指数関数 e^{at} を多項式のように表すには？

どうすればよいか

指数関数 e^{at} を多項式のように表すには？

Taylor Series Expansion（テーラー級数展開）

$$f(s) = f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(s-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(s-a)^2 + \cdots$$

マクローリン展開 ($a = 0$)

$$f(s) = f(0) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(0)s + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)s^2 + \cdots$$

$$f(M) = f(0)I + \frac{1}{1!}f^{(1)}(0)M + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)M^2 + \cdots$$

【テーラー展開（微分積分）】は重要！

指数関数の場合 ($f(s)=e^s$)　　$f^{(n)}(s)\Big|_{s=0} = e^s\Big|_{s=0} = 1$

$$e^M := I + \frac{1}{1!}M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \frac{1}{4!}M^4 \cdots$$

$$e^{At} := I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 \cdots$$ 行列指数関数

と定義するのが, 順当そうである.

無限個の和（無限級数）なので, 本当はこれが収束するか（意味を持つか）を調べる必要がある.（がここでは追求しない）

行列指数関数

$$e^{At} := I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 \cdots$$

ある種の条件を満たす級数（絶対収束）は, 項別に微積分してよい.

➡ 行列指数関数もOK

$$\frac{d}{dt}e^{At} = 0 + \frac{1}{1!}A + \frac{2}{2!}A^2t + \frac{3}{3!}A^3t^2 + \frac{4}{4!}A^4t^3 \cdots$$

$$= A + \frac{1}{1!}A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \frac{1}{3!}A^4t^3 \cdots$$

$$= A\left(I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 \cdots\right) = Ae^{At}$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

$\therefore\ x(t) = e^{At}x(0)$ は $\dot{x}(t) = Ax(t)$ を満たす.

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ の解は $x(t) = e^{At}x(0)$ で与えられる.

拡張

$\dot{x}(t) = ax(t)$ の解は $x(t) = e^{at}x(0)$ で与えられる.

$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t)$ の解は $x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$ で与えられる.

拡張

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ の解は…

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ の解は

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

となりそうである． 確かめよ！ （演習問題2）

（スカラーの場合と同様, 解の存在性・一意性からひとつ候補を見つけて
正しいことを示せばよい.）

$$x(t) = e^{At}x(0) + \underbrace{e^{At}}_{f(t)} \underbrace{\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau}_{g(t)}$$ と書くと分かりやすい.（積の微分）

行列指数関数 e^{At} の計算方法

- 定義式に従う

$$e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 \cdots$$

$\Rightarrow$ 手計算向きではない

- 対角化を利用する

- ラプラス変換を経由する

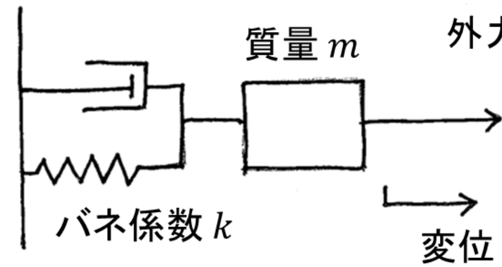
$$\dot{x}(t) = Ax(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0) = AX(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$$

$x(t) = e^{At}x(0)$ であるから $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

$(sI - A)^{-1}$ を（s の有理関数行列として）計算し，各要素を逆ラプラス変換する

例題:



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f$$

$$m = 1, d = 3, k = 2 \quad \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$(sI - A)^{-1}$ を（s の有理関数行列として）計算し, 各要素を逆ラプラス変換せよ.

計算用ページ:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$(sI - A)^{-1}$ を 計算し, 各要素を逆ラプラス変換して e^{At}を求めよ.

【復習】

ヘビサイドの展開定理:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \qquad D(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-s_i) \qquad s_i\neq s_j\ \ (i\neq j)$$ とする.

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{N(s_i)}{D'(s_i)}e^{s_i t}$$

$$D'(s)=\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{k\neq j}(s-s_k)\right) \qquad D'(s_i)=\prod_{k\neq i}(s_i-s_k)$$

$\sum_{j=1}^{n}$ 内で　$j\neq i$ のとき $\prod_{k\neq j}(s_i-s_k)$ は零. なぜなら (s_i-s_i) を因子に含むので.

$j=i$ のとき $\prod_{k\neq j}(s_i-s_k)$ は非零.

別解:　対角化を利用する

アウトライン

$$e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 \cdots$$

$A = T\Lambda T^{-1}$ とできたならば

$$e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots$$
$$= T\underline{\left(I + \frac{1}{1!}\Lambda t + \frac{1}{2!}\Lambda^2t^2 + \cdots\right)}T^{-1} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}T^{-1}$$

対角行列のべき乗も対角行列

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \Lambda^{\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

各対角要素は $e^{\lambda_k t}$ の
マクローリン展開になっている

計算用ページ:

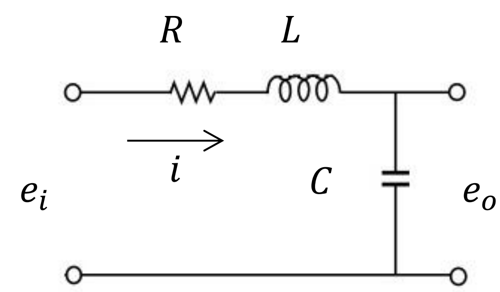
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求め, 対角化せよ.

その結果から e^{At} を求めよ.

計算用ページ:

レポート課題：

RLC回路の状態空間表現



$$\dot{z}=\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u=:Az+Bu$$

$$y=v_c=\frac{1}{C}z_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=:\tilde{C}z$$

$R=L=C=1$ とする.

状態ベクトルを $z=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}, z_1=\int i dt,\ z_2=i$ と定めた.

➡ 状態の選び方は一意ではない. $z':=\begin{bmatrix}z_1{}'\\ z_2\end{bmatrix}, z_1':=z_1-z_2$とすると

$$\frac{d}{dt}z'=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}z_1{}'\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{z}_1-\dot{z}_2\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\cdots$$

$$y=\frac{1}{C}z_1=\cdots$$

e^{At} を求めよ.