システム制御 II

第2学期 火 1, 2限 8:40-10:50
5号館 第16講義室

担当：平田 健太郎

6/12

第１回 はじめに/古典制御の問題点

シラバス

概略:

制御理論は古典制御理論と現代制御理論に大別される．本講義では現代制御理論の基礎を理解するため，状態方程式，可制御･可観測性の概念，制御系の安定性，レギュレータ，状態オブザーバなどについて述べる.

一般目標:

状態空間に基づく制御系の解析・設計手法の基礎を修得する.

個別目標:

電気系や機械系システムの動特性をモデル化でき，状態方程式で表現できる. フィードバック制御系の特性(安定性，可制御・可観測性等)を判定できる. 状態フィードバックによる安定化を行うことができる.

受講要件:

1. 微分方程式を理解していること.

2. 線形代数を理解していること.

3. システム制御Ｉの内容を理解していること.

講義日程（予定）

6/18　1回目 はじめに/古典制御の問題点
6/25　2回目 系のモデリングと状態方程式表現
7/2　 3回目 状態方程式の解/伝達関数との関係
7/9　 4回目 安定性と系の固有値，安定判別法
7/16　5回目 可制御性
7/23　6回目 可観測性
7/30　7回目 レギュレータ/オブザーバ
8/6　 8回目 まとめ/期末試験

評価方法: 出席状況, レポート提出状況, 試験結果などから総合的に判定する.

1. はじめに

位置づけ:　システム制御Ⅰ → 古典制御理論
　　　　　システム制御Ⅱ → 現代制御理論

歴史的背景:

古典制御は18世紀後半の産業革命に起源をもつ. Wattの蒸気機関のための遠心調速機 (Centrifugal Governor) についてのMaxwellの論文 (On Governors,1868) が嚆矢とされている.

現代制御は, 1960年初頭の Kalman による状態空間表現の導入によって始まった.

両者の違いはモデルの表現方法にある.

古典制御

伝達関数

↑ ラプラス変換

複素関数論
（微分積分, ベクトル・複素解析）

現代制御

状態方程式

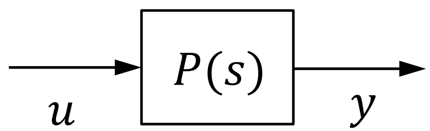
↑ ベクトル, 行列

線形代数

古典制御のReview:

「現代制御理論」導入の動機のひとつは, (とくに設計論における) 多入出力系の取り扱いを容易にすることであるといえる.「システム制御Ｉ」の講義では, 設計論が十分に説明できていないので補足する.

制御対象



Ex. $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(2s+1)}$

u, y はスカラー（1入力1出力系）

フィードバックは何のため？

ラプラス変換の最終値定理:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)], \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

（ラプラス変換の定義式）

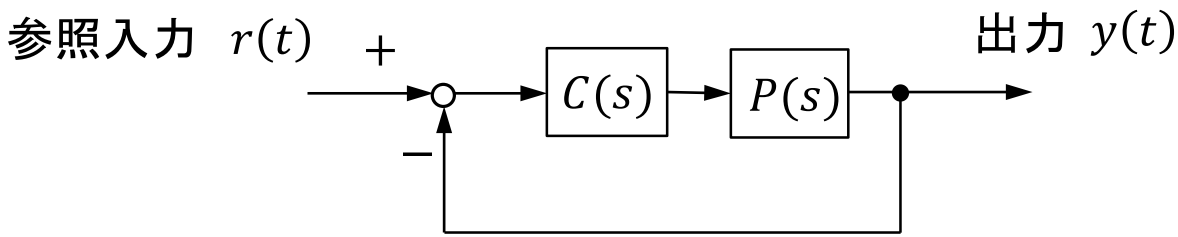
$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

（導関数のラプラス変換公式）

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)dt = f(\infty) - f(0)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

例題1 :

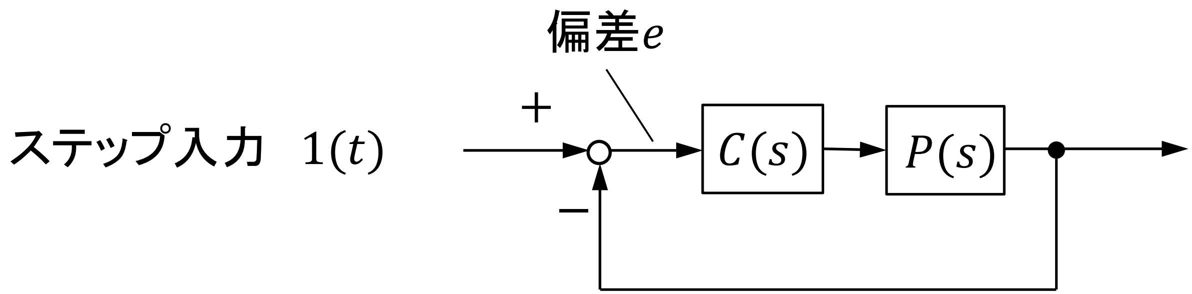


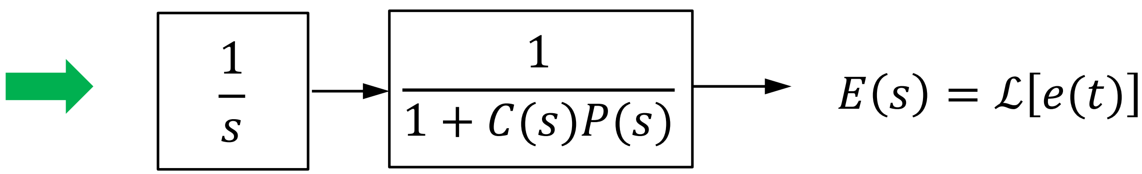
$P(s) = \dfrac{1}{s+1}, C(s) = K$ とする.

参照入力としてステップ信号を与える. $r(t) = 1(t)$
無限時間経過したときの, 偏差 $e(t) = r(t) - y(t)$ を求めよ.

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

定常特性: 特定の参照入力に対する,無限時刻経過後の偏差





最終値定理より

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+C(s)P(s)}\frac{1}{s}$$

ステップ信号に定常偏差なく追従できる $(e(t)\to 0, t\to\infty)$ ためには
制御器が制御対象が $s\to 0$ のとき発散する必要がある.

ステップ信号に定常偏差なく追従できる $(e(t) \to 0, t \to \infty)$ ためには
制御器か制御対象が $s \to 0$ のとき発散する必要がある.

$|C(s)| \to \infty, s \to 0$ であるとき, $C(s)$ は $s = 0$ を極に持たなければならない.

ステップ信号に追従するには $C(s)$ は $1/s$ を因子に含む必要がある.

➡ 内部モデル原理（ランプ等でも同様）

$P(s)$ が原点に極を持たないとき, 比例制御 $C(s) = K$ では定常偏差は
零にならない.

比例制御 $C(s) = K$ のとき

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+KP(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1+KP(0)}$$

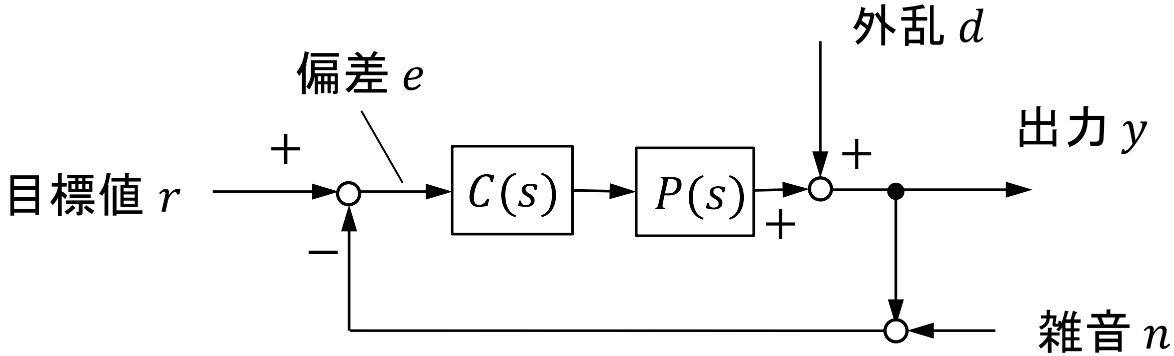
ゲイン K を大きくすると定常偏差は小さくなる.

$$S(s) \coloneqq \frac{1}{1+C(s)P(s)}$$ を閉ループ系の感度関数という.

$E(s) = S(s)R(s)$, $E(s)$: 偏差, $R(s)$: 参照入力

制御器のゲインを大きくすると感度関数の絶対値は小さくなる.

高ゲイン化 ➡ 低感度化 ➡ 定常特性の改善



$e = r - y, \quad y = PCe \ (n = d = 0)$ ➡ $e = \dfrac{1}{1+PC} r$ 感度関数

$y = PCe + d, \quad e = -y \ (r = n = 0)$ ➡ $y = \dfrac{1}{1+PC} d$

高ゲイン化 ➡ 低感度化 ➡ 外乱の影響の抑制

フィードバックは何のため？

安定化のため　　　　低感度化のため

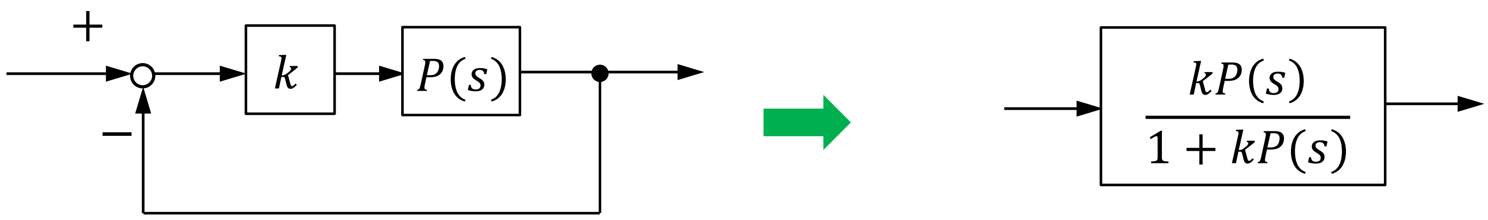
ゲインはなるだけ大きくしたい.

例1) 根軌跡法によるゲイン調節

根軌跡とは, スカラーゲインによるフィードバック補償をした時の閉ループ極の位置を, ゲインをパラメータとして複素平面上に媒介変数表示したもの.

特性方程式の根に関する代数的, 幾何学的性質を駆使する.

Q. 根軌跡について知っていることを述べよ.



フィードバック系　　　　閉ループ伝達関数

閉ループ極：

閉ループ伝達関数の分母多項式の零点 ⇔ $1 + kP(s) = 0$ となる s

$P(s) = -\frac{1}{k}$ であるから

$k \to 0$ のとき, $P(s) \to \infty$ となるので s は $P(s)$ の極

$k \to +\infty$ のとき, $P(s) \to 0$ となるので s は $P(s)$ の零点

（$P(s)$が厳密にプロパーなら無限遠点を含む）

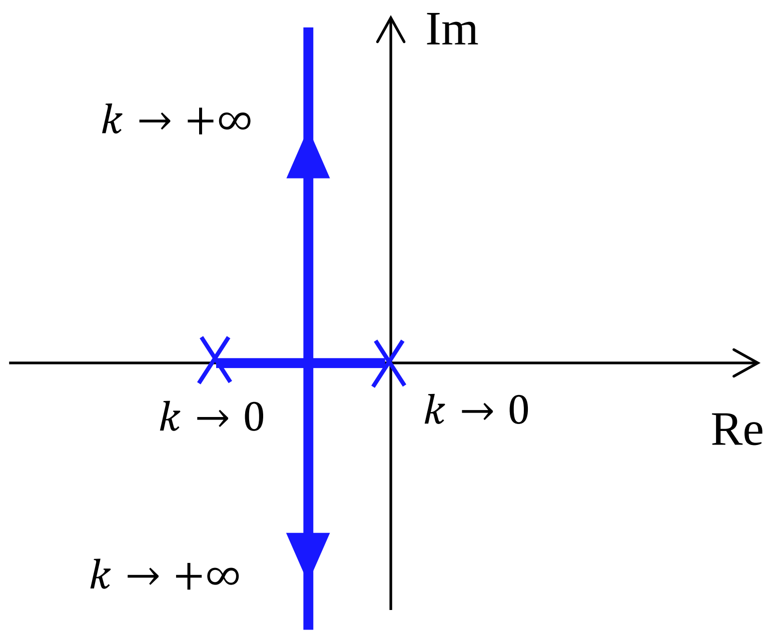
代数的, 幾何学的性質のひとつ

$P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ の根軌跡

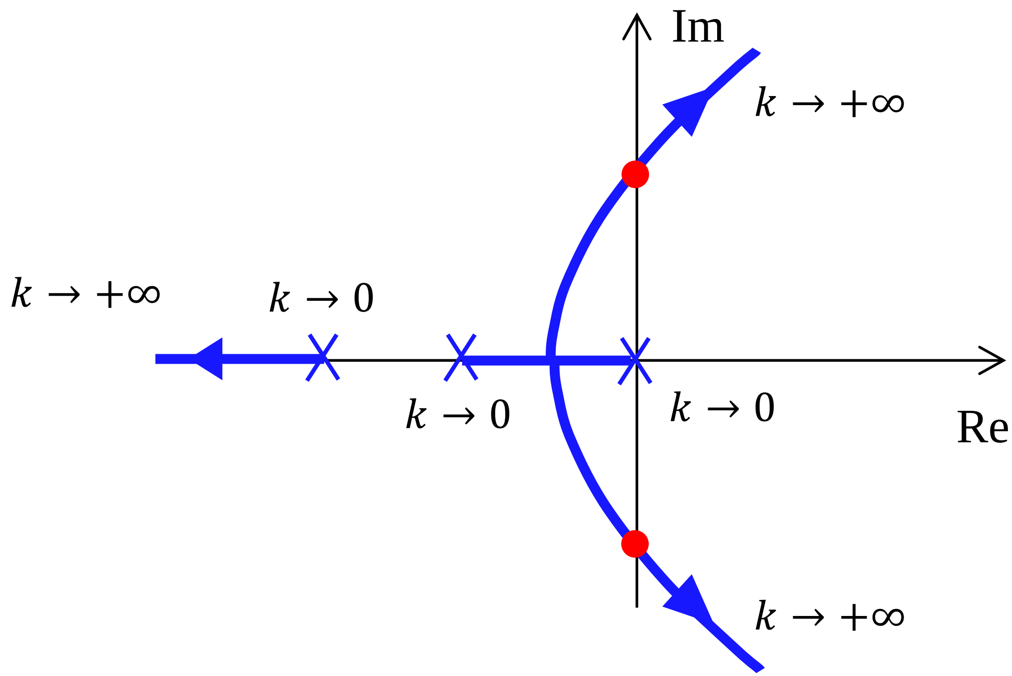
$$1 + kP(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s(s+1) + k = s^2 + s + k = 0$$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$$

$0 < k < 4$: 2つの実根　　$k = 4$: 重根　　$4 < k$: 複素共役根



$P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(2s+1)}$ の根軌跡



$P(s)$ の極 $s = 0, -1, -1/2$
から始まり, $P(s)$の無限遠零点
($-\pi, \pm\pi/3$ のバターワース
パターン)に向かう.

一般にゲインが高いほど, 定常偏差特性などは良好になるが
安定限界(根が右半平面にちょうど入る)を越えてはならない.

赤丸の根に対応するゲイン？ ⇒ Routh-Hurwitzの安定判別法

$$1 + kP(s) = 0$$

$$s(s+1)(2s+1) + k = 0$$

$$\underbrace{2}_{a_0}s^3 + \underbrace{3}_{a_1}s^2 + \underbrace{1}_{a_2}s + \underbrace{k}_{a_3} = 0$$

フルビッツ行列

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & k & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & k \end{bmatrix}$$

フルビッツ行列式（3次までの主座小行列式）が全て正 ⇔ 多項式は安定

例題2： 安定なゲインの範囲を求めよ

$$1 + kP(s) = 0$$

$$s(s+1)(2s+1) + k = 0$$

$$\underbrace{2}_{a_0}s^3 + \underbrace{3}_{a_1}s^2 + \underbrace{1}_{a_2}s + \underbrace{k}_{a_3} = 0$$

フルビッツ行列

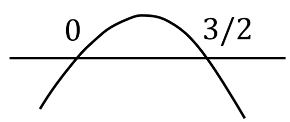
$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & k & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & k \end{bmatrix}$$

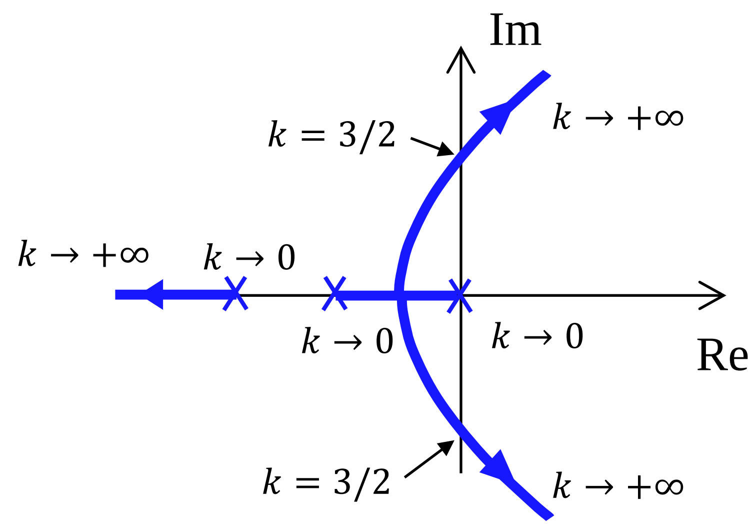
フルビッツ行列式（3次までの主座小行列式）
が全て正 ⇔ 多項式は安定

$$\Delta_1 = 3 > 0 \ \rightarrow \ \text{自明}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2k > 0, \ \rightarrow \ k < 3/2$$

$$\Delta_3 = k\Delta_2 = k(3-2k) > 0 \ \rightarrow \ 0 < k < 3/2$$





∴ kが0や3/2に近いと閉ループ極が虚軸に近づきすぎる

→ 中庸の選択がよい

根軌跡法は, スカラーパラメータであるゲインの変化に対して
閉ループ極の位置が連続的に変化する性質をうまく利用している.

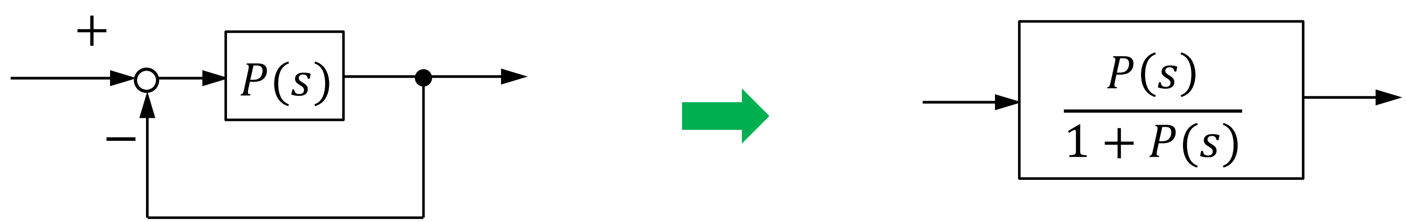
ゲインがスカラーパラメータであるのは, 制御対象がスカラー
伝達関数(1入力1出力系, Single Input Single Output System,
SISO) であることの帰結である.

Q. ナイキスト線図について知っていることを述べよ.

例2) ナイキスト線図から求まるゲイン余裕に基づく調節

ナイキスト線図とは, 開ループ伝達関数 $P(s)$ に対して, $s = j\omega$ とし, ω を$-\infty$ から $+\infty$ まで変化させたときの値 $P(j\omega)$ を複素平面上にプロットしたもの.

ナイキストの安定定理から, ナイキスト線図が点 $-1 + j0$ を周回する数によって, この伝達関数に単一負フィードバックを施した場合の閉ループ安定性が分かる.

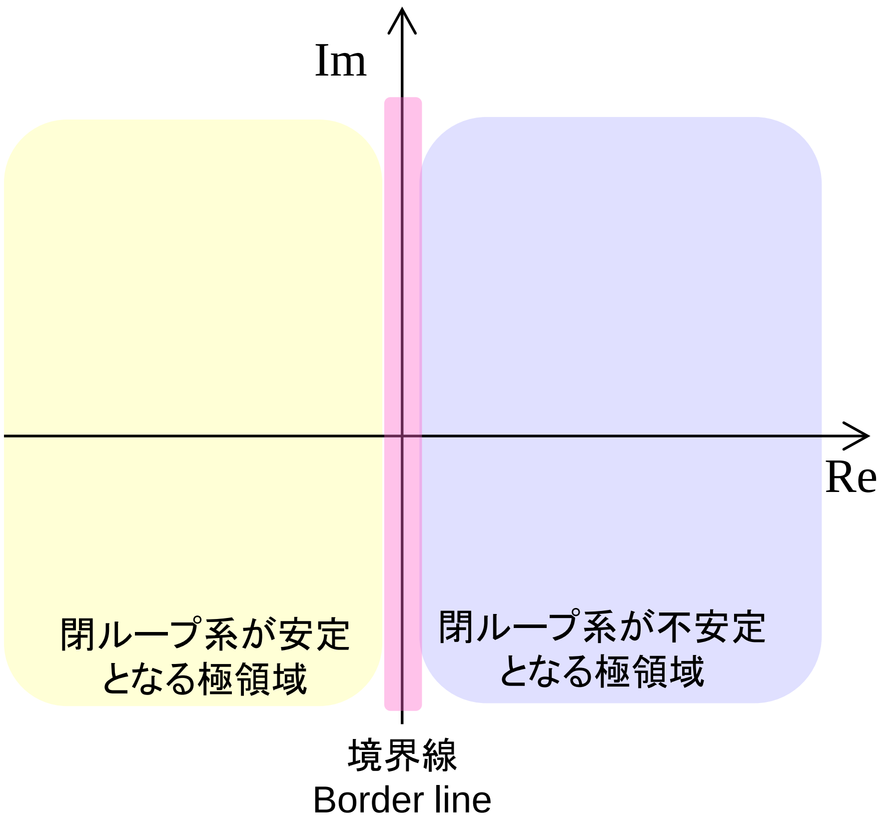


単一負フィードバック系
(negative unity feedback system)

閉ループ伝達関数

Q. ナイキスト線図が点 $-1+j0$ を通過するとき, 閉ループ系は安定限界である. なぜか？

「ナイキスト線図が点 $-1+j0$ を周回する数が変化すると, 閉ループ安定性に変化が生じる」ことの直感的な説明



閉ループ極は $1+P(s)=0$ の根

安定 ⇔ 不安定が切り替わるとき, 根のひとつは虚軸上にある

⬇

$1+P(j\omega)=0$ となる $\omega\in\mathbb{R}$ が存在

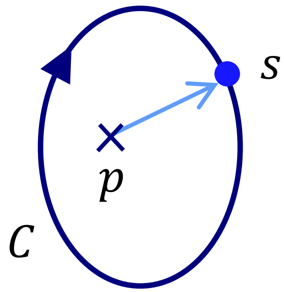
⬍

ナイキスト線図が点 $-1+j0$ 上を通過

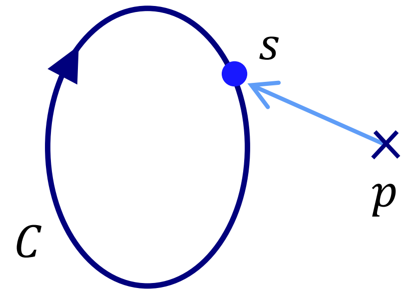
5分で分かる

ナイキストの安定定理

複素数 s が閉路 C 上を時計回りに周回するとき, ベクトル $s-p$ の偏角の正味の増加量



こちらでは -2π



こちらでは 0

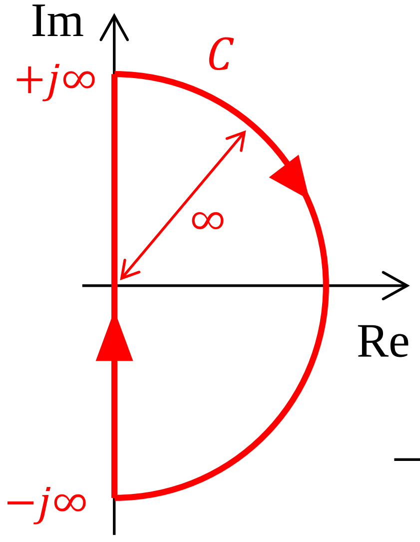
$\therefore$ pがC内に含まれるか否かで $s-p$ の偏角の正味の増加量が変わる.

↓

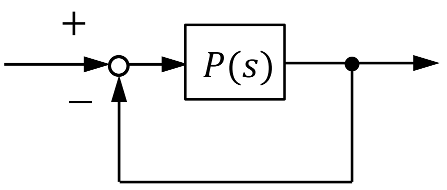
$s-p$ の軌跡を複素平面にプロットした時の原点まわりの周回数

$$\angle P(s) = \sum_i \angle(s-z_i) - \sum_k \angle(s-p_k)$$

$P(s)$の軌跡は原点まわりの時計方向に
{(C内の零点の数) − (C内の極の数)}回だけ, 周回する.　**偏角原理**



とすれば, $P(s)$ の右半平面内の零点と極の数の差が分かる.



特性方程式 $1 + P(s) = 0$

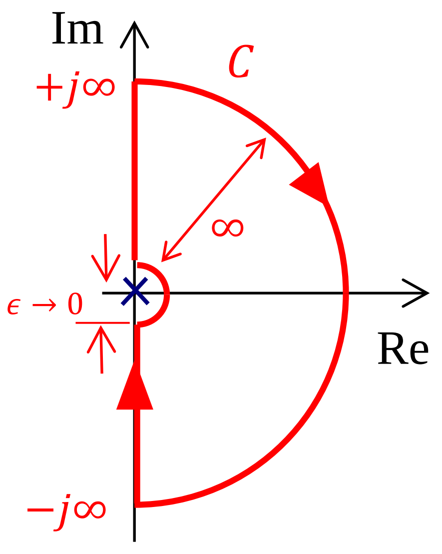
$1 + P(s)$ の右半平面内零点：　不安定閉ループ極

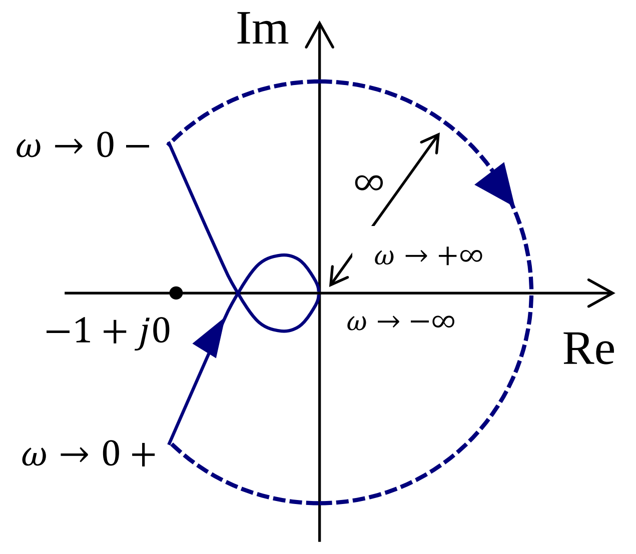
$1 + P(s)$ の右半平面内極：　不安定開ループ極（既知）

$1 + P(s)$ の軌跡の原点まわりの周回数 $=$ $P(s)$ の軌跡の $-1 + j0$ まわりの周回数

不安定閉ループ極の数が分かる. (0 なら安定)

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(2s+1)}$$ のナイキスト線図





発散を防ぐため原点極は回避してCをとる.

原点極を左に見て, C 内に含まないので
開ループ不安定極の数は 0

⬇

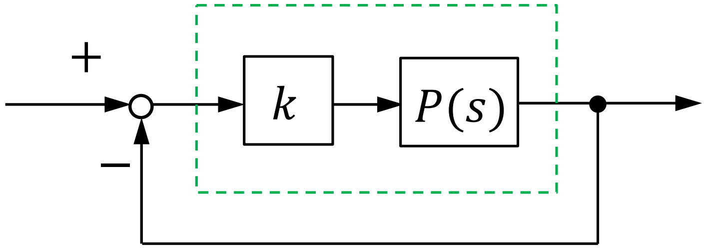
安定条件はナイキスト線図が$-1+j0$
を一度も巻かないこと

⬇

ナイキスト線図は $-1+j0$ を周回していない

⬇

$P(s)$からなる単一負フィードバック系は安定

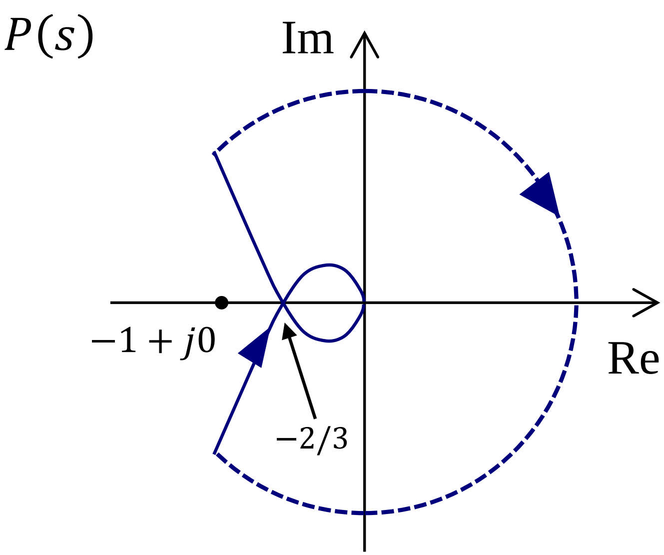


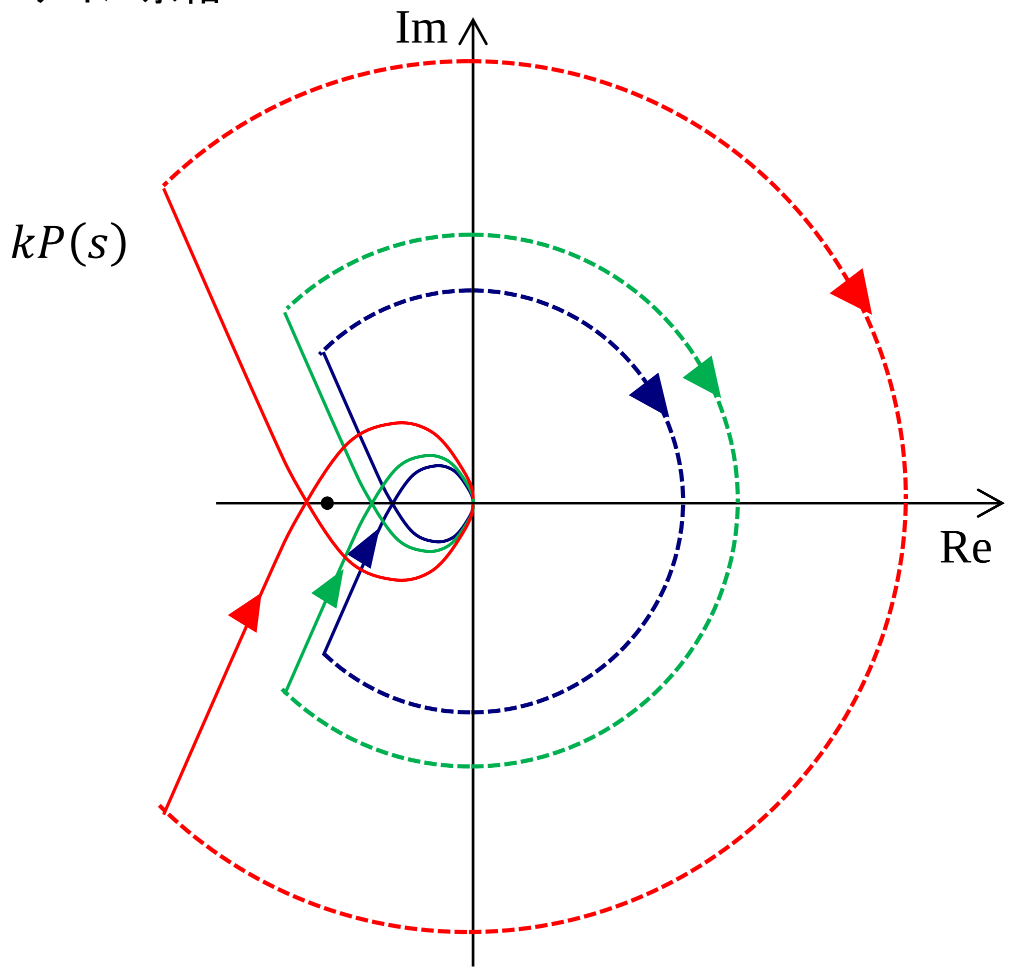
ゲイン補償を挿入した場合には開ループ伝達関数が $P(s) \to kP(s)$ となったと見なせる

$P(s) \to kP(s)$ となるとき, ナイキスト線図は原点まわりに拡大される.

どこまで拡大しても周回数は不変か？⇒ゲイン余裕

どこまで拡大しても周回数は不変か？⇒ゲイン余裕





この場合は3/2倍以上だと周回数が変化
⇒ 安定なゲインの範囲は $0 < k < 3/2$

ナイキスト線図からゲイン余裕を求める手順は, スカラーパラメータであるゲインの変化が, ナイキスト線図の拡大・縮小に対応するという性質をうまく利用している.

ここでもやはり, ゲインがスカラーパラメータであること, すなわち制御対象がSISO系であることが重要である.

Q. ボーデ線図について知っていることを述べよ.

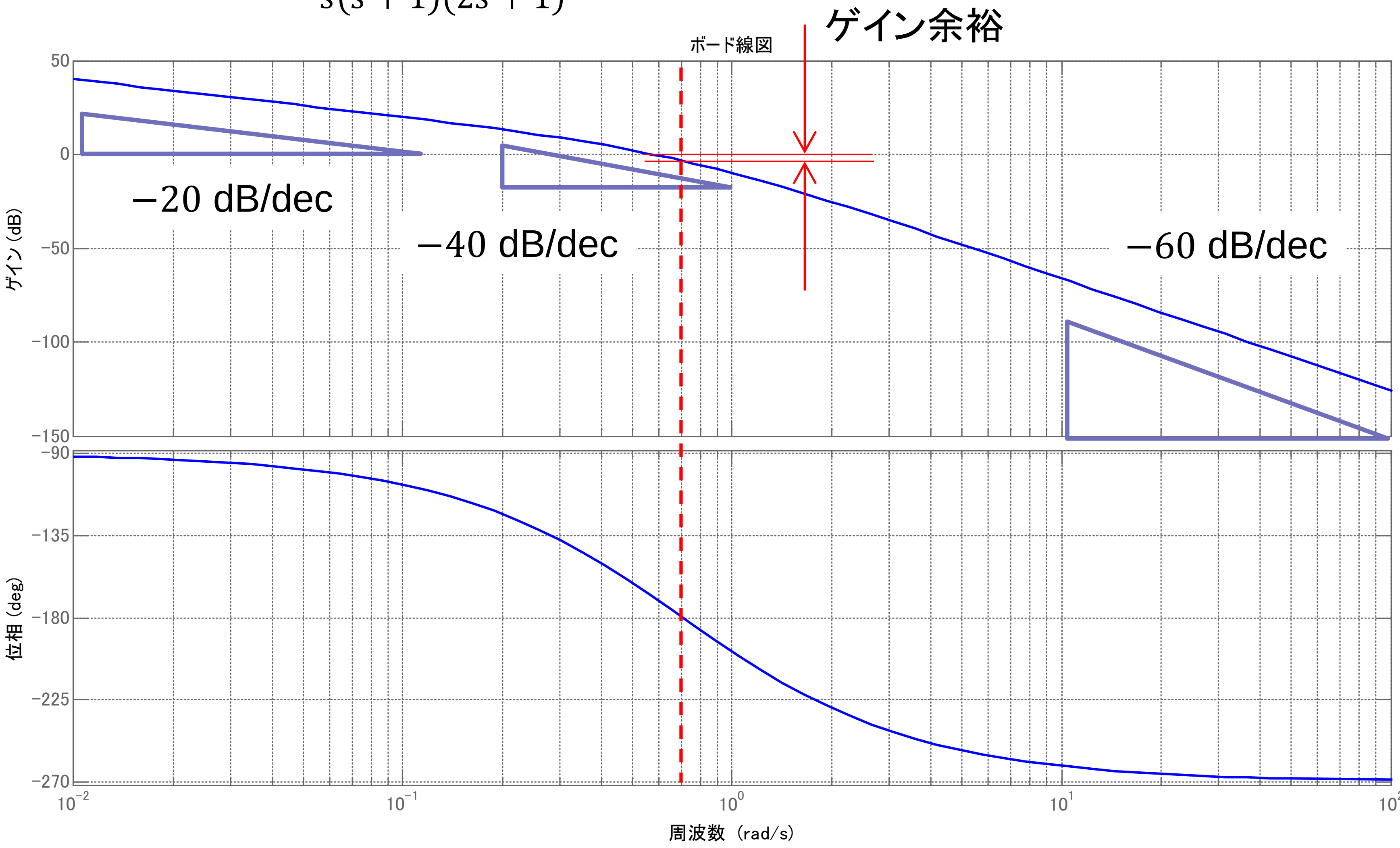
例3) ボーデ線図を用いた周波数整形

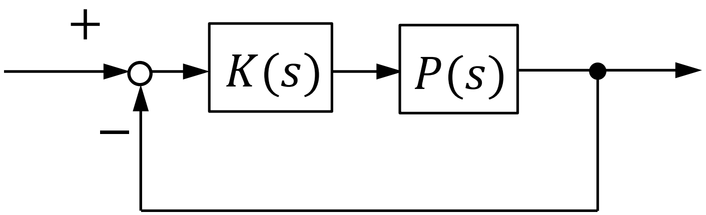
ボーデ線図は, 開ループ伝達関数 $P(s)$ に対して, $s = j\omega$ とし, ω を$-\infty$ から $+\infty$ まで変化させたときのゲイン $|P(j\omega)|$ と位相$\angle P(j\omega)$をそれぞれ横軸を周波数ω としたグラフにプロットしたものである.

（ナイキスト線図上の点の絶対値, 偏角を対周波数軸で表示したもの）

安定条件が「ナイキスト線図が$-1 + j0$ を一度も巻かないこと」であれば, この条件は「位相が $-\pi$ のときにゲインが 1 を越えないこと」と同一であり, ボーデ線図においてゲインが 1 (0 [dB]) となる周波数（交叉周波数）における位相遅れの量によって判定できる.

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(2s+1)}$$





前置補償器によるフィードバック制御

ゲインはデシベル表示なので

$$20\log_{10}|KP(j\omega)| = 20\log_{10}|K(j\omega)| + 20\log_{10}|P(j\omega)|$$

位相は

$$\angle KP(j\omega) = \angle K(j\omega) + \angle P(j\omega)$$

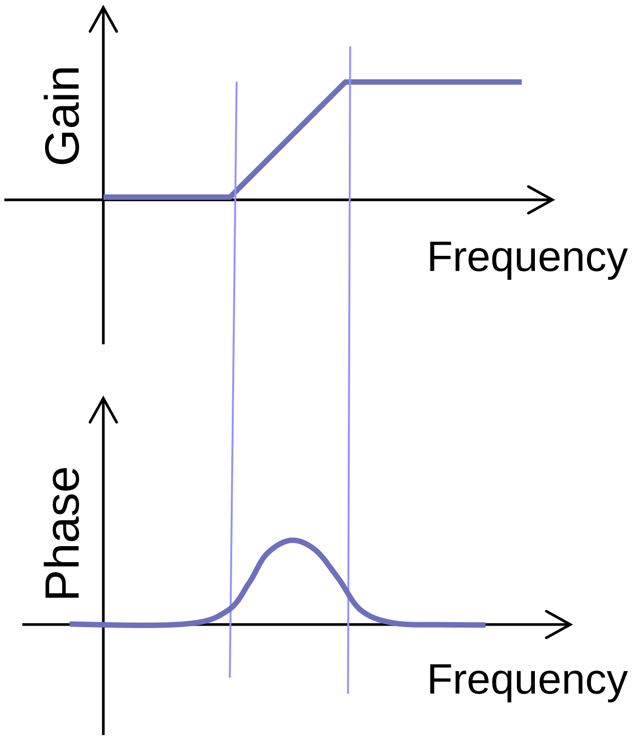
よって補償器を直列に結合した時, 一巡伝達関数のボーデ線図は
元の伝達関数 $P(s)$ のボーデ線図に $K(s)$ を足したものになる.

⬇

各周波数帯ごとのゲイン・位相の調整を視覚的に
容易に行うことができる.
(単なるゲイン補償よりは自由度が大きい)

位相進み補償

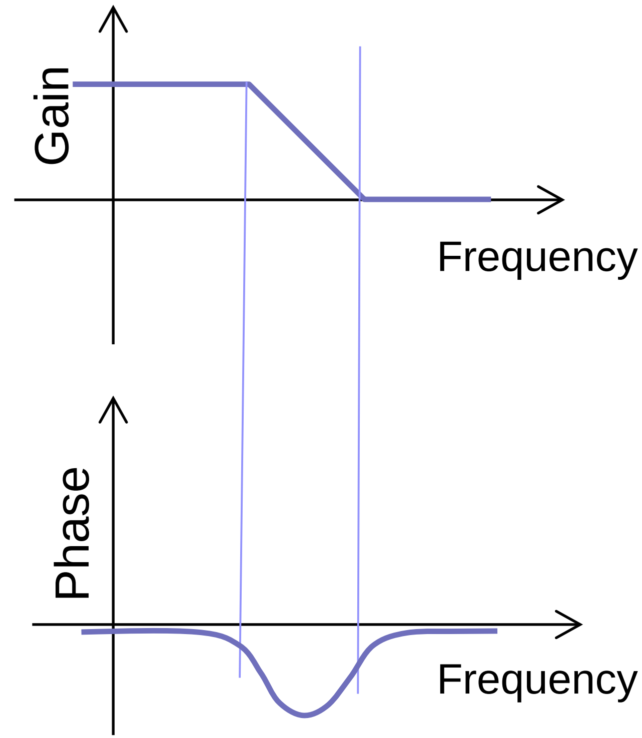
$$K(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1} \qquad T_1 < T_2$$



高周波ゲインは若干高くなるが，
中間帯域での位相遅れを改善できる

位相遅れ補償

$$K(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1} \qquad T_1 > T_2$$



位相遅れを伴うが，低周波ゲインのみを
選択的に高くできる．

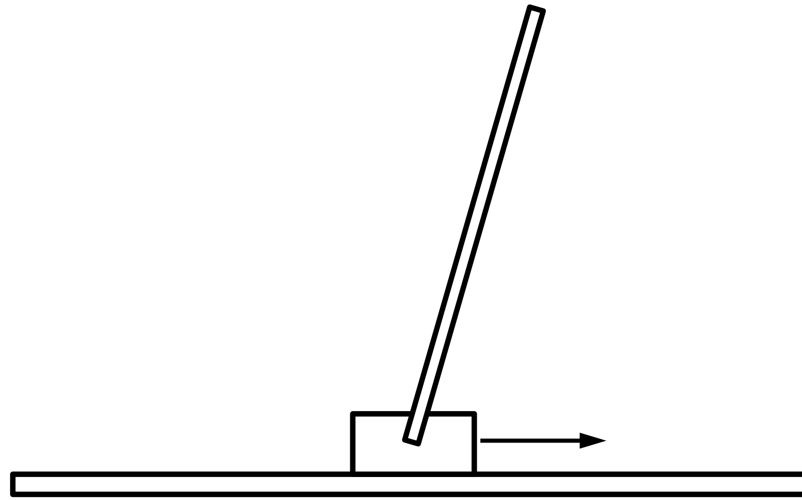
PID補償

$$K(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

ボーデ線図を用いた精密な周波数整形が可能なのは, ゲインと位相によって安定性が完全に記述できる(必要十分条件になっている)というスカラー伝達関数の性質による.

多変数系においてはゲインは定義できるが, 位相が定義できないため, 周波数領域での安定条件は一般に十分条件になる（スモールゲイン定理など）. これが, 構造化特異値による μ 解析などのロバスト制御の研究の動機になっている.

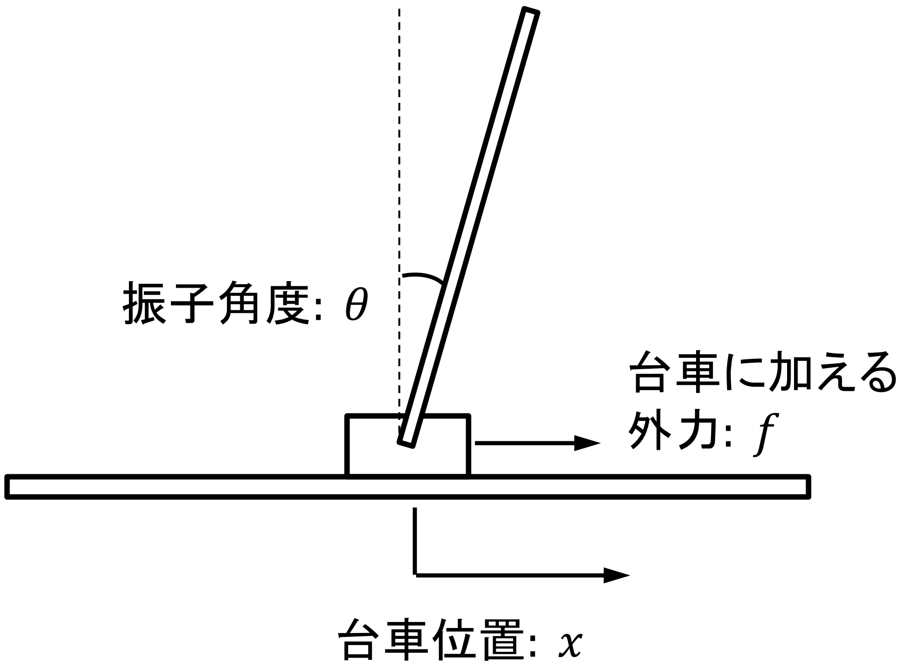
2. モデル



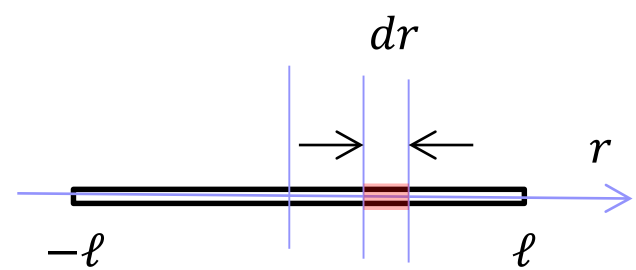
代表的な不安定制御対象である
レール型倒立振子は, 出力として
振子角度と台車位置をもつ.

SIMO (SISOでない)

古典制御では扱いづらい例と
して採用しよう.



振子は均質な棒とする.
振子の質量: m, 長さ: 2ℓ
振子の質量: M
レール・台車間と回転軸における粘性摩擦係数: μ_x, μ_θ



振子の重心は長手方向の距離中心

振子の重心まわりの慣性モーメント

$$I_g = \int_{-\ell}^{\ell} \rho r^2 dr \int_{-\ell}^{\ell} \frac{m}{2\ell} r^2 dr = \frac{1}{3} m\ell^2$$

ρ: 密度

台車がレール中央にあるときの回転軸位置を原点に,
レール方向をx軸, 鉛直上方をy軸にとる.

ラグランジュ法により運動方程式を求める.

➡ 系全体の運動エネルギー, ポテンシャルエネルギー, 損失エネルギーが必要.

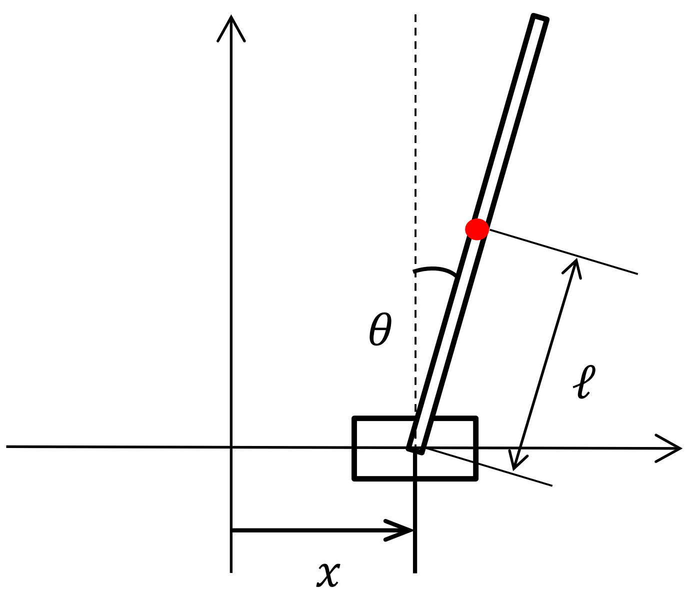
運動エネルギー $T = T_{ct} + T_{pt} + T_{pr}$

T_{ct}: 台車の並進運動エネルギー　$T_{ct} = 1/2M\dot{x}^2$
T_{pt}: 振子重心の並進運動エネルギー $T_{pt} = 1/2mv^2$, v: 振子重心の速さ
T_{pr}: 振子の重心まわりの回転運動エネルギー　$T_{pr} = 1/2I_g\dot{\theta}^2$

振子の重心位置　(x_g, y_g)

$$x_g = x + \ell\sin\theta, y_g = \ell\cos\theta$$

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 \\ &= \left(\dot{x} + \ell\,\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(-\ell\,\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 \\ &= \dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \ell^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$



$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I_g\dot{\theta}^2$$

$$U = mg\ell\cos\theta$$

$$D = \frac{1}{2}\mu_x\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\mu_\theta\dot{\theta}^2$$

一般化座標 $(q_1, q_2) = (x, \theta)$,　　一般化力 $(\tau_1, \tau_2) = (f, 0)$

ラグランジュの運動方程式:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}T\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}T + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}D + \frac{\partial}{\partial q_i}U = \tau_i, \qquad i = 1, \cdots, n$$

$i = 1$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}T\right) = \frac{d}{dt}\left(M\dot{x} + m\dot{x} + m\ell\dot{\theta}\cos\theta\right) = (m+M)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial x}T = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial \dot{x}}D = \mu_x\dot{x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}U = 0$$

$$\boxed{(m+M)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta + \mu_x\dot{x} = f \cdots \ (1)}$$

$i = 2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}T\right) = \frac{d}{dt}\left(m\ell\dot{x}\cos\theta + m\ell^2\dot{\theta} + I_g\dot{\theta}\right)$$

$$= -m\ell\dot{x}\,\dot{\theta}\sin\theta + m\ell\ddot{x}\cos\theta + \left(m\ell^2 + I_g\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}T = -m\ell\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \qquad \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}D = \mu_\theta\dot{\theta} \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}U = -mg\ell\sin\theta$$

$$\boxed{m\ell\cos\theta\,\ddot{x} + \left(m\ell^2 + I_g\right)\ddot{\theta} + \mu_\theta\dot{\theta} - mg\ell\sin\theta = 0 \cdots \ (2)}$$

レール型倒立振子の運動方程式（非線形）

$$(m+M)\ddot{x}+m\ell\ddot{\theta}\cos\theta-m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta+\mu_x\dot{x}=f\cdots\ (1)$$

$$m\ell\cos\theta\,\ddot{x}+\left(m\ell^2+I_g\right)\ddot{\theta}+\mu_\theta\dot{\theta}-mg\ell\sin\theta=0\cdots\ (2)$$

$x,\dot{x},\theta,\dot{\theta}$ は微小であるとして, 平衡点まわりで線形近似

$\sin\theta\simeq\theta,\cos\theta\simeq 1,\dot{\theta}^2\simeq 0$ 　(線形制御理論を適用するため)

レール型倒立振子の線形化モデル

$$(m+M)\ddot{x}+m\ell\ddot{\theta}+\mu_x\dot{x}=f$$

$$m\ell\,\ddot{x}+\left(m\ell^2+I_g\right)\ddot{\theta}+\mu_\theta\dot{\theta}-mg\ell\theta=0$$

古典制御では, 制御対象を表す微分方程式にラプラス変換を適用して伝達関数モデルを得る.

$$(m+M)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} + \mu_x\dot{x} = f$$

$$m\ell\,\ddot{x} + \left(m\ell^2 + I_g\right)\ddot{\theta} + \mu_\theta\dot{\theta} - mg\ell\theta = 0$$

$$\Big\downarrow \ \mathcal{L}$$

$$\{(m+M)s^2 + \mu_x s\}X(s) + m\ell s^2\Theta(s) = F(s)$$

$$m\ell s^2 X(s) + (4/3m\ell^2 s^2 + \mu_\theta s - mg\ell)\Theta(s) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\begin{bmatrix} (m+M)s^2 + \mu_x s & m\ell s^2 \\ m\ell s^2 & 4/3m\ell^2 s^2 + \mu_\theta s - mg\ell \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} X(s) \\ \Theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=: \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ \Theta(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} g_{22}(s) & -g_{12}(s) \\ -g_{21}(s) & g_{11}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{g_{22}(s)}{\Delta(s)} \\ \dfrac{-g_{21}(s)}{\Delta(s)} \end{bmatrix} F(s) =: \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} F(s)$$

$$\Delta(s) = g_{11}(s)\, g_{22}(s) - g_{12}(s)\, g_{21}(s)$$

$$= \{(m+M)s^2 + \mu_x s\}(4/3 m\ell^2 s^2 + \mu_\theta s - mg\ell) - m^2\ell^2 s^4$$

$$=: s\underline{(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)}$$

$$a_0 = \frac{(m+4M)}{3} m\ell^2, a_1 = \frac{4}{3} m\ell^2 \mu_x + (m+M)\mu_\theta, a_2 = \mu_x \mu_\theta - m(m+M)g\ell,$$
$$a_3 = -mg\ell$$

下線部は $a_0, a_1 > 0, a_3 < 0$ (a_2は不定) より, 不安定多項式
(Routh-Hurwitz の安定判別法の必要条件！)

$\Delta(s) = 0$ は $s = 0$ および少なくともひとつの不安定根をもつ.

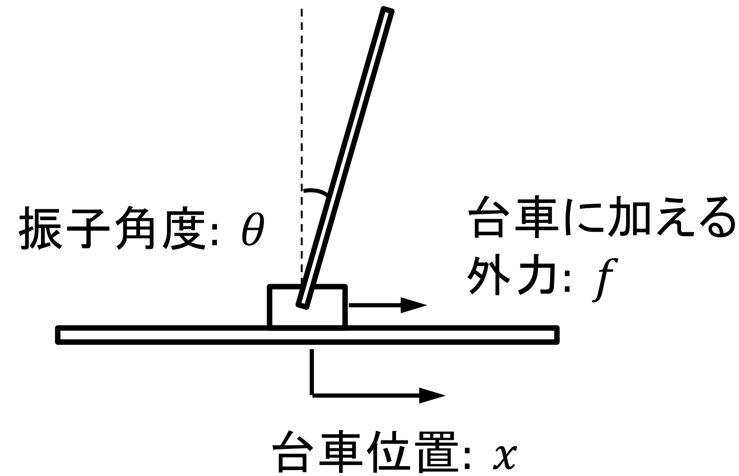
⇒ $G_1(s), G_2(s)$ は不安定な伝達関数

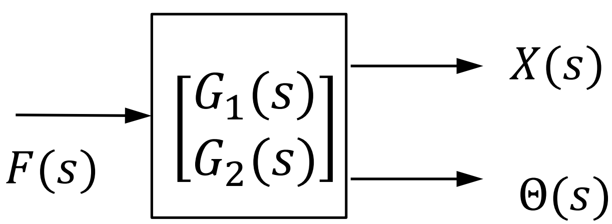
レール型倒立振子系の伝達関数モデル

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s), \mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(s),$$
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ \Theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} F(s)$$

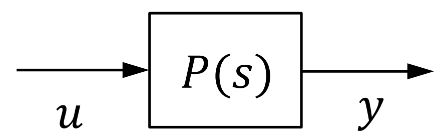
伝達関数行列





1入力2出力系

c.f.



1入力1出力系（u, y はスカラー）