システム制御 I 演習問題 (4) 解答

1. 以下の各数式が表すことがらとして最も適切なものを解答群から選びなさい.

(1) $\mathrm{y}(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau$　(2) $\mathrm{y}(t) = g(t) * u(t)$　(3) $\mathrm{Y}(s) = G(s)U(s)$

(4) $\mathrm{y}(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$　(5) $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

a) 周波数領域(ラプラス変換領域)での入出力関係, b) 信号のラプラス変換
c) 周波数応答, d) 時間領域での入出力関係, e)定常応答

(1) e 定常応答, (2) d 時間領域での入出力関係, (3) a 周波数領域での入出力関係,
(4) c 周波数応答, (5) b 信号のラプラス変換

2. かっこ内の語句として最も適切なものを下の解答群から選びなさい.

有理伝達関数の分母多項式を零にする点を(ア)といい, 分子多項式を零にする点を(イ)という. 分母多項式イコール零という方程式をとくに(ウ)という. 分母多項式の次数が分子多項式よりも大きいとき, 伝達関数は(エ)であるという.

(ア) q 極, (イ) l 零点, (ウ) n 特性方程式, (エ) f 厳密にプロパー

任意の有界入力に対して出力が有界となるとき, そのシステムを (オ)安定, あるいは単に安定という. システムが安定であるための必要十分条件はインパルス応答が(カ)であることである. 伝達関数が有理伝達関数であるとき, 安定性の必要十分条件は, すべての(ア)の(キ)が負であることとなる. 分母多項式の次数を 3 以上とし, 分母多項式の最高次の係数を正とするとき, すべての係数が正であることは, 安定であるための(ク)条件である. ただし 2 次系の場合には, これは(ケ)条件になる. 安定な多項式を(コ)多項式という.

(オ) a BIBO, (カ) o 絶対可積分, (キ) c 実部, (ク) d 必要, (ケ) j 必要十分, (コ) r Hurwitz

a) BIBO, b) 二乗可積分, c) 実部, d) 必要条件, e) 十分条件, f) 厳密にプロパー, g) MIMO,
h) 代数方程式, i) 虚部, j) 必要十分条件, k.) 非プロパー, l.) 零点, m) 根, n.) 特性方程式,
o) 絶対可積分, p.) Maxwell, q) 極, r) Hurwitz, s) Routh, t) 解

3. 周波数応答の原理を，常微分方程式の解から得られる結果を用いて，検証しよう.

1） ラプラス変換を用いて，次の微分方程式を解きなさい.

$$\dot{y}\,(t) + 2\mathrm{y}(t) = 2\sin 2t\,,\quad y(0-) = 1$$

上式をラプラス変換すると

$$sY\,(s) - y(0) + 2Y(s) = 2\frac{2}{s^2+4}$$

よって

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}\left(1 + \frac{4}{s^2+4}\right) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{s-2}{s^2+4}\right)$$

$$\mathrm{y}(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$$

2） 時間が十分に経過した後の波形を sin のみを用いて表しなさい.

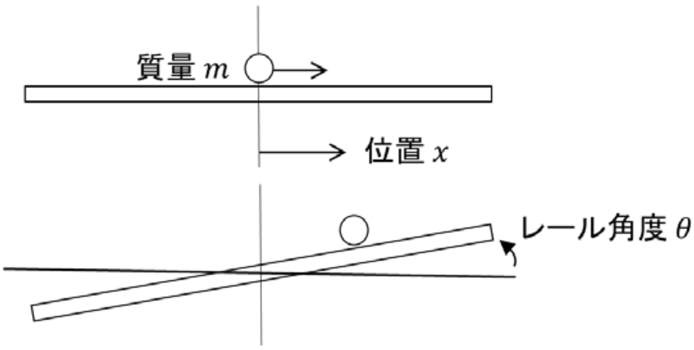
$$\mathrm{y}_s(t) = \frac{1}{2}(\sin 2t - \cos 2t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

3） $G(s) = 2/(s+2)$ に対応する周波数伝達関数の $\omega = 2$ のときの振幅，位相を答えなさい.

$$|G(2j)| = \left|\frac{2}{2j+2}\right| = \left|\frac{1}{1+j}\right| = \frac{1}{|1+j|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle G(2j) = \angle\left(\frac{2}{2j+2}\right) = \angle\left(\frac{1}{1+j}\right) = \frac{1}{\angle(1+j)} = -\frac{\pi}{4}$$

4. 下図のような ball & beam のモデルを導出しよう. ボールの質量は $m\,[kg]$，ビーム中心からの距離 $x\,[m]$ （右向きが正），水平からのビームの傾斜角 $\theta\,[rad]$ （右上がりが正），重力加速度 $g\,[N/kg]$ とする. ボールとビームの間には速度に比例した粘性摩擦が働くとし，その摩擦係数をμ $[N/(m/s)]$ とする. ボールの径は無視して質点とみなす.



1） 運動方程式を求めよ.

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t)+\mu\frac{d}{dt}x(t)=-mg\sin\theta(t)$$

2） 傾斜角 θ を微小として，傾斜角 θ から距離 x までの伝達関数を求めよ.

$\sin\theta(t)\simeq\theta(t)$ としてラプラス変換すると

$$(ms^2+\mu s)X(s)=-mg\Theta(s)\quad\cdots(1)$$

$$X(s)=-\frac{mg}{ms^2+\mu s}\Theta(s)$$

伝達関数は $-\frac{mg}{ms^2+\mu s}$

3） 変数 x を用いて，θ を与える以下のフィードバック制御則のうち，閉ループ系を安定化しないものはどれか.

a） $\theta=x/g$，　b）$\theta=(\dot{x}+x)/g$，　c）$\theta=\frac{1}{g}\left(-\frac{\mu}{2m}\dot{x}+x\right)$，　d）$\theta=\frac{1}{g}\left(-\frac{2\mu}{m}\dot{x}+x\right)$

a）をラプラス変換したものを(1)式に代入すると

$$(ms^2+\mu s)X(s)=-\frac{mX(s)}{g}$$

右辺を移項すると特性方程式は $ms^2+\mu s+m=0$ となるので，($m,\mu>0$ より)）閉ループ系は安定

同様に b）では $ms^2+(\mu+m)s+m=0$, c）では $ms^2+(\mu/2\,)s+m=0$,
d）では $ms^2-\mu s+m=0$ となるので，閉ループ系が安定とならないのは d).

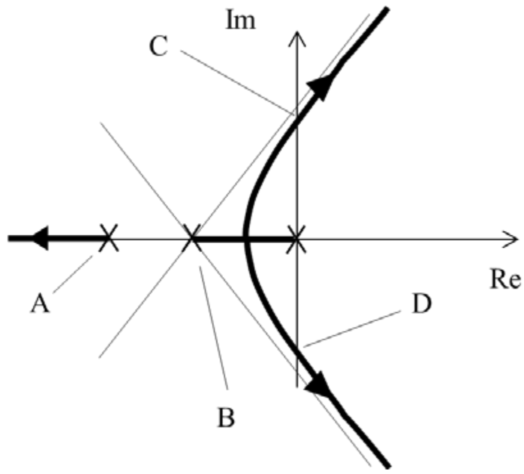
4） この制御対象の周波数応答を考える．角周波数 ω が大きいとき，ω が 10 倍になると，ゲインは何倍になるか．このことから，ボーデ線図を描いたとき，ゲイン線図の $\omega\gg 1$ での傾きは何 $\mathrm{dB/dec}$ か？

いま $G(s)=-\frac{mg}{ms^2+\mu s}$ である． $s=j\omega,\omega\gg 1$ であるとき，$G(j\omega)\simeq\frac{g}{\omega^2}$. したがって ω が 10 倍になると，ゲインは 1/00 倍になる．このことから，ボーデ線図を描いたとき，ゲイン線図の $\omega\gg 1$ での傾きは −40 $\mathrm{dB/dec}$ となる.

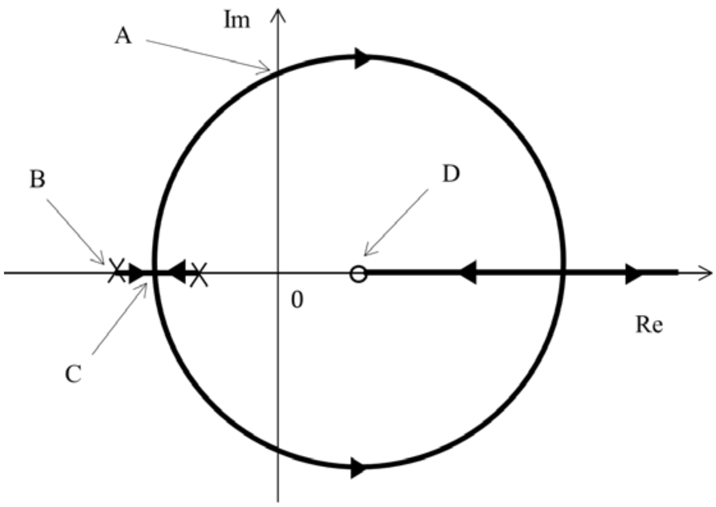
5.　伝達関数 ア）$\frac{2-s}{(s+1)(s+2)}$,　イ）$\frac{1}{(s+1)(s+2)}$,　ウ）$\frac{1}{s(s+1)(2s+1)}$ について考える.

1）各伝達関数の正のゲインに対する根軌跡（負フィードバック）として正しいものを以下から選びなさい. また A から D の各点に対応するゲインの値を答えなさい.

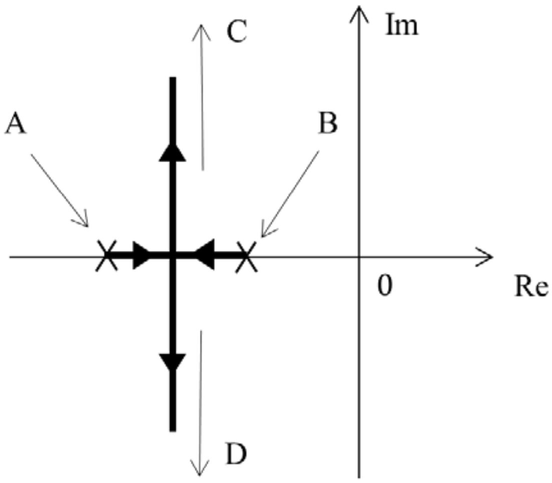
n 次伝達関数の根軌跡は n 本の分岐からなる. また軌跡は（開ループ）伝達関数の極から始まり, 零点（無限遠も含む）に向かうことから ア）b, イ）c, ウ）a である. 開ループ極（×印）に対応するゲインは 0, 零点（〇印または無限遠点）に対応するゲインは∞. 虚軸を横切る点では安定限界なので, ラウス−フルビッツの方法からゲインの値を求めればよい.



根軌跡　a



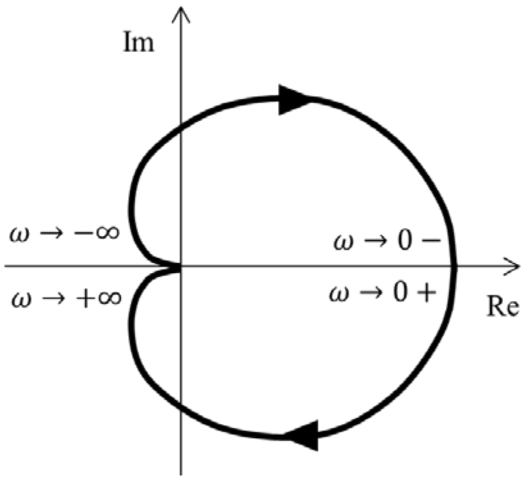
根軌跡　b



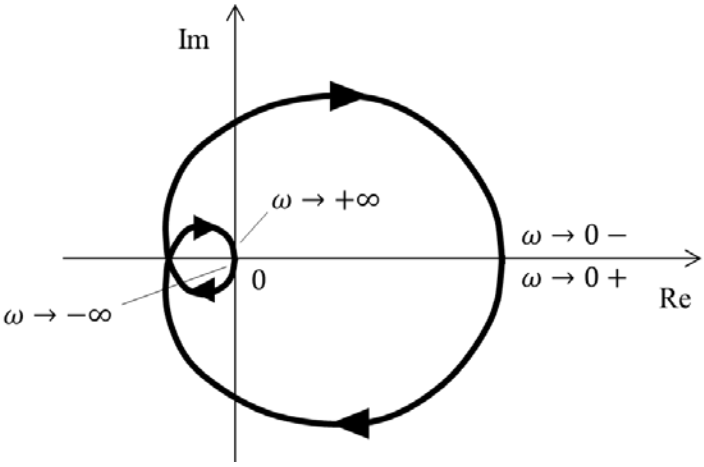
根軌跡 c

2）各伝達関数のナイキスト線図として正しいものを以下から選びなさい．それぞれの系のゲイン余裕はいくらか？

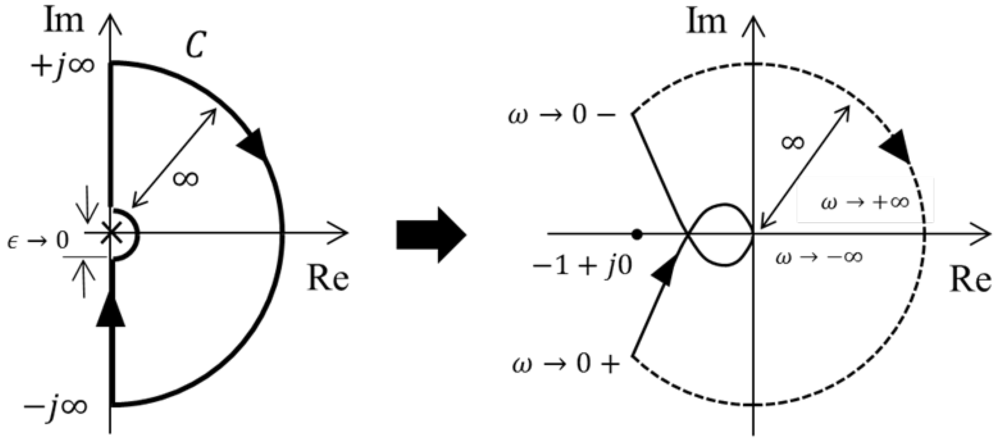
ア）b（2 次系でゲイン余裕は有限），イ）a （2 次系でゲイン余裕は無限大），ウ）c（原点極があるので，回避する必要あり．それに対応して半径無限大のところでナイキスト線図が周回する.）である. b, c に対してはナイキスト線図が実軸の負の部分を横切るときの座標を求めなければならない．$G(j\omega) = X(j\omega) + jY(j\omega)$ と分けて$Y(j\omega) = 0$ となる周波数 ω_0 を求めると，座標は$(X(j\omega_0), j0)$ である.



ナイキスト線図 a



ナイキスト線図 b



ナイキスト線図 c