演習問題 (1) の解答

（1）$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ であるとき，$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$はどう表わされるか．（結果のみでよい）

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

（2）上の結果に基づき，$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\xi)d\xi\right]$ がどう表わされるか導け．(要証明.)

$$g(t)\coloneqq\int_0^t f(\xi)d\xi \Rightarrow \frac{d}{dt}g(t)=f(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}g(t)\right]=sG(s)-g(0)=sG(s)$$

$$=F(s) \qquad \because g(0)=0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\xi)d\xi\right]=\mathcal{L}[g(t)]=G(s)=\frac{F(s)}{s}$$

（3）関数 $f(t), g(t)$ の合成積はどう与えられるか.（結果のみでよい）

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

（4）合成積のラプラス変換はどう表わされるか導け.（要証明）

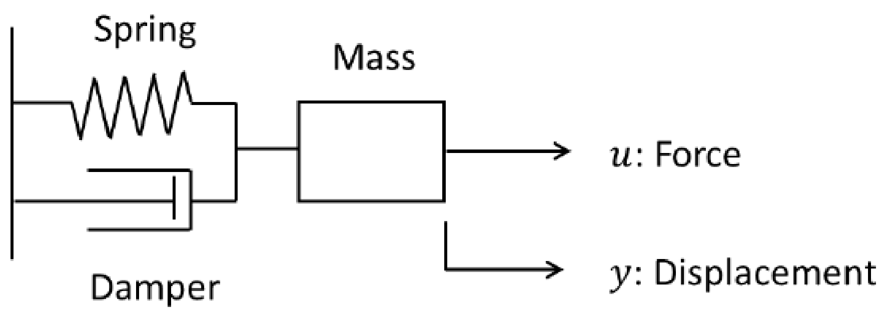
ヒント: $t < 0$ のとき, $f(t) = g(t) = 0$, $\int_0^\infty \int_0^t d\tau\, dt = \int_0^\infty \int_\tau^\infty dt\, d\tau$

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\, e^{-st}dt = \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(t-\tau)g(\tau)\ e^{-st}dtd\tau$$

$$= \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(t-\tau)g(\tau)\ e^{-s(t-\tau)}e^{-s\tau}dtd\tau \qquad \xi := t-\tau$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\xi)\, e^{-s\xi}d\xi\right) g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = F(s)G(s)$$

2. 下図のマス・バネ・ダンパー系を考える. 質量 $M = 1\ [kg]$, ダンパの粘性摩擦係数 $D = 2\ [Ns/m]$, バネ係数 $K = 5\ [N/m]$ とし, 入力: $u\ [N]$ から出力: $y\ [m]$ までの伝達関数を $G(s)$ とする.



$$M\ddot{y} + D\dot{y} + Ky = f$$

$$\Downarrow \mathcal{L}$$

$$y(s) = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K} f(s)$$

（1） 下記の記述から正しいものをすべて選べ.

a) $G(s)$ は非プロパーである. b) $G(s)$ はプロパーである. c) $G(s)$ は厳密にプロパーである.
d) $G(s)$ は有理関数である. e) $G(s)$ は非有理関数である. f) $G(s)$ の極は全て実数である.
g) $G(s)$ の極は複素数を含む.
h) 電気回路とのアナロジーでマスに対応するのは抵抗である.
i) 電気回路とのアナロジーでバネに対応するのは抵抗である.
j) 電気回路とのアナロジーでダンパーに対応するのは抵抗である.

多項式の比: 有理関数
分母の次数≧分子の次数: プロパー
分母の次数＞分子の次数: 厳密にプロパー

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s + 1 + 2j)(s + 1 - 2j)}$$

分母多項式を0にする点: 伝達関数の極　　$s = -1 \pm 2j$: 複素極

アナロジーについてはスライドで復習すること

（2） $G(s)$ のインパルス応答を求めよ．時間が経過すると応答はどうなるか？

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}=\frac{1}{(s+1+2j)(s+1-2j)}=\frac{\alpha}{s+1+2j}+\frac{\beta}{s+1-2j}$$

部分分数展開（係数一致）

$$\alpha+\beta=0,\ \alpha(1-2j)+\beta(1+2j)=1$$

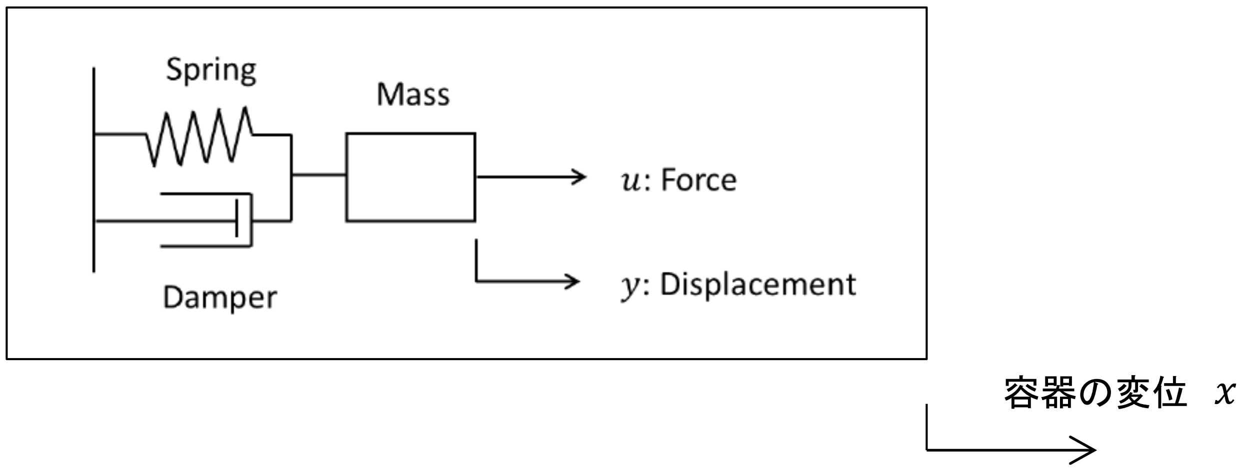
$$\Rightarrow\quad \alpha\{(1-2j)-(1+2j)\}=-4j\alpha=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{j}{4},\beta=-\frac{j}{4}$$

インパルス応答 $\quad g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=\frac{j}{4}\left\{e^{(-1-2j)t}-e^{(-1+2j)t}\right\}$

$$=e^{-t}\frac{j}{4}\left(e^{-2jt}-e^{2jt}\right)=e^{-t}\frac{j}{4}(-2j\sin 2t)=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

$$\therefore g(t)\to 0\ (t\to\infty)$$

（3） 先のマス・バネ・ダンパー系を容器に入れ，新たに容器の変位を制御入力とする（右向き正）．y を容器からの相対変位とするとき，これは加速度計の原理を表している． 伝達関数を示し，容器を等速運動させたとき，時間が経過すると $y=0$ となる理由を，伝達関数の零点の性質に基づいて，述べよ.（等速運動はランプ入力である！）



外力は作用しない

運動方程式 $$M\frac{d^2}{dt^2}(x+y)+D\dot{y}+Ky=0$$

加速運動は慣性系が基準

減衰力，バネ力は相対速度，相対変位によって決まる.

$$M\frac{d^2}{dt^2}(x+y)+D\dot{y}+Ky=0$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$y(s)=\frac{-Ms^2}{Ms^2+Ds+K}x(s)$$

容器が等速直線運動するとき　$x(t)=v_0 t \xrightarrow{\mathcal{L}} x(s)=\frac{v_0}{s^2}$

ランプ関数

$$y(s)=\frac{-Ms^2}{Ms^2+Ds+K}\times\frac{v_0}{s^2}=\frac{M}{Ms^2+Ds+K}\times(-v_0)$$

先のインパルス応答の結果から　$y(t)\to 0\ (t\to\infty)$

等速直線運動では加速度は0なので, 加速度計の出力も0になる.

零点によって入力の動特性が打ち消されて(遮断されて)いる.

3. ball & beam のモデルを導出しよう．ボールの質量は m $[kg]$， ビーム中心からの距離 x $[m]$， 水平からのビームの傾斜角 θ $[rad]$， 重力加速度 g $[N/kg]$ とし，傾斜角 θ は微小とする．ボールとビーム間の摩擦は無視できるとし，ボールの径も無視して質点とみなす．このとき，傾斜角 θ から距離 x までの伝達関数を求めよ．

運動方程式 $m\ddot{x} = -mg\sin\theta$　　線形近似 $\theta \simeq 0 \rightarrow \sin\theta \simeq \theta$

$$m\ddot{x} = -mg\theta$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$s^2 x(s) = -g\theta(s) \Rightarrow x(s) = -\frac{g}{s^2}\theta(s)$$

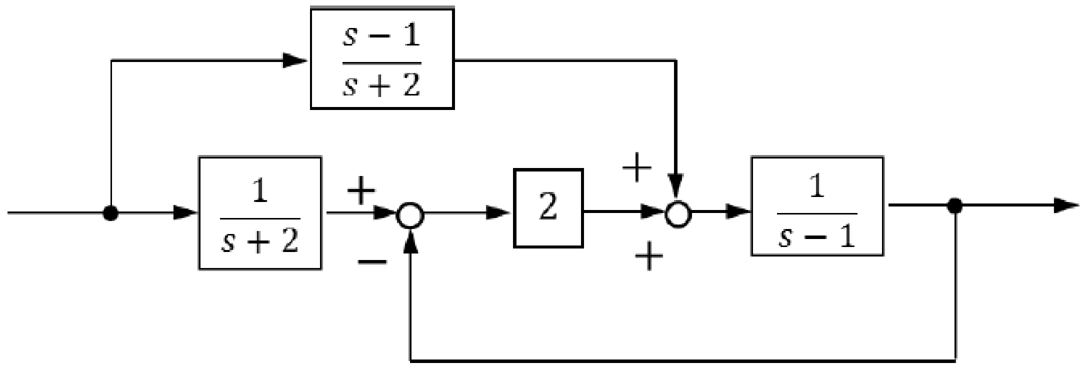
x, θ はそれぞれ時間関数 $x(t), \theta(t)$ であることに注意

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$ であるが $$\mathcal{L}[\sin\theta(t)] \neq \frac{\theta(t)}{s^2+\theta(t)^2}$$

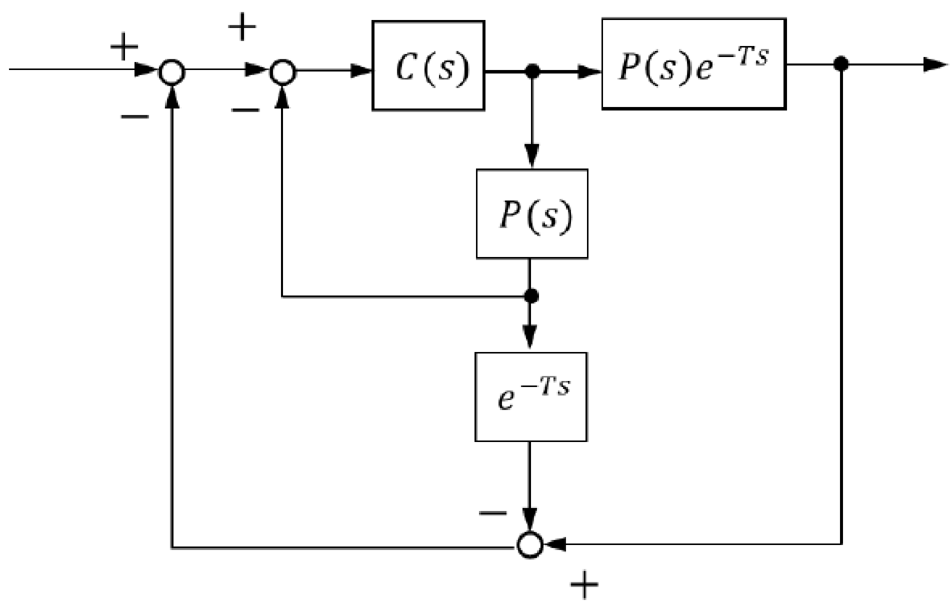
伝達関数は線形系に対してしか定義できないので線形近似は必須

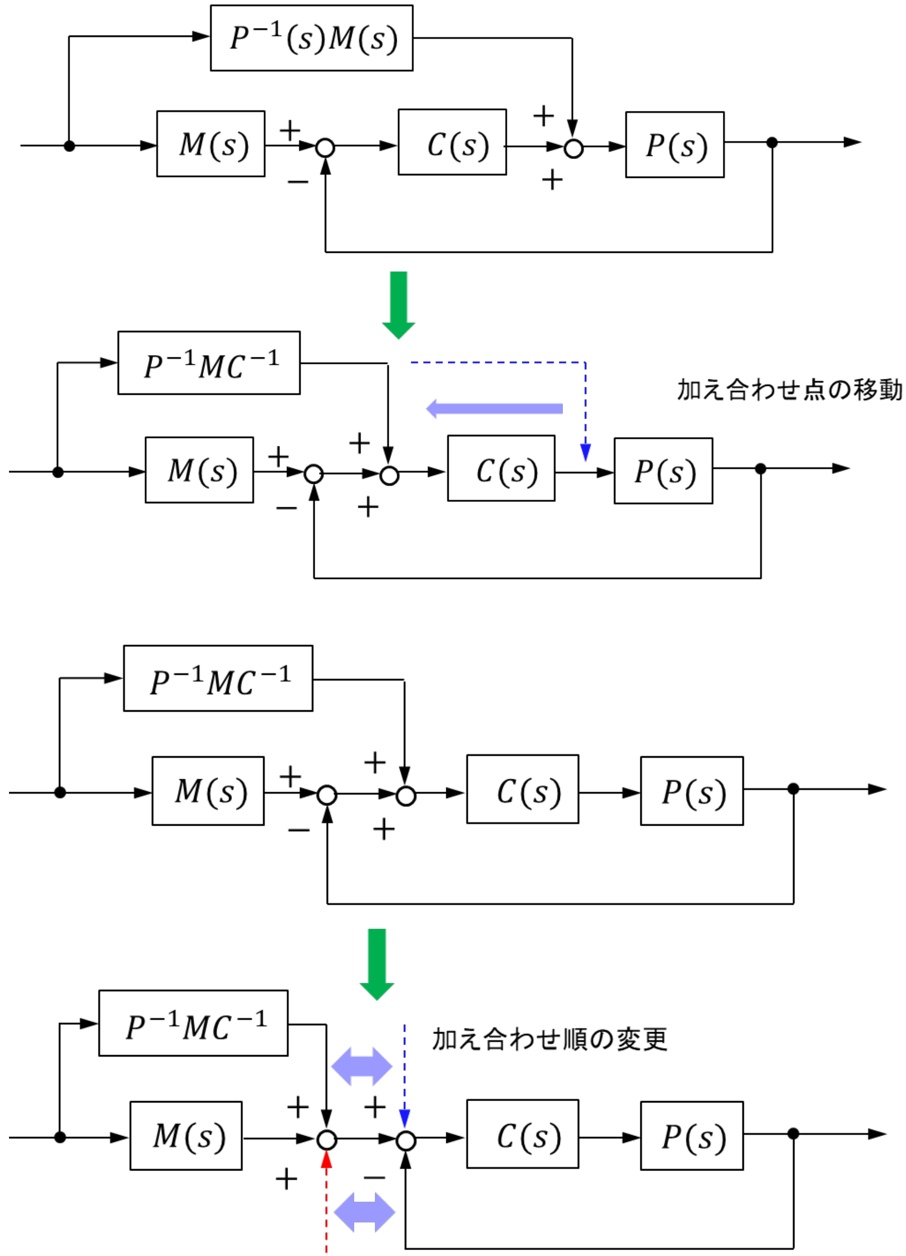
4.　以下のブロック線図を簡単化せよ.

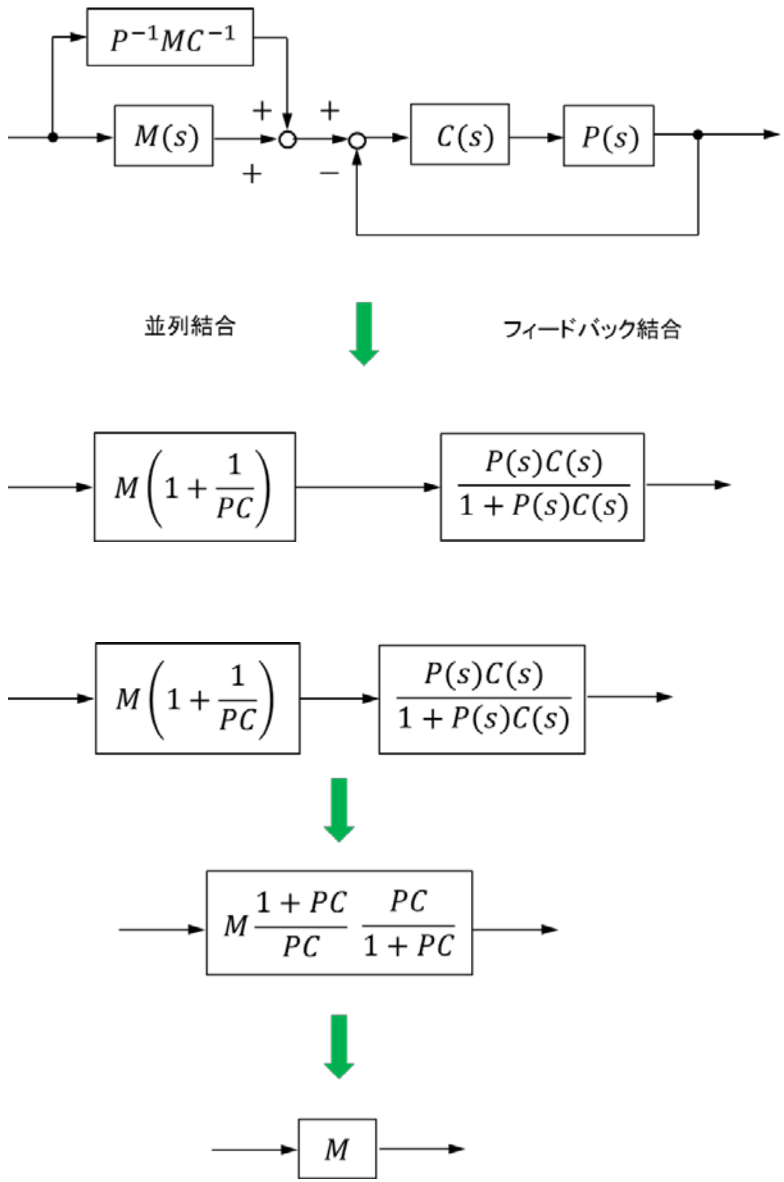
（1）



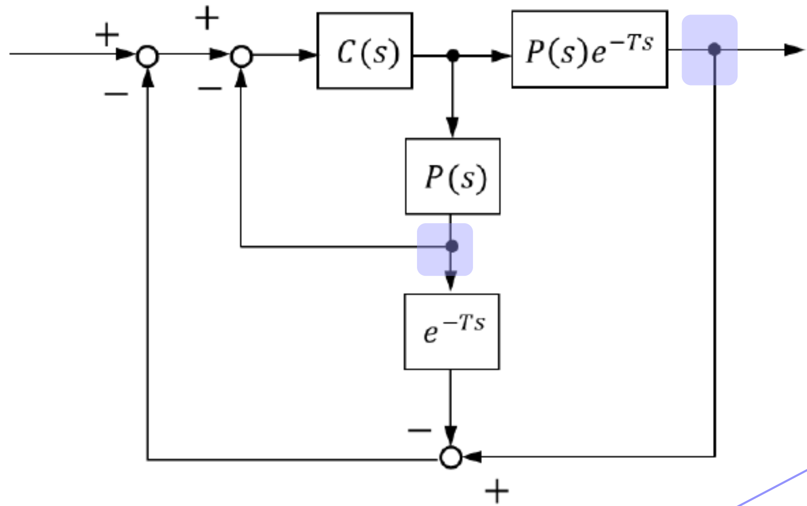
（2）



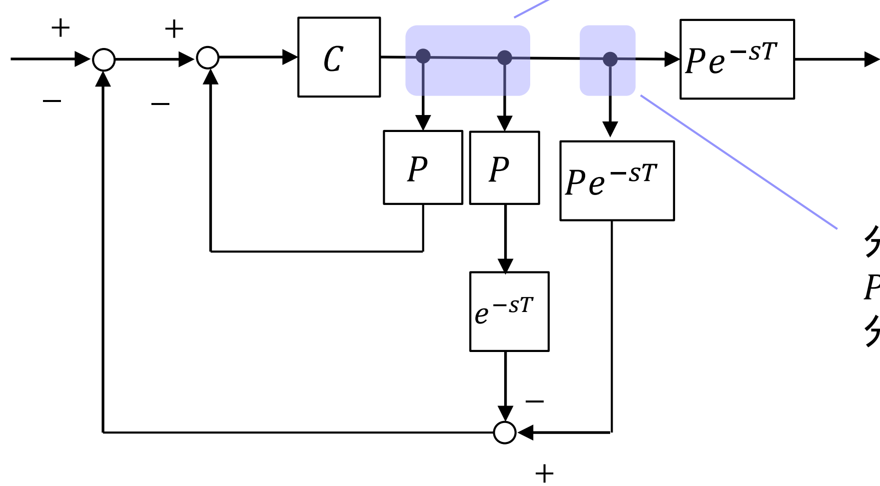

$P^{-1}(s)M(s)$
$M(s)$
$C(s)$
$P(s)$
$P^{-1}MC^{-1}$
加え合わせ点の移動
加え合わせ順の変更


$P^{-1}MC^{-1}$
$M(s)$
$C(s)$
$P(s)$
並列結合
フィードバック結合
$M\left(1+\frac{1}{PC}\right)$
$\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}$
$M\left(1+\frac{1}{PC}\right)$
$\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}$
$M\frac{1+PC}{PC}\frac{PC}{1+PC}$
M

（2）



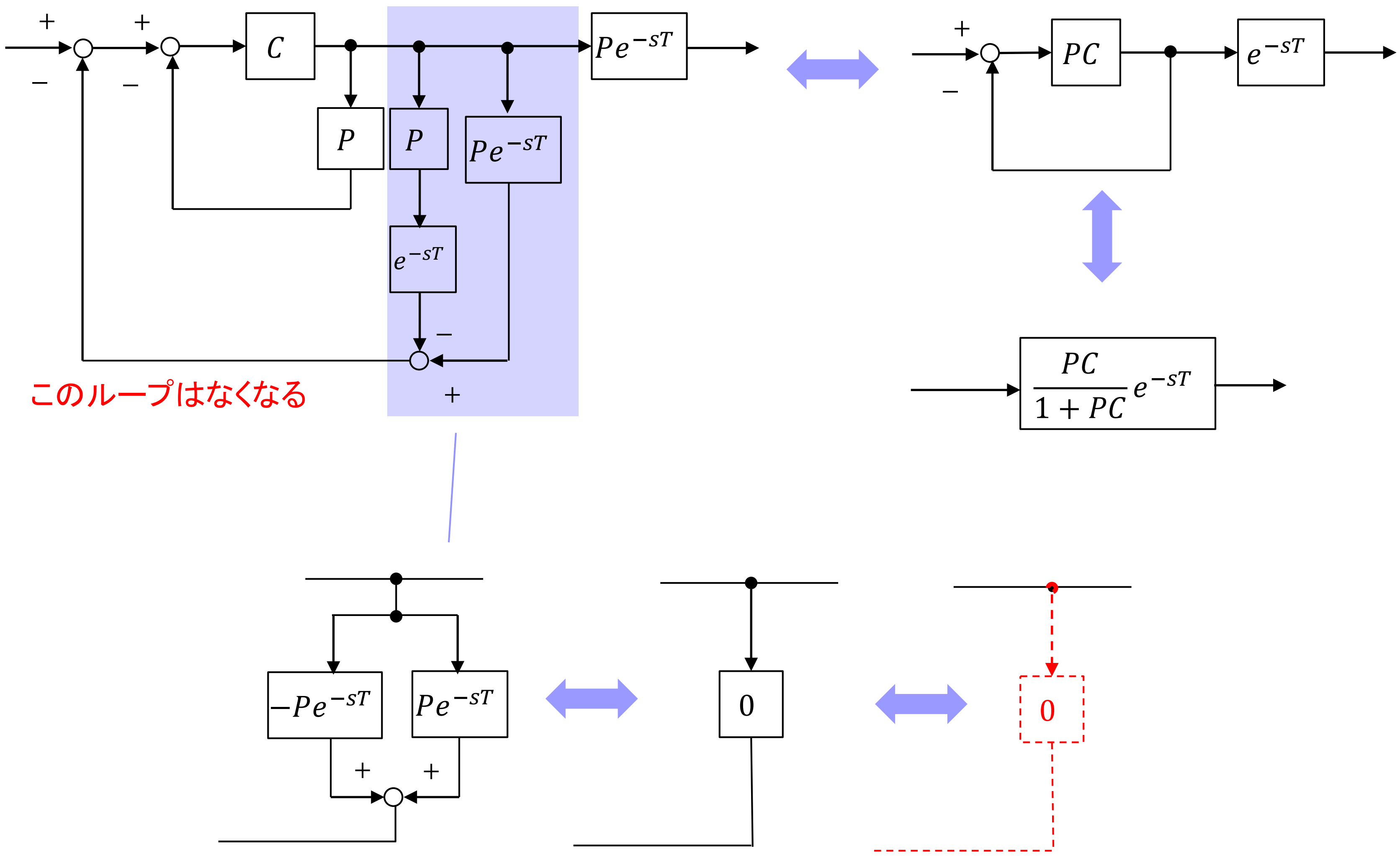
等価変換1



分岐点の移動：
Pの後ろで分岐する代わりに
分岐してから両方に P をかけた.

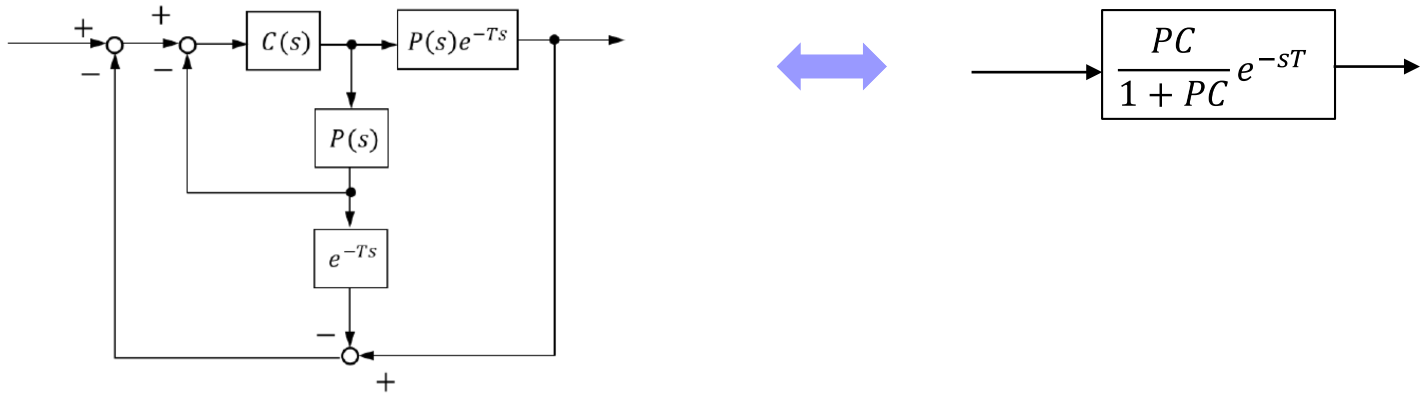
分岐点の移動：
Pe^{-sT}の後ろで分岐する代わりに
分岐してから両方に Pe^{-sT} をかけた.

等価変換2

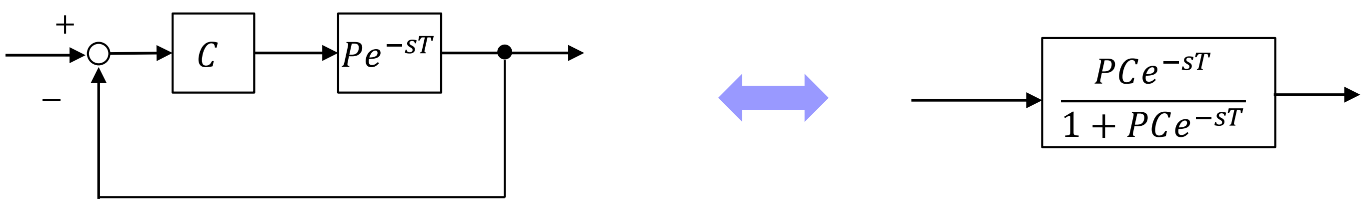


符号の異なる同一
要素の並列結合

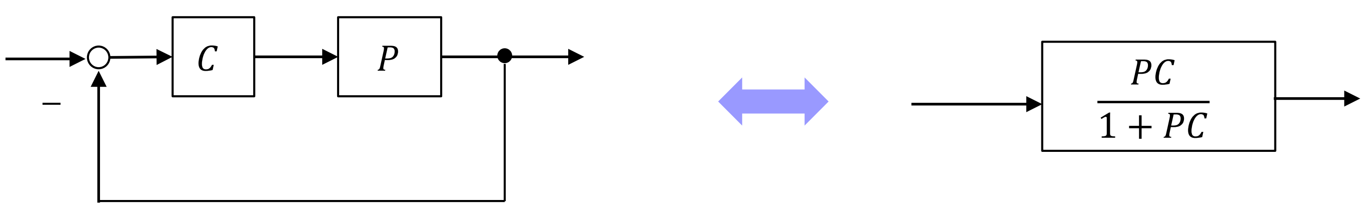
（2）



【以下は解説】　時間遅れを含む系に通常のフィードバックを施すと 分母にe^{-sT} を含む複雑な形になる



これに対して上のフィードバック系は, 時間遅れのない場合のフィードバック系に時間遅れを直列結合したものとなっており, 設計が容易（むだ時間系のスミス補償器と呼ばれる）



5.　下の語群から適切なものを選べ.（何度でも使用可）

制御工学の起源は(①)によるガバナーの研究といわれている. ガバナーは(②)の速度調整に用いられた. 電気回路におけるフィードバックの応用としては(③)によるフィードバック増幅器の発明が有名である. フィードバック原理を用いたデバイスの歴史的起源には諸説あるが, ギリシャ期の(④), あるいはパプアニューギニアにおける(⑤)などの例がある.

一旦場所を覚えてしまえば, 目を閉じていても素早く机上のものをつかむことができる. これは(⑥)制御の例である. 一方, 間に障害物を置かれたとしても, 障害物との距離を確認しながら, 慎重にものをつかむこともできる. これは(⑦)制御の例である. 講義内容から試験の難易度を予測して, 対策を考える. これは(⑧)制御の例といえる. 一方, 中間試験の出来が悪かったので, 期末テストはきちんと勉強して臨む. これは広義の(⑨)制御である.

a) オイラー　b) ニュートン　c) マックスウェル　d) ブラック　e) ウィーナー　f) ベル　g) ワット
h) ガレー船　i) 蒸気エンジン　j)　アウトリガー・カヌー　k) 水時計　l) 羅針盤　m) 風車　n) 犁（すき）
o) フィードバック　p) フィードフォワード

① マックスウェル
② 蒸気エンジン
③ ブラック
④ 水時計
⑤ アウトリガー・カヌー
⑥ フィードフォワード
⑦ フィードバック
⑧ フィードフォワード
⑨ フィードバック