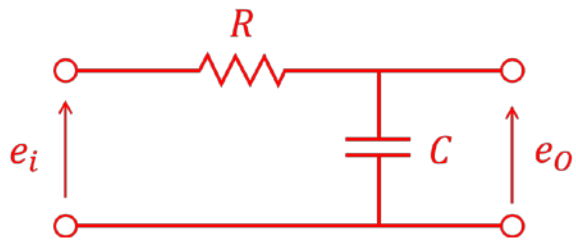
2018/2/7 担当　平田、中村

システム制御 I　演習（5）

1.　静電容量 C のコンデンサと抵抗値 R の抵抗を直列に結合する. この回路を, 結合回路の両端にかける電圧を入力 $u(t)$, コンデンサの端子間電圧を出力 $y(t)$ とするシステムとみなす.

(1) 回路図を書け.（グランド（接地）を明示的に書くとよい.）



$$u(t) = e_i(t), \qquad y(t) = e_o(t)$$

(2) 入出力間の伝達関数を求めよ.

抵抗 R を流れる電流を $i(t)$ とすると

$$e_i(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)d\xi\,, \qquad e_o(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)d\xi.$$

ラプラス変換すると

$$E_i(s) = \left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s), \qquad E_o(s) = \frac{1}{Cs}I(s).$$

これより

$$= \left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s), \qquad E_o(s) = \frac{1}{Cs}\frac{Cs}{RCs+1}\,E_i(s) = \frac{1}{RCs+1}\,E_i(s) =: G(s)\,E_i(s).$$

(3) $R = 1$ [Ω], $C = 2$ [F] とする. 時刻 $t = 0$ で入力側に, 一定電圧 v [V] を発生する直流電源を接続した. 任意の時刻 t 秒後の出力を求めよ.

ステップ応答を求めればよい.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{v}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{2s+1}\right]v = \left(1(t) - e^{-\frac{t}{2}}\right)v$$

(4) 1次系の伝達関数で応答の速さに関係するパラメータを何というか. このシステムにおける値はいくらか？

時定数.　$T = 2$

(5) 4秒後に出力は最終値の何パーセントに達しているか？四捨五入した整数値で答えよ. ただし $e^{-1} = 0.368$ である.

$$y(4) = (1 - e^{-2})v \simeq 0.86v$$

よって86 %.

(6) 次に入力側に交流電源を接続した．電源の角周波数 ω を $0.5[\mathrm{rad/s}]$ に調整した．ことのとき，定常出力として，同じ角周波数をもつ正弦波状の信号が観測された．この原理をなんというか？ また，入力に対する振幅比，位相遅れの量はいくらか？

周波数答の原理

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+2j\omega}$$

より

$$\left|G\left(\frac{j}{2}\right)\right| = \frac{1}{|1+j|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \angle G\left(\frac{j}{2}\right) = -\angle(1+j) = -\frac{\pi}{4}$$

(7) この系のボーデ線図を考える．低周波域と高周波域におけるゲイン線図の傾きを $[\mathrm{dB/dec}]$ で答えよ．また単位 $\mathrm{dB}, \mathrm{dec}$ がそれぞれ何を指すか答えよ．

0 および $-20\ \mathrm{dB/dec}$. ゲインを k 倍とするとき，そのデシベル(dB)表示は $20\log_{10} k$,

$1\ \mathrm{dec}\ (\mathrm{decade})$ は対数軸において角周波数が 10 倍となる距離をさす．

2. 機械要素と電気要素間のアナロジーについて考える．括弧内の適切な語句を答えよ．

まず電流−力を対比させた場合を考える．電流の積分値は（ 電荷量 ）であるから，これと電圧の比例関係を表す素子は（ コンデンサ ）である．一方，力の積分値と速度が比例関係にあるとき，力は（ 加速度 ）に比例することになるので，この機械要素は（ マス ）である．したがって要素(b)−(d)が対応づけられる．電流の微分値と電圧が比例関係を持つ素子は（ コイル ）であり，力の微分値と速度の比例関係，すなわち力と速度の積分値である（ 変位 ）の比例関係を表す素子は（ バネ ）である．これらの対応は電圧−力の対比を考える場合には逆転するが，エネルギーを（ 消費 ）する素子としての（ 抵抗 ），（ ダンパー ）間の対応は不変である．

3. 安定性に関する各設問に答えよ．

(1) 伝達関数 $G(s)$ を考える．任意の有界入力に対する $G(s)$ の出力が有界となるとき，この安定性をとくに何というか？

BIBO 安定性

(2) $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ とする．$G(s)$ が有理関数と限らない場合，上記の安定性のための必要十分条件はインパルス応答が絶対可積分であることである．これを式で表せ．

$$\int_0^\infty |g(t)|dt < \infty$$

(3) 時間領域で出力は入力と $g(t)$ の合成積で与えられることから，$g(t)$ が与えられたとき，入力 $u(t)$ を ±1 のいずれかの値をとるとしてうまく選ぶと，合成積が絶対値演算となるようにできる．これは上記の必要・十分性いずれの条件を証明するか？

「$g(t)$ が絶対可積分でなければ，有界な入力で出力を非有界にするものが存在する，すなわち BIBO 安定でない」 ことを示す過程で用いられる．対偶をとれば「BIBO 安定→絶対可積分」であるから，必要条件．

(4) では $G(s)$ が有理関数である場合，必要十分条件は，より簡単に，どう与えられるか？

すべての極の実部が負であること

(5) $G(s) = 1/(s+2)$ は安定である．これを(2), (4)に基づいて示せ．

(2) $g(t) = e^{-2t} \rightarrow \int_0^\infty |g(t)| dt = \int_0^\infty e^{-2t}\, dt = \frac{1}{2} < \infty$

(4) $G(s)$ の極は $s = -2$ であり，$\mathrm{Re}\,[s] < 0$.

(6) $(s+2)(s+1)(s-3)$ を展開すると，多項式の係数には不可避的に負の要素が含まれることになる．これを一般化すると，多項式の安定性のための必要条件として何が得られるか？（最高次の係数は1に規格化するものとする.）

すべての係数が正であること

(7) 開ループ伝達関数 $G(s)$ のナイキスト線図が $-1 + j0$ 上を通過するとき，単一負フィードバック系は安定限界となる．なぜか答えよ.

$G(s)$ のナイキスト線図が $-1 + j0$ 上を通過する $\Leftrightarrow$ ある ω に対して，$G(j\omega) = -1 + \mathrm{j}0$
$\Leftrightarrow$ ある ω に対して，$1 + G(j\omega) = 0$
$\Leftrightarrow$ 特性方程式 $1 + G(s) = 0$ が少なくともひとつ虚軸上に根をもつ$\Leftrightarrow$ 安定限界

(8) 安定な $G(s)$ のナイキスト線図が実軸の負の部分と $-1/3 + j0$ で交わっている．比例ゲイン要素によって負フィードバック制御を施すとき，安定性を損なうことなくどこまでゲインを上げることができるか？ また，対応する根軌跡を考えた場合，その限界のゲインに対応する軌跡上の点（の少なくともひとつ）は，複素平面内の特徴的な場所にある．それはどこか？

3 まで．虚軸上にある．