演習問題 (2) の解答

$$1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases} \qquad \mathcal{L}[1(t)]=\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt \quad =\frac{1}{-s}[e^{-st}]_0^{\infty}$$

$s=\sigma+j\omega$ とすると　$|e^{-st}|=e^{-\sigma t}\left|e^{-j\omega t}\right|=e^{\sigma t}$

よって $\sigma=\mathrm{Re}[s]>0$ のとき, $\lim_{T\to\infty}|e^{-sT}|=0$ ➡ $e^{-st}\to 0\ (t\to\infty)$

$$\mathcal{L}[1(t)]=\frac{1}{s}$$

収束領域:　$\mathrm{Re}[s]>0$

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = \int_0^\infty f(t-T)e^{-st}dt$$

$\xi = t - T$ とおくと

$$= \int_{-T}^\infty f(\xi)e^{-s(\xi+T)}\,d\xi$$

$$= \int_0^\infty f(\xi)e^{-s\xi}\,d\xi e^{-sT} \qquad \because f(\xi) = 0\ (\xi < 0)$$

$$= e^{-Ts}F(s)$$

$g(t) = e^{-st}$とし, 両辺を t について 0 から ∞ まで積分すると

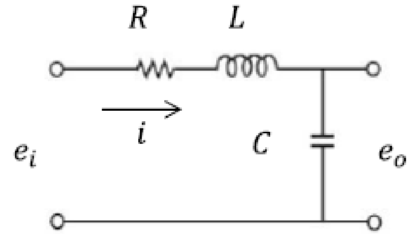
$$[f(t)e^{-st}]_0^\infty = \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt - s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

（収束領域において）左辺は $f(0)$ に収束し, 右辺は $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] - sF(s)$ なので

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

これは演習問題（1）で既にやっている.

2. 下図の RLC 回路を考える．ただし，e_i：入力電圧[V]，i：電流[A]，e_O：コンデンサの端子電圧[V]，R: 抵抗[Ω]，L: 自己インダクタンス[H]，C: 静電容量[F]とする．このとき，以下の問に答えよ．
（1）入力電圧e_iからコンデンサの端子電圧e_O までの伝達関数$G(s)$を求めよ．



素子方程式　$v_R = Ri,\quad v_L = L\dfrac{di}{dt},\quad v_C = e_o = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)dt$

キルヒホッフの電圧法則　$e_i = v_R + v_L + v_C$

$$\Big\Downarrow\ \mathcal{L}$$

$$e_i(s) = \left\{R + Ls + \frac{1}{Cs}\right\} i(s), \qquad e_o(s) = \frac{1}{Cs} i(s)$$

$$e_i(s) = (RCs + LCs^2 + 1)\frac{i(s)}{Cs} = (RCs + LCs^2 + 1)e_o(s)$$

$$\Rightarrow\ e_o(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} e_i(s)$$

（2）$R=3$, $L=2$, C=1 のとき，伝達関数$G(s)$の極を求めよ．

$$G(s)=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}=\frac{1}{2s^2+3s+1}=\frac{1}{(2s+1)(s+1)}$$

よって極は　$s=-\frac{1}{2},-1$

（3）同回路（電気系）とマス・バネ・ダンパー系（機械系）のアナロジーを考える．力と電圧，速度と電流の組み合わせで対応付けたとき，(a)抵抗，(b)コンデンサ，(c)コイルに対応するものはそれぞれ何か．以下の中から選べ．

マス，バネ，ダンパー

f（力）$\Leftrightarrow$ e（電圧）, v（速度）$\Leftrightarrow$ i（電流）

抵抗:　$e(t)=Ri(t)$

コンデンサ:　$e(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$

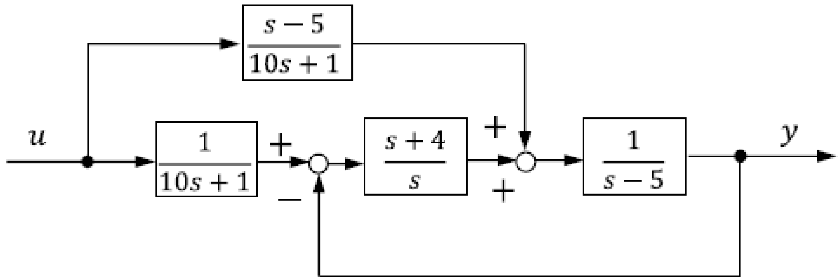
コイル:　$e(t)=L\frac{d}{dt}i(t)$

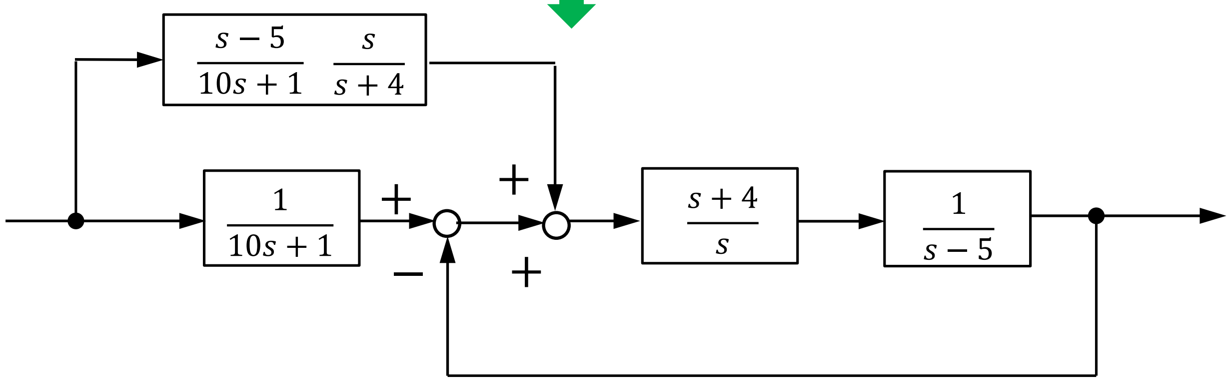
マス:　$f(t)=M\frac{d}{dt}v(t)$

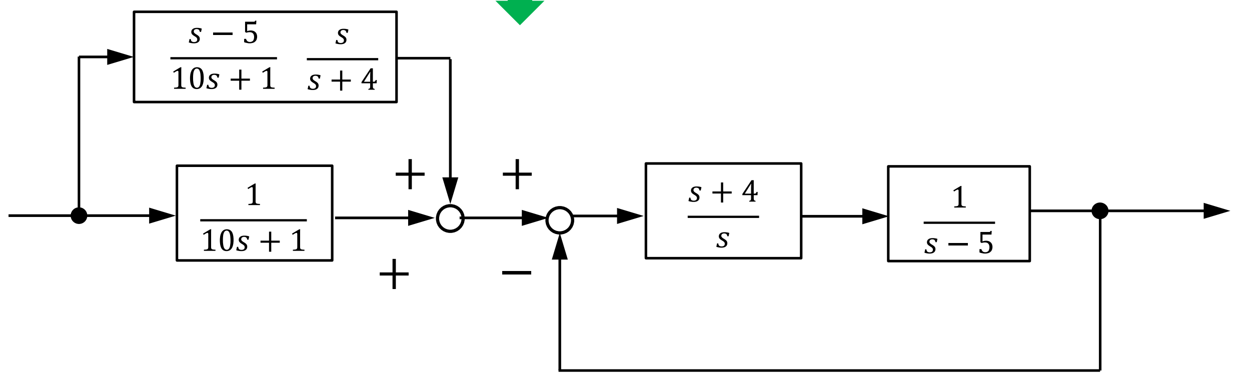
バネ:　$f(t)=K\int_0^t v(\tau)d\tau$

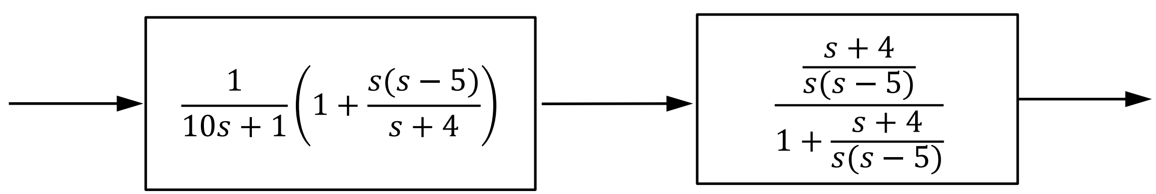
ダンパー:　$f(t)=Dv(t)$

3.　以下のブロック線図を簡単化し，uからyまでの伝達関数を求めよ.



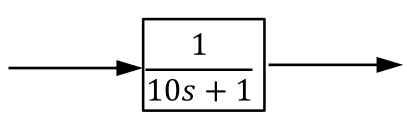






$$\frac{1}{10s+1}\frac{s+4+s(s-5)}{s+4}=\frac{1}{10s+1}\frac{s^2-4s+4}{s+4}$$

$$\frac{s+4}{s(s-5)+s+4}=\frac{s+4}{s^2-4s+4}$$



4. 以下の文章の空欄を埋めて適切な文章を完成させよ.

伝達関数を$G(s) = n(s)/d(s)$($n(s), d(s)$は多項式)で表したとき, $n(s) = 0$となるsを$G(s)$の(a), $d(s) = 0$となるsを$G(s)$の(b)という. 同多項式の次数を$m_n = \deg(n(s))$, $m_d = \deg(d(s))$とおいたとき, (c)の関係式を満たす$G(s)$は非プロパーである. 逆に, (d)であるとき, $G(s)$はプロパーである. また, プロパーな伝達関数をさらに分類すると, (e)であるとき厳密にプロパー, (f)であるときバイプロパーな伝達関数とよばれる. 問 2 の(1)で求めた伝達関数$G(s)$は, 非プロパー, バイプロパー, 厳密にプロパ—のうち(g)に分類される.

a. 零点
b. 極
c. $m_n > m_d$
d. $m_n \leq m_d$
e. $m_n < m_d$
f. $m_n = m_d$
g. 厳密にプロパー