システム制御 II

第2学期 火 1, 2限 8:40-10:50
5号館 第16講義室

担当:平田 健太郎

6/25

2回目 系のモデリングと状態方程式表現

講義日程（予定）

6/18　1回目 はじめに/古典制御の問題点
6/25　2回目 系のモデリングと状態方程式表現
7/2　3回目 状態方程式の解/伝達関数との関係
7/9　4回目 安定性と系の固有値，安定判別法
7/16　5回目 可制御性
7/23　6回目 可観測性
7/30　7回目 レギュレータ/オブザーバ
8/6　8回目 まとめ/期末試験

評価: 出席, レポート提出状況, 試験結果などから総合的に判定

2. モデル

レール型倒立振子の運動方程式（非線形）

$$(m+M)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta + \mu_x\dot{x} = f \cdots \ (1)$$

$$m\ell\cos\theta\,\ddot{x} + \left(m\ell^2 + I_g\right)\ddot{\theta} + \mu_\theta\dot{\theta} - mg\ell\sin\theta = 0 \cdots \ (2)$$

$x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ は微小であるとして, 平衡点まわりで線形近似

$$\sin\theta \simeq \theta, \cos\theta \simeq 1, \dot{\theta}^2 \simeq 0$$ (線形制御理論を適用するため)

レール型倒立振子の線形化モデル

$$(m+M)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} + \mu_x\dot{x} = f$$

$$m\ell\,\ddot{x} + \left(m\ell^2 + I_g\right)\ddot{\theta} + \mu_\theta\dot{\theta} - mg\ell\theta = 0$$

古典制御では, 制御対象を表す微分方程式にラプラス変換を適用して伝達関数モデルを得る.

$$(m+M)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} + \mu_x \dot{x} = f$$

$$m\ell\,\ddot{x} + \left(m\ell^2 + I_g\right)\ddot{\theta} + \mu_\theta \dot{\theta} - mg\ell\theta = 0$$

$$\Big\downarrow \ \mathcal{L}$$

$$\{(m+M)s^2 + \mu_x s\}X(s) + m\ell s^2\Theta(s) \ = F(s)$$

$$m\ell s^2 X(s) + (4/3m\ell^2 s^2 + \mu_\theta s - mg\ell)\Theta(s) \ = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (m+M)s^2 + \mu_x s & m\ell s^2 \\ m\ell s^2 & 4/3m\ell^2 s^2 + \mu_\theta s - mg\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ \Theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=: \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ \Theta(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} g_{22}(s) & -g_{12}(s) \\ -g_{21}(s) & g_{11}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{g_{22}(s)}{\Delta(s)} \\ \dfrac{-g_{21}(s)}{\Delta(s)} \end{bmatrix} F(s) =: \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} F(s)$$

$$\Delta(s) = g_{11}(s)\, g_{22}(s) - g_{12}(s)\, g_{21}(s)$$

$$= \{(m+M)s^2 + \mu_x s\}(4/3 m\ell^2 s^2 + \mu_\theta s - mg\ell) - m^2\ell^2 s^4$$

$$=: s\underline{(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)}$$

$$a_0 = \frac{(m+4M)}{3} m\ell^2, a_1 = \frac{4}{3} m\ell^2 \mu_x + (m+M)\mu_\theta, a_2 = \mu_x \mu_\theta - m(m+M)g\ell,$$
$$a_3 = -mg\ell$$

下線部は $a_0, a_1 > 0, a_3 < 0$ (a_2は不定) より, 不安定多項式
(Routh-Hurwitz の安定判別法の必要条件！)

$\Delta(s) = 0$ は $s = 0$ および少なくともひとつの不安定根をもつ.

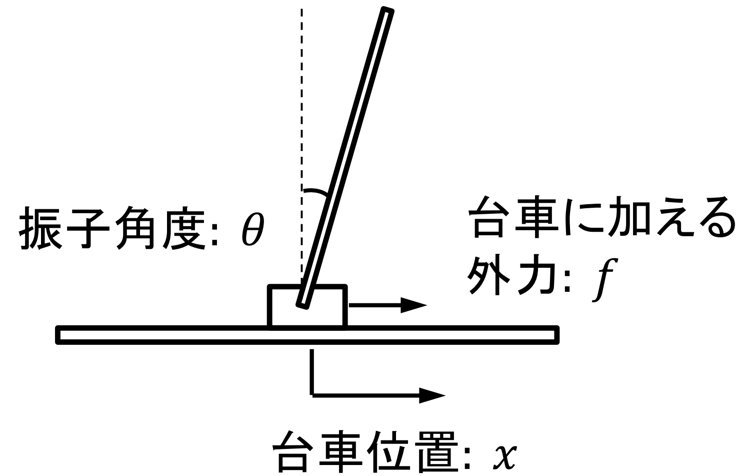
➡ $G_1(s), G_2(s)$ は不安定な伝達関数

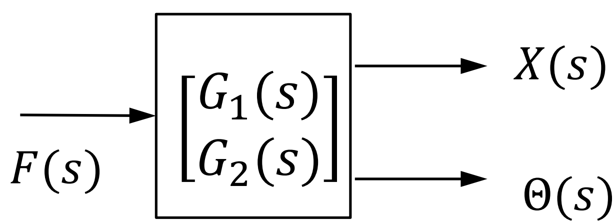
レール型倒立振子系の伝達関数モデル

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s), \mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(s),$$
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ \Theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} F(s)$$

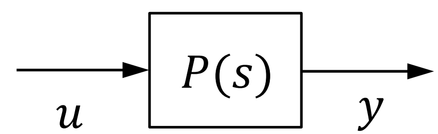
伝達関数行列





1入力2出力系

c.f.



1入力1出力系（u, y はスカラー）

レール型倒立振子の線形化モデル

$$(m+M)\ddot{x}+m\ell\ddot{\theta}+\mu_x\dot{x}=f$$

$$m\ell\,\ddot{x}+\left(m\ell^2+I_g\right)\ddot{\theta}+\mu_\theta\dot{\theta}-mg\ell\theta=0$$

現代制御では, $\ddot{x}=\frac{d}{dt}\dot{x},\ddot{\theta}=\frac{d}{dt}\dot{\theta}$ を用いて, $x,\dot{x},\theta,\dot{\theta}$ に関する連立一階微分方程式で表現する.

$$\begin{cases}(m+M)\dfrac{d}{dt}\dot{x}+m\ell\dfrac{d}{dt}\dot{\theta}+\mu_x\dot{x}=f\\ m\ell\dfrac{d}{dt}\dot{x}+\left(m\ell^2+I_g\right)\dfrac{d}{dt}\dot{\theta}+\mu_\theta\dot{\theta}-mg\ell\theta=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}m+M & m\ell\\ m\ell & \frac{4}{3}m\ell^2\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mu_x & 0 & 0\\ 0 & mg\ell & -\mu_\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \theta\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}f$$

$$\begin{bmatrix} m+M & m\ell \\ m\ell & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_x & 0 & 0 \\ 0 & mg\ell & -\mu_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{3}{m(m+4M)\ell^2} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & -m\ell \\ -m\ell & m+M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mu_x & 0 & 0 \\ 0 & mg\ell & -\mu_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \frac{3}{(m+4M)\ell} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\ell \\ -1 \end{bmatrix} f$$

$$:= \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \\ \tilde{a}_4 & \tilde{a}_5 & \tilde{a}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} f$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{a}_4 & \tilde{a}_5 & \tilde{a}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b}_1 \\ 0 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} f$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{a}_4 & \tilde{a}_5 & \tilde{a}_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b}_1 \\ 0 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} f$$

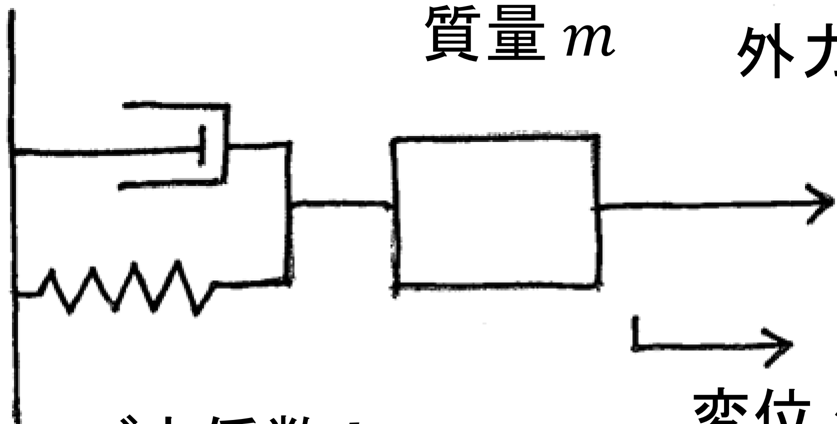
あらためて $x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{a}_4 & \tilde{a}_5 & \tilde{a}_6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b}_1 \\ 0 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix}$ とし,

制御入力 u, 出力 y をそれぞれ f, $\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$ とすれば

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & \text{状態方程式} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x =: Cx & \text{出力方程式} \end{cases}$$

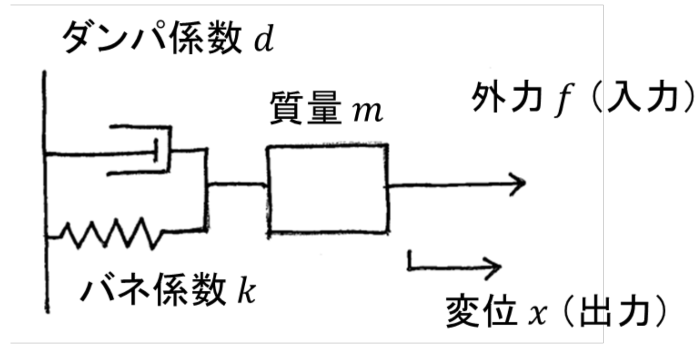
と書ける. これを状態空間表現という. (x を状態とよぶ.)

例2: マス･バネ･ダンパー系



状態方程式を導出せよ.

計算用ページ



$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = f$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\dot{x} = \ddot{x} = -\frac{d}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x + \frac{1}{m}f$$

自明な関係式 $\dfrac{d}{dt}x = \dot{x}$ と組み合わせると

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\dfrac{d}{m}\dot{x} - \dfrac{k}{m}x + \dfrac{1}{m}f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

例3: DC（直流）サーボモーター

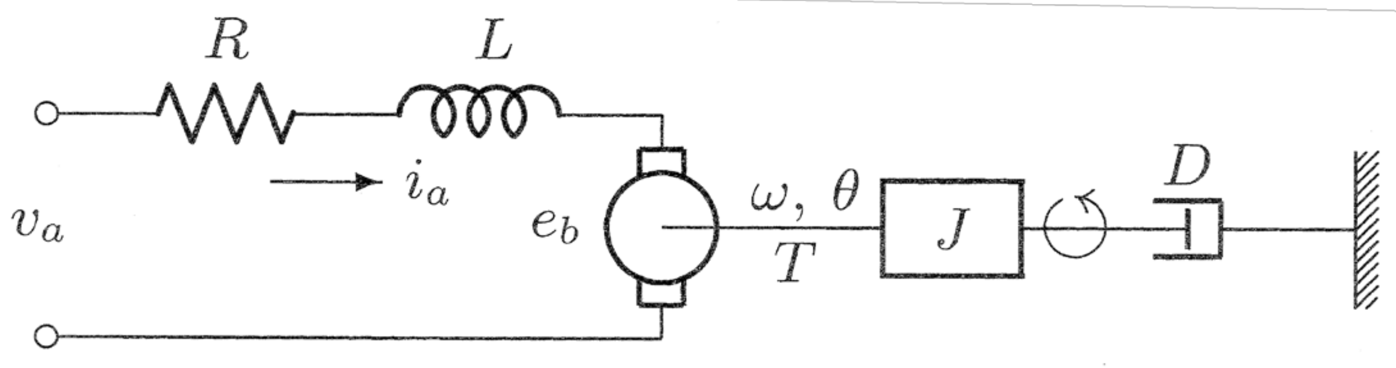


図 **3.13**　直流サーボモータ

J: 負荷を含めたモータの慣性モーメント, D: 粘性摩擦係数
T: トルク, θ: 回転角

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + D\frac{d\theta}{dt} = T$$

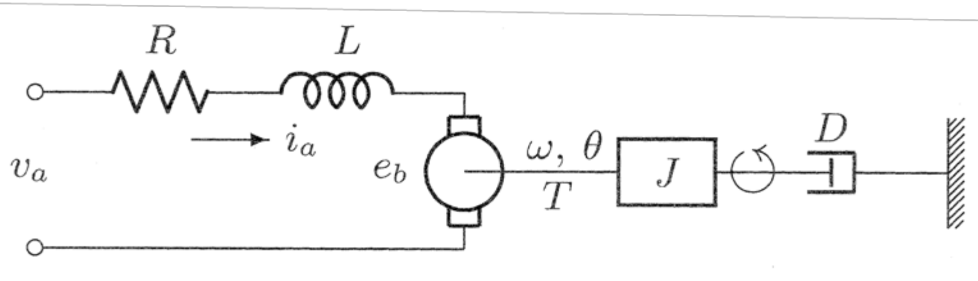


図 3.13　直流サーボモータ

i_a: 電機子電流, K_T: モーターのトルク係数

$$T = K_T i_a$$

e_b: 逆起電力, K_e: モーターの逆起電力係数, ω: 回転角速度

$$e_b = K_e \frac{d}{dt}\theta = K_e \omega$$

キルヒホッフの電圧法則

$$L\frac{di_a}{dt} + Ri_a + e_b = v_a$$

モータ印加電圧 v_a を入力, 回転角度 θ を出力とせよ.

計算用ページ

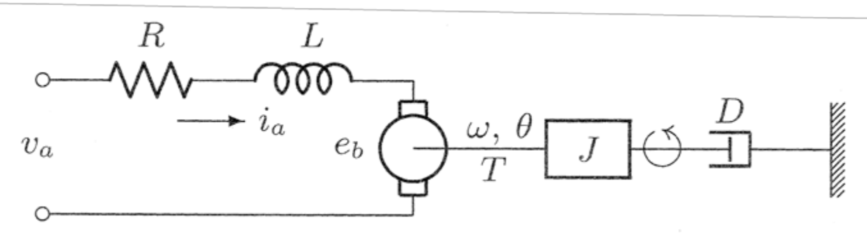


図 3.13 直流サーボモータ

$$\frac{d}{dt}\theta = \dot{\theta}$$

$$J\ddot{\theta} + D\dot{\theta} = T$$

$$T = K_T i_a$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\theta} = -\frac{D}{J}\dot{\theta} + \frac{K_T}{J} i_a$$

$$e_b = K_e\dot{\theta}$$

$$L\frac{di_a}{dt} + Ri_a + e_b = v_a$$

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R}{L} i_a - \frac{K_e}{L}\dot{\theta} + \frac{1}{L} v_a$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta} \\ i_a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/J & K_T/J \\ 0 & -K_e/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta} \\ i_a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ 1/L\end{bmatrix} v_a \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta} \\ i_a\end{bmatrix}$$

では微分方程式ではなく「伝達関数ありき」では？

$$y(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} u(s)$$

↓

$$y(s) = (b_1 s + b_2)\xi(s), \quad \xi(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} u(s)$$

↓ $\mathcal{L}^{-1}$

変数 ξ に関する連立１階微分方程式にする

$$y(s) = (b_1 s + b_2)\xi(s), \quad \xi(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} u(s)$$

$$\Big\downarrow \; \mathcal{L}^{-1}$$

$$y = b_1 \dot{\xi} + b_2 \xi, \quad \ddot{\xi} + a_1 \dot{\xi} + a_2 \xi = u$$

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \dot{\xi}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u}$$

$$y = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

一般形

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{状態方程式}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad \text{出力方程式}$$

x: 状態(ベクトル), u: 入力, y: 出力　　A, B, C, D: 係数行列

$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q$　　$x(0)$: 初期状態, 初期値

n: 状態の次元, p: 入力の次元, q: 出力の次元

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}, C \in \mathbb{R}^{q\times n}, D \in \mathbb{R}^{q\times p}$

これを状態空間表現 (State-Space representation) という.

ある伝達関数に対応する状態空間表現は一意か？

$$y(s)=\frac{b_1 s+b_2}{s^2+a_1 s+a_2}u(s)$$

$$\Big\downarrow \ \mathcal{L}^{-1}$$

$$y=b_1\,\dot{\xi}+b_2\,\xi,\quad \ddot{\xi}+a_1\,\dot{\xi}+a_2\xi=u$$

$$x_1=\ \xi,\quad x_2=\dot{\xi} \qquad\Longrightarrow\qquad x_2=\ \xi,\quad x_1=\dot{\xi}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathrm{u}$$

$$y=\begin{bmatrix}b_2 & b_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathrm{u}$$

$$y=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$y(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} u(s)$$

$\dot{x}_3 = a_3 x_3$ を加える.

入力 u の影響は受けないので，初期値が 0 であれば, 出力にも影響せず.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$\dot{x}_3 = a_3 x_3 + x_2$ を加える.

間接的に入力 u の影響を受けるが，$b_0 = 0$ であれば, 出力にその影響は現れない.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

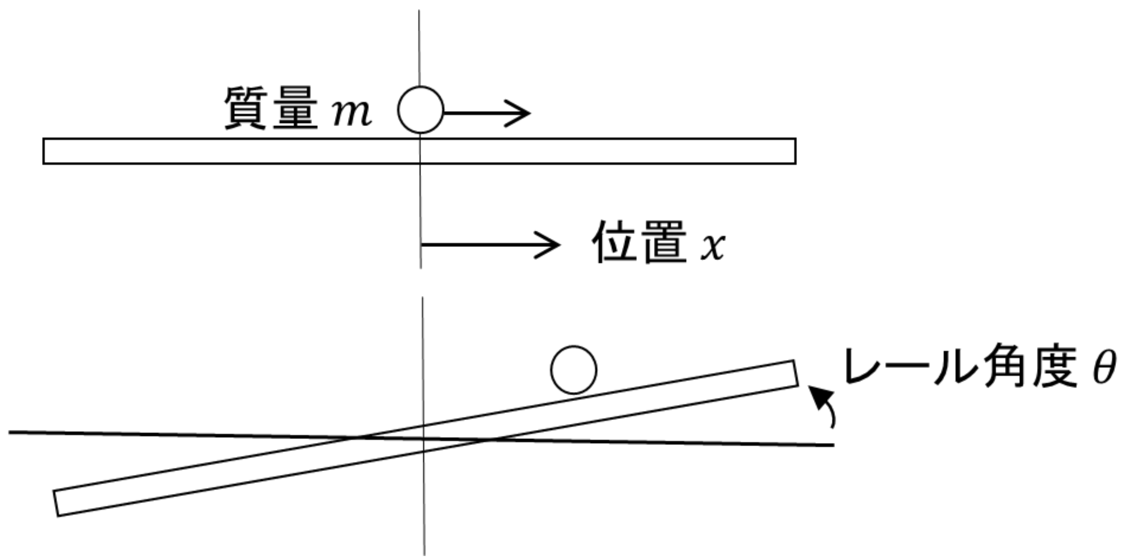
一意ではなさそう. どのようにに分類するか？

$\Rightarrow$ 可制御性・可観測性（次々回以降）

課題

1．下図のような ball & beam のモデルを導出しよう. ボールの質量は m [kg], ビーム中心からの距離 x [m], 水平からのビームの傾斜角 θ [rad,] 重力加速度 g [N/kg] とする. ボールとビーム間の摩擦は無視できるとし, ボールの径も無視して質点とみなす.

傾斜角 θ を微小として, 傾斜角 θ を入力 u, 距離 x を出力 y として状態空間表現を求めよ.



2.下図のRLC回路を考える．ただし，e_i：入力電圧 [V], i：電流 [A],
e_o：コンデンサの端子電圧 [V], R: 抵抗[Ω], L: 自己インダクタンス[H],
C: 静電容量[F]とする．e_i を入力 u, e_o を出力 y とするとき，系の
状態空間表現を求めよ.