

# システム制御 I

4学期

月 5, 6限 14:00-16:10

木 3, 4限 11:00-13:10

5号館 第15講義室 (システムコース)

担当: 平田 健太郎

1/27 第13回

フィードバック制御系の安定性

# Schedule

- |                 |          |      |
|-----------------|----------|------|
| 1. 12/2 (today) | 9. 1/9   | 中間試験 |
| 2. 12/5         | 10. 1/16 |      |
| 3. 12/9         | 11. 1/20 |      |
| 4. 12/12        | 12. 1/23 |      |
| 5. 12/16        | 13. 1/27 |      |
| 6. 12/19        | 14. 1/30 | 演習   |
| 7. 12/23        | 15. 2/3  | 演習   |
| 8. 1/6          | 16. 2/6  | 期末試験 |

## 前回のおさらい

周波数応答

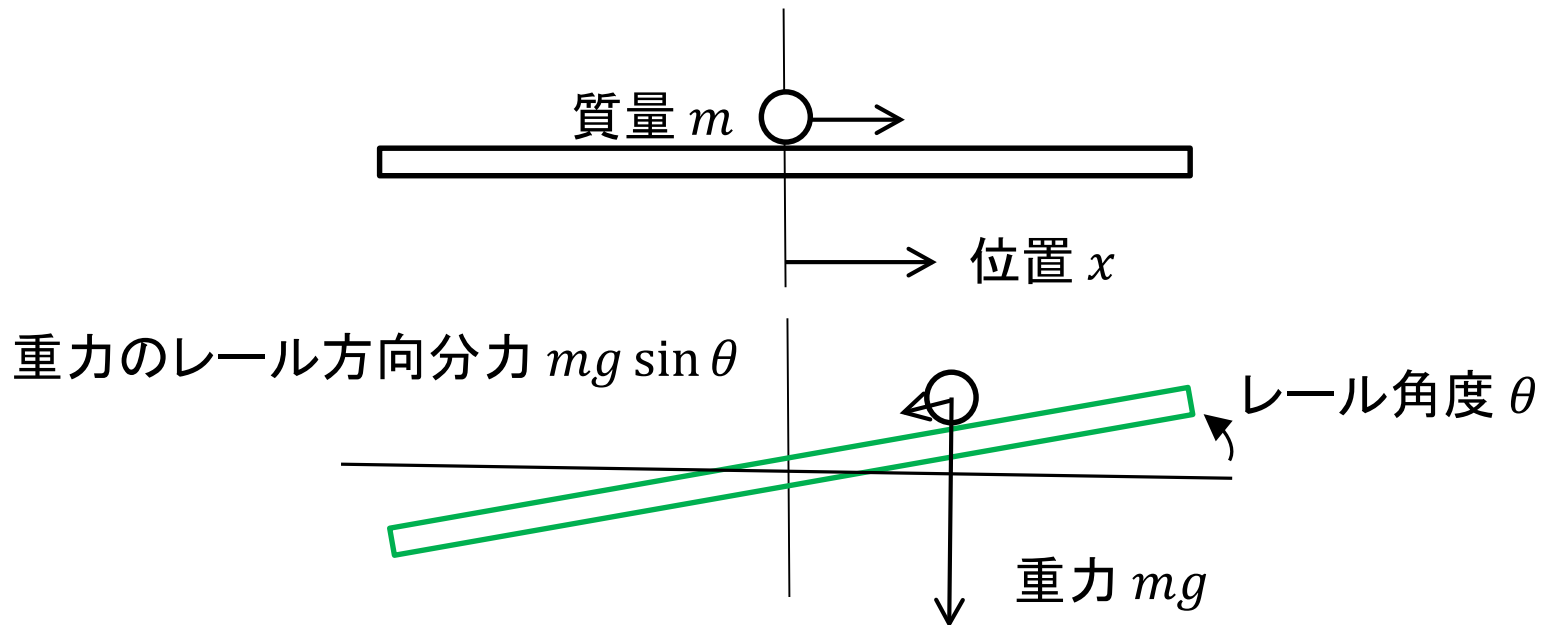
ナイキスト線図, ボーデ線図

## 講義第1, 2回目の続き

Ball & Beam のオフライン計算によらない  
安定化方法は？



# 伝達関数を求める



摩擦・空気抵抗なし

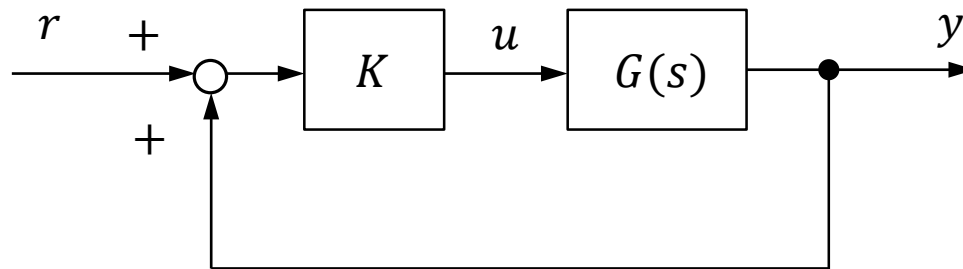
$$\text{運動方程式 } m\ddot{x} = -mg \sin \theta \quad \xrightarrow{\quad} \quad \ddot{x} = -g\theta \quad \xrightarrow{\quad \mathcal{L} \quad} \quad x(s) = -\frac{g}{s^2}\theta(s)$$

線形近似  $\sin \theta \simeq \theta$

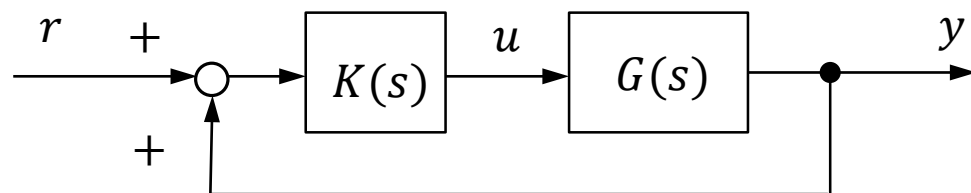


レール角度  $\theta$

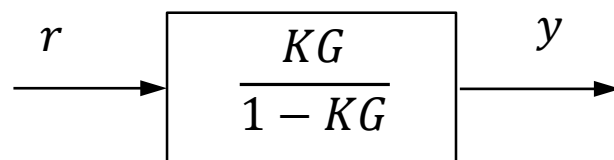
ボール位置  $x$



$$G(s) = -\frac{g}{s^2}$$



$$G(s) = -\frac{g}{s^2}$$



特性方程式  $1 - KG = 0$  の根が安定ならば, 閉ループ系は安定

根軌跡を考えるとときにように, スカラーのゲイン  $K$  で安定化できるか?

$$1 - KG = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{Kg}{s^2} = 0 \Leftrightarrow s^2 + Kg = 0$$

2次系で  $s$  の1次の項の係数が 0 なので,  $K$  をどのように選んでも安定化できない!

$K$  を定数ではなく、動的な制御器(伝達関数)として、自由度を増やすと...

$$1 - KG = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{K(s)g}{s^2} = 0 \Leftrightarrow s^2 + K(s)g = 0$$

$$r \equiv 0 \text{ として } u = K(s)y \Rightarrow \theta = K(s)x$$

$$K(s) = \frac{1}{g}(s + 1) \text{ と選ぶ.}$$

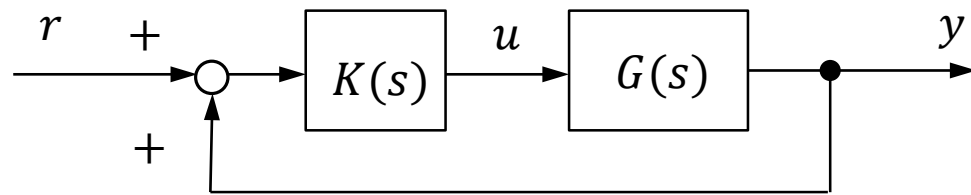
通常、非プロパーな要素を実装することは困難であるが、ボールの位置だけでなく、速度も計測可能な場合には

$$\theta(s) = K(s)x(s) = \frac{1}{g}\{sx(s) + x(s)\} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \theta(t) = \frac{1}{g}\{\dot{x}(t) + x(t)\}$$

という制御則を構成できる.

(位置  $x$  と速度  $\dot{x}$  の和に係数  $1/g$  をかけてレール角度  $\theta$  を決定)





$$G(s) = -\frac{g}{s^2}$$

$$K(s) = \frac{1}{g}(s + 1)$$

$$1 - KG = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{K(s)g}{s^2} = 0 \Leftrightarrow s^2 + K(s)g = 0 \Leftrightarrow s^2 + s + 1 = 0$$

2次系の安定条件は全ての係数が正. よって特性方程式  $1 - KG = 0$  の根はすべて左半平面にあり, 閉ループ系は安定となる.

非プロパーな微分器  $s$  のかわりにプロパーな近似微分器を使うと...

$$K(s) = \frac{1}{g} \left( \frac{s}{Ts + 1} + 1 \right), T > 0 \quad G(s) = -\frac{g}{s^2}$$

$$1 - KG = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{K(s)g}{s^2} = 0 \Leftrightarrow s^2 + K(s)g = 0 \Leftrightarrow s^2 + \frac{s}{Ts + 1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (Ts + 1)(s^2 + 1) + s = 0 \Leftrightarrow Ts^3 + s^2 + (T + 1)s + 1 = 0$$

フルビッツ行列

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ T & T + 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & / & / & / \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array}$$

$$\Delta_1 = 1 > 0 \rightarrow \text{自明}$$

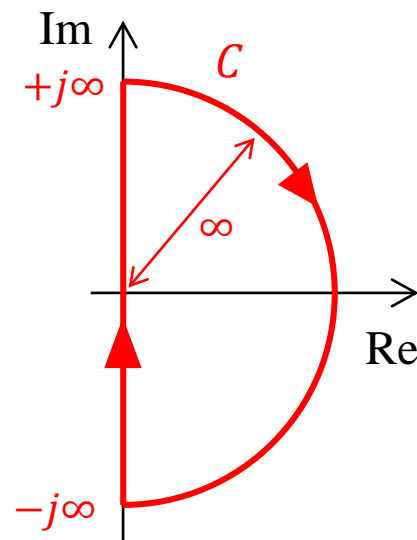
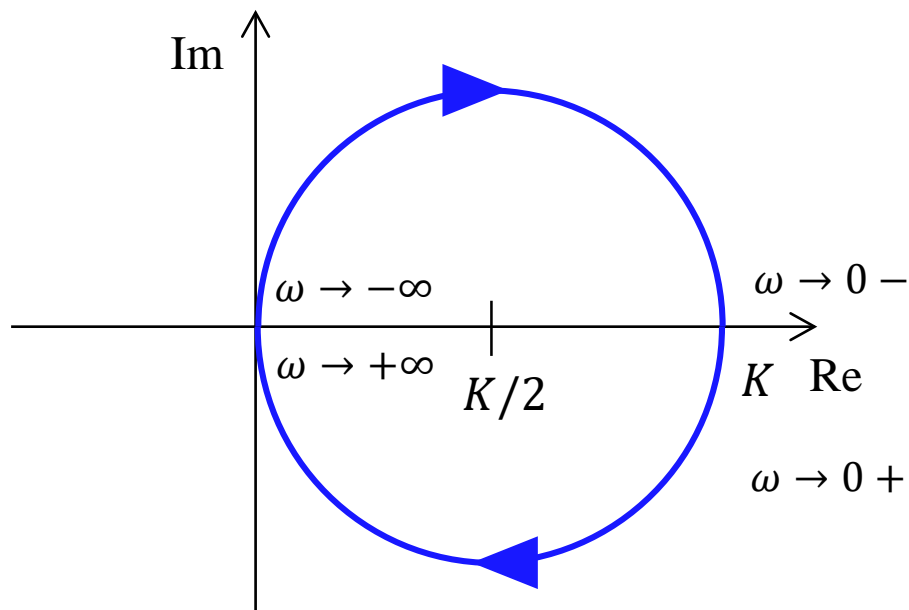
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ T & T + 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \rightarrow \text{自明}$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 > 0 \rightarrow \text{自明}$$

ラウス・フルビッツの安定判別法より、  
閉ループ系は安定となる。

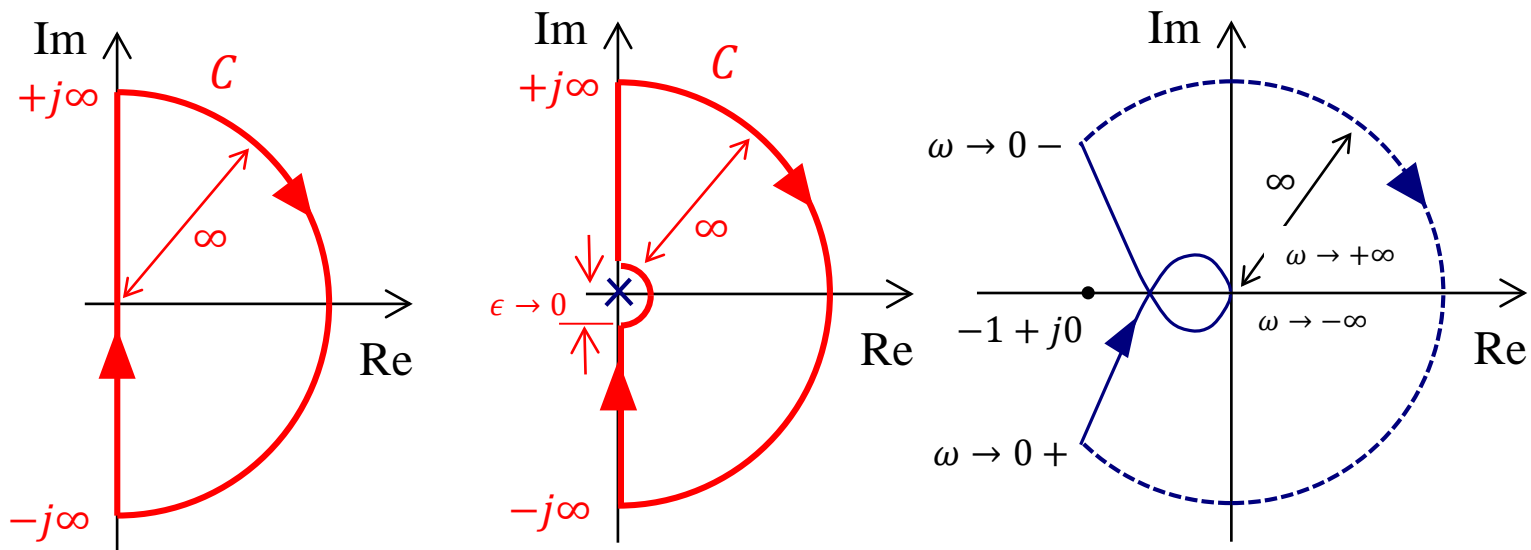
ナイキスト線図： 伝達関数  $P(s)$  に対して、 $s = j\omega$  とし、 $\omega$  を  $-\infty$  から  $+\infty$  まで変化させたときの値  $P(j\omega)$  を複素平面上にプロットしたもの。

$$P(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$



$P(s)$  は厳密にプロパーなので  $|s| \rightarrow \infty$  で  $P(s) \rightarrow 0$ . したがって  $s$  を右上のような経路に沿って動かしたときの、半径無限大の円周部に対応する像  $P(s)$  は原点に留まる. つまりナイキスト線図は経路  $C$  を  $s$  が動くときの  $P(s)$  の軌跡に等しい. (虚軸上では  $s = j\omega, \omega \in (-\infty, +\infty)$ )

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(2s+1)} \quad \text{のナイキスト線図}$$



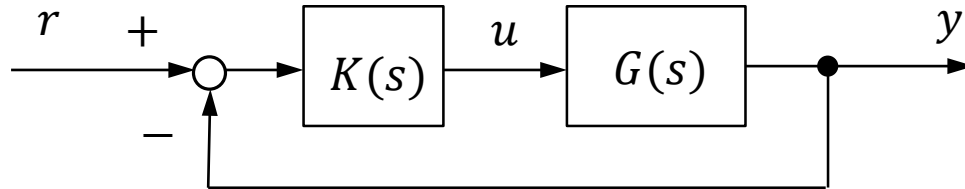
左の経路では途中で  $s = 0$  となるため、 $P(s)$  は発散し、ナイキスト線図を連続した曲線として描くことはできない。これでは後の安定性解析の際に不都合が生じるため、真ん中のように原点  $s = 0$  を中心とする半径無限小の半円上を通るように経路を修正する。このときのナイキスト線図(軌跡)は右図の点線部分に対応する。

## 6章 フィードバック制御系の安定性

- 結合系の特性
- フィードバック制御系の安定性
- ナイキストの安定定理
- 安定余裕, ロバスト安定性

期末試験範囲：（最初から）6章まで

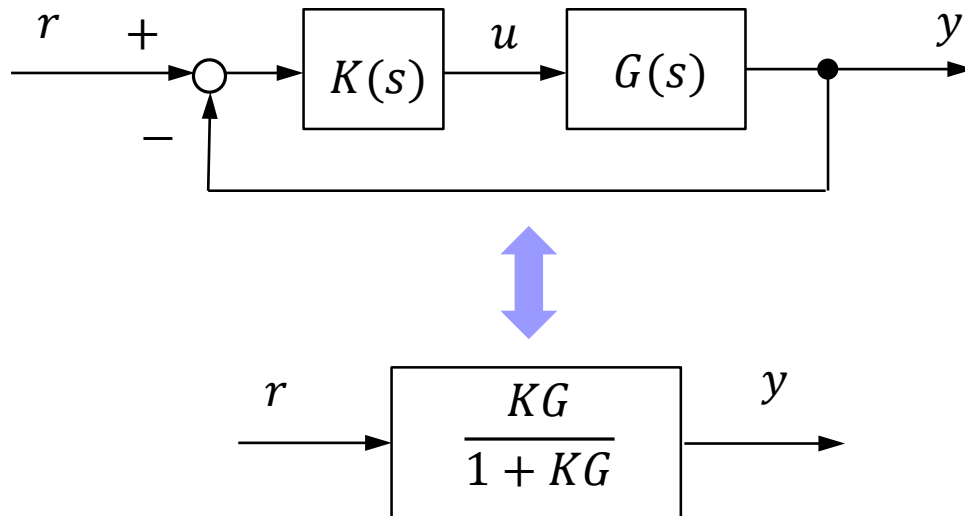
## そもそも... (復習)



$r$  から  $y$  までの伝達関数  $G_c(s)$  を求めよ.

$$K(s) = \frac{s+1}{s-3}, G(s) = \frac{4s+1}{s(s+1)} \quad \text{であるとき, 具体的に } G_c(s) \text{ を求めよ.}$$

# Motivation



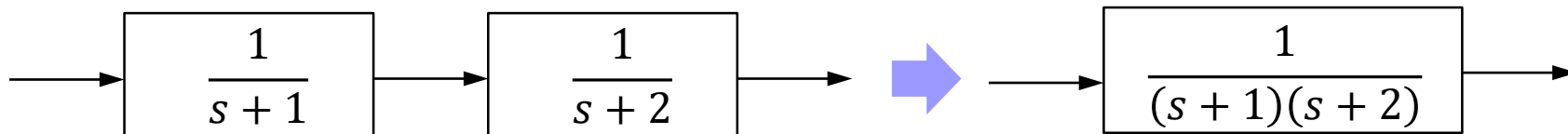
特性方程式  $1 + KG = 0$  の根が安定ならば、閉ループ系は安定

それだけでよいか？ No



# 結合系の特性

直列結合

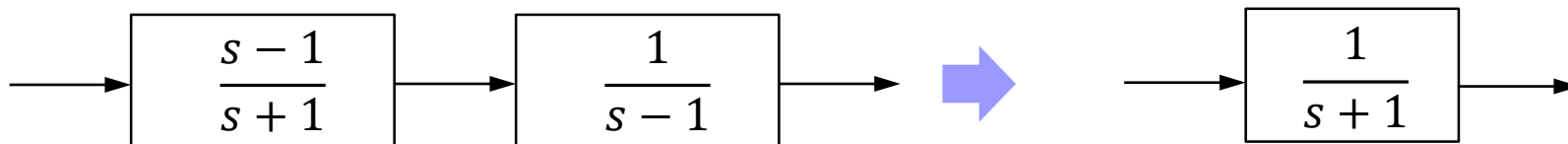


安定系

安定系

No Problem

安定系

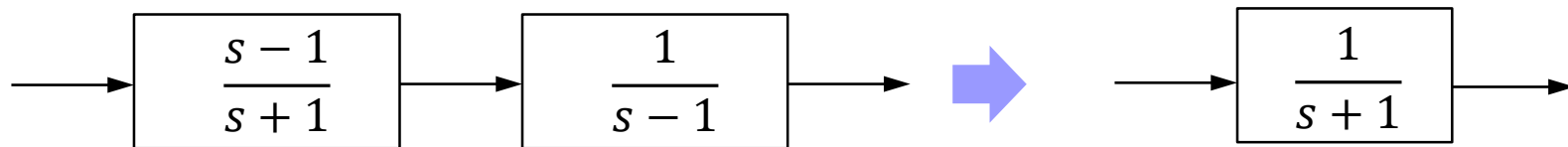


安定系

不安定系

これはほんとうに安定なのか？

結論からいえば、これは安定でない



結論からいえば, これは安定でない



初期値あるいは内部状態が関係

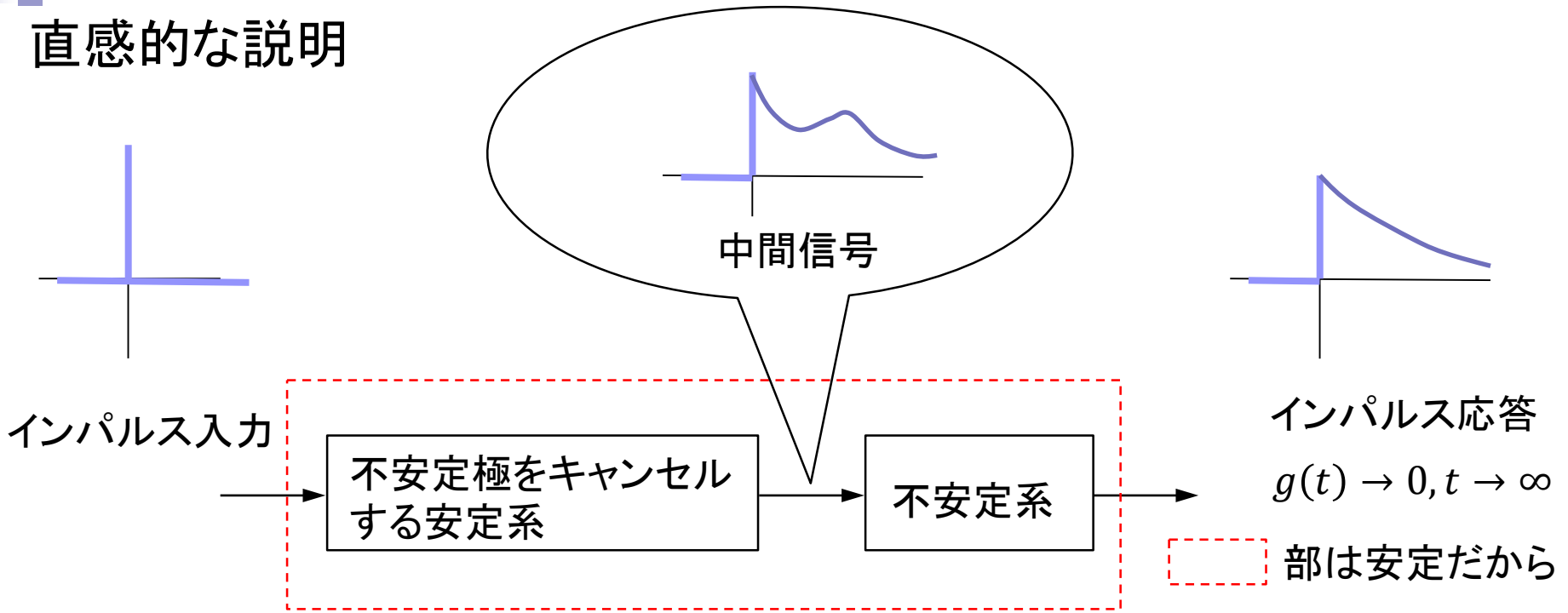


伝達関数だけを使って説明できない.

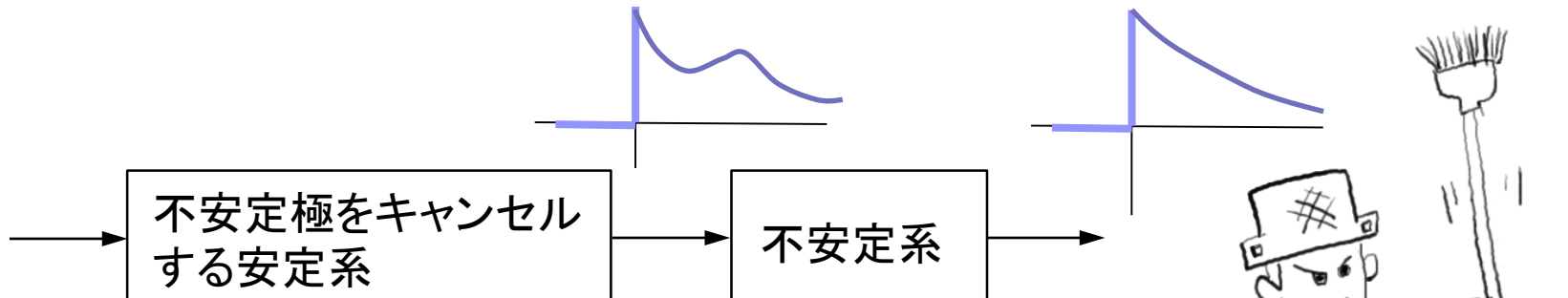
$$T \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = u(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad T(sY(s) - y(0)) + Y(s) = U(s)$$

初期値  $y(0) = 0$  のとき  $Y(s) = \frac{1}{Ts+1} U(s)$       伝達関数を考える際の初期値は0

# 直感的な説明



不安定系の出力を  $t \rightarrow \infty$  で 0 に近づけるような入力が存在



見かけ上, 安定なように見える.



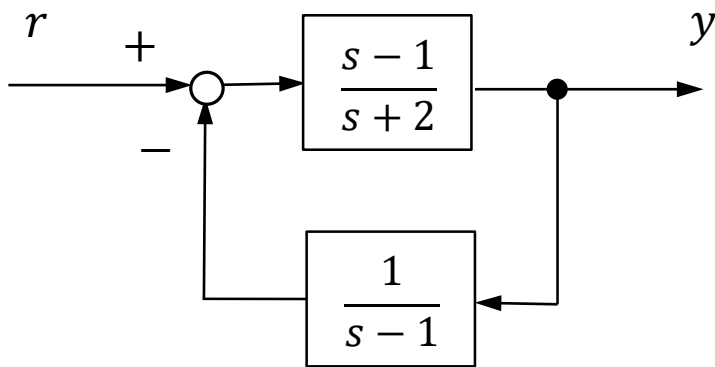
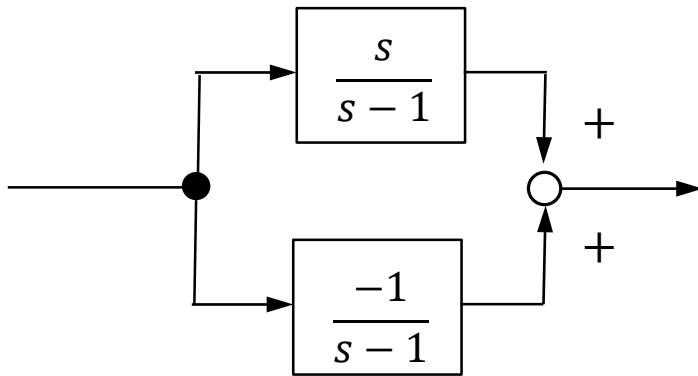
零でない傾斜角から運動を開始した際に  
ほうきを倒さない手の動かし方がある.



初期値(傾斜角)が異なっても, 同じ手の動き  
で安定になるか? なり得ない.  
初期値のミスマッチを吸収できないので, 不安定な  
極零相殺は許容できない.

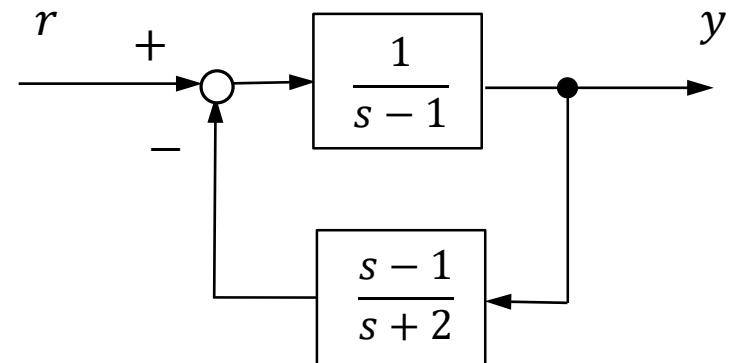
詳しくは教科書を読むこと.

計算せよ

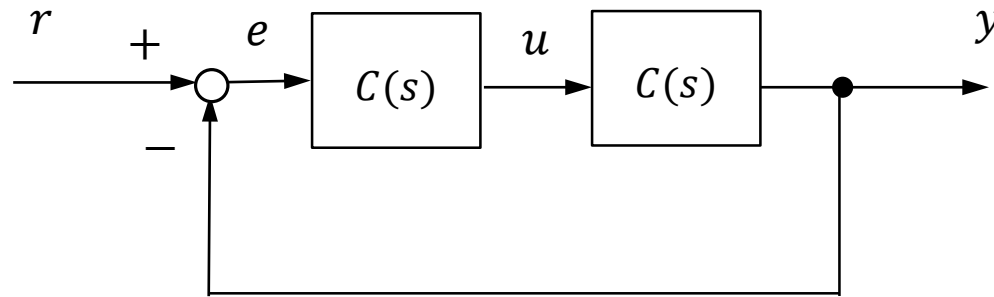


$r$  から  $y$  への伝達関数

影の不安定モードあり



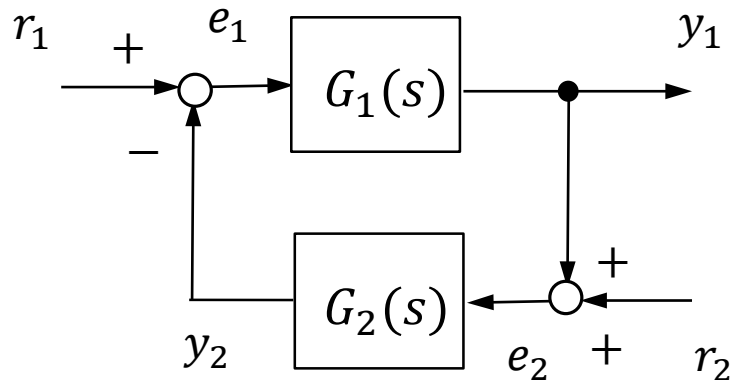
影の不安定モードなし



同じブロック線図中にも複数の信号が含まれるから、どこからどこへの伝達関数と明示的に示す。

先の例から、 $r$  から  $y$  への伝達関数に注目するだけでは不十分

## フィードバック制御系の安定性



$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = H(s) \begin{bmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{bmatrix} \quad H(s) = \begin{bmatrix} \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} & \frac{-G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \\ \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} & \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

スカラ伝達関数の安定性の拡張:

任意の有界入力  $(r_1, r_2)$  に対して出力  $(y_1, y_2)$  が有界となる  
とき、フィードバック制御系は安定(内部安定)であるという。

## フィードバック制御系の安定性

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} & \frac{-G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \\ \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} & \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

$H(s)$  の要素が全てプロパーとなるための必要十分条件:

$$1 + G_1(\infty)G_2(\infty) \neq 0 \dots (a)$$

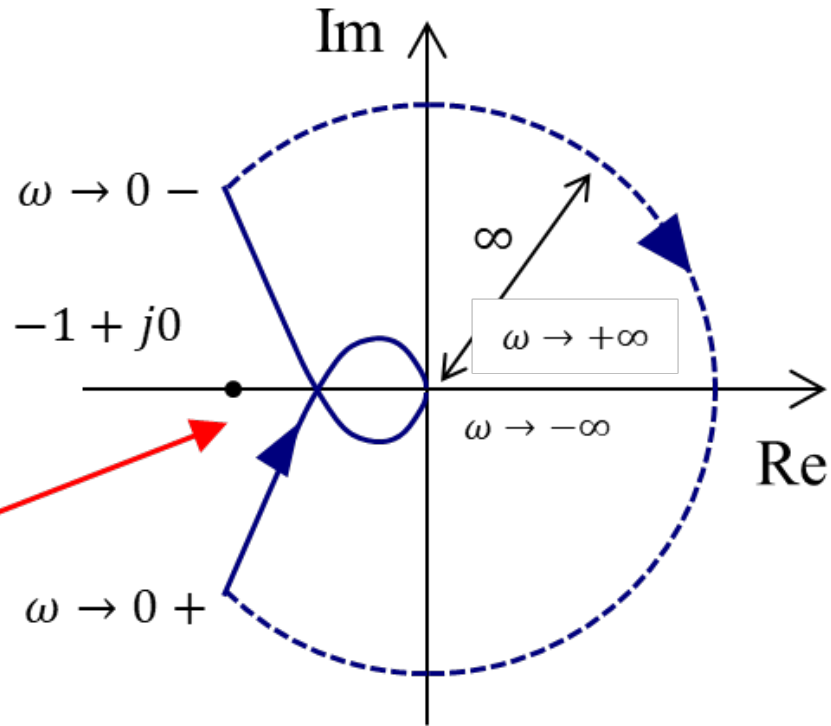
内部安定性の必要十分条件:

- (a) に加えて
- (b)  $1 + G_1(s)G_2(s)$  の零点は全て左半平面に存在する.
- (c)  $G_1(s)$  と  $G_2(s)$  の間に不安定な極零点消去が存在しない.



# ナイキストの安定定理

ナイキスト線図は, 直截的には各周波数での  $P(j\omega)$  のゲイン・位相を示すものだが,  $P(s)$  を含むフィードバック系の安定性にも関わる.

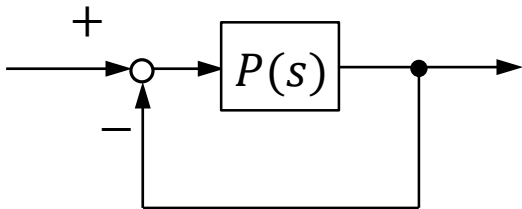


この点とナイキスト線図の相対関係が重要!

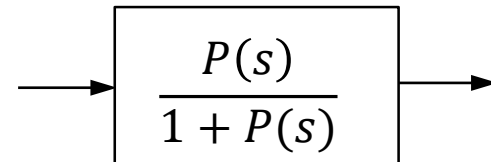
$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(2s+1)} \quad \text{のナイキスト線図}$$

ナイキストの安定定理は、開ループ伝達関数  $P(s)$  のナイキスト線図から、この伝達関数に**単一負フィードバック**を施した場合の閉ループ系の**安定性が**予言できる、という**驚くべき結果**である。

具体的には、ナイキスト線図が点  $-1 + j0$  を周回する数によって、閉ループ安定性が分かる。

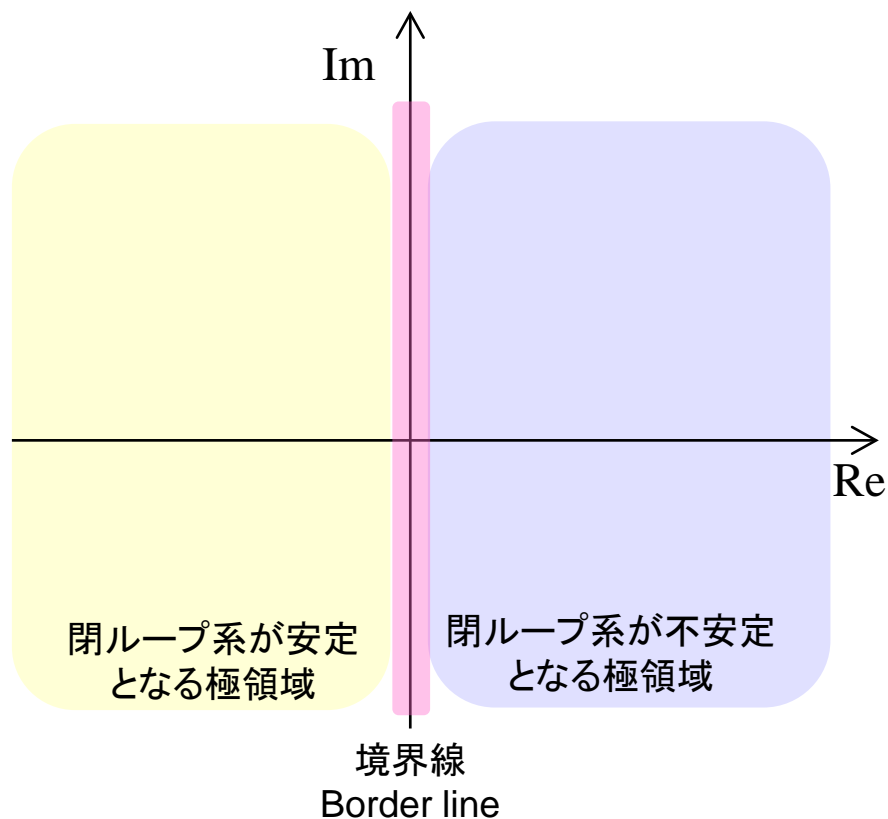


単一負フィードバック系  
(negative unity feedback system)



閉ループ伝達関数

すぐに分かる事実: 「ナイキスト線図が点  $-1 + j0$  上を通過するとき, 単一負フードバック系は安定限界である」



閉ループ極は  $1 + P(s) = 0$  の根

安定  $\Leftrightarrow$  不安定が切り替わるとき, 根のひとつは虚軸上にある



$1 + P(j\omega) = 0$  となる  $\omega \in \mathbb{R}$  が存在

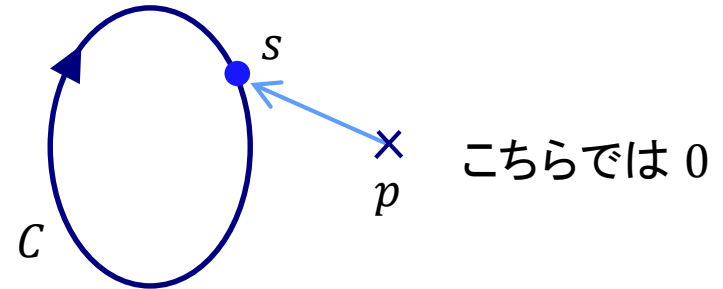
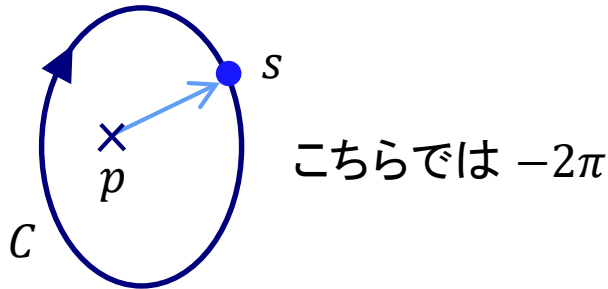


ナイキスト線図が点  $-1 + j0$  上を通過

事実: 「ナイキスト線図が点  $-1 + j0$  を周回する数が増えると, 閉ループ安定性に変化が生じる」

## ナイキストの安定定理

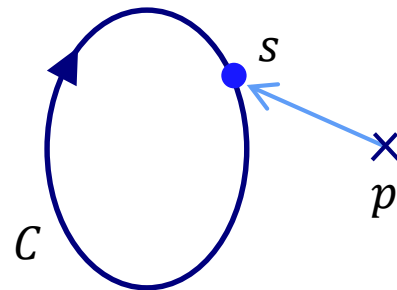
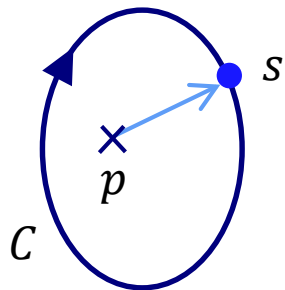
複素数  $s$  が閉路  $C$  上を時計回りに周回するとき、ベクトル  $s - p$  の偏角の正味の増加量を考える



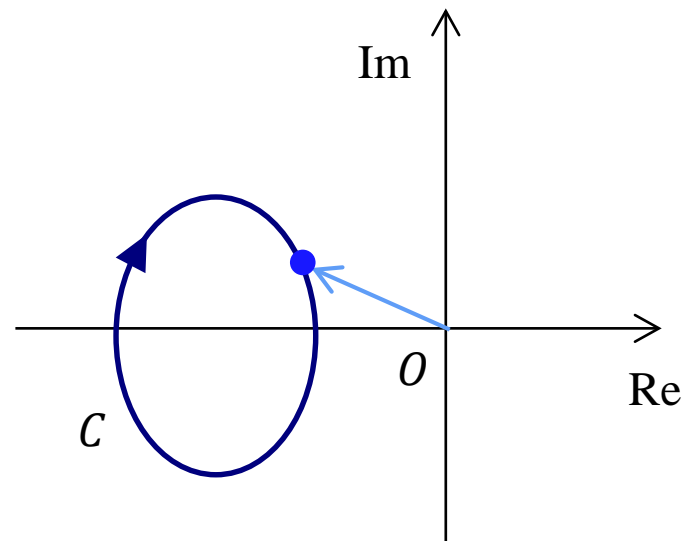
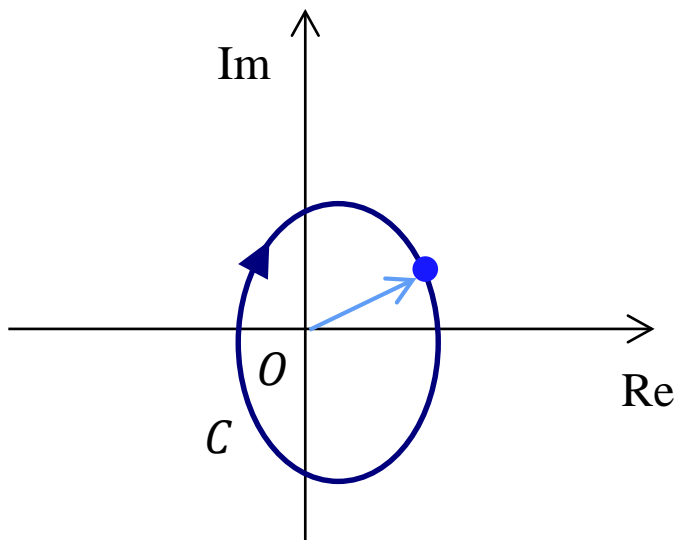
$\therefore p$  が  $C$  内に含まれるか否かで  $s - p$  の偏角の正味の増加量 が変わる.



$s - p$  の軌跡を複素平面にプロットすると？



$P(s) := s - p$  の軌跡を複素平面にプロットすると?



$P(s) = s - p$  の偏角の正味の増加量 =

$P(s) = s - p$  の軌跡を複素平面にプロットした時の原点まわりの周回数

$$P(s) = \frac{\prod(s - z_i)}{\prod(s - p_i)} \quad \text{と書けるとき}$$

$$\rightarrow \angle P(s) = \sum_i \angle(s - z_i) - \sum_k \angle(s - p_k)$$

$P(s)$  の偏角は  
( $s - z_i$  の偏角の総和)  $-$  ( $s - p_k$  の偏角の総和)



$P(s)$  の軌跡を複素平面にプロットした時の原点まわりの周回数

$$=(s - z_i \text{ の偏角の総和}) - (s - p_k \text{ の偏角の総和})$$

### 偏角原理

$P(s)$  の軌跡は原点まわりの時計方向に  
{( $C$ 内の零点の数)  $-$  ( $C$ 内の極の数)}回だけ、周回する。

ある領域内の  $P(s)$  の零点と極の数の差が、軌跡の  
原点まわりの周回数から分かる。

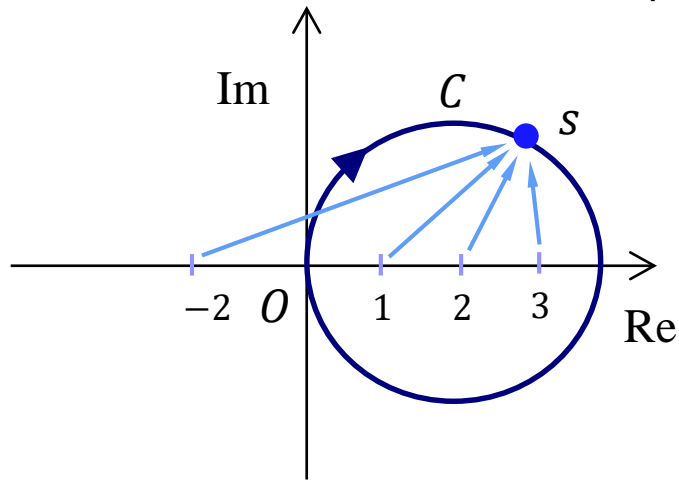


どのように安定判別に  
役立てるか？

例:  $P(s) = \frac{s - 1}{(s + 2)(s - 2)(s - 3)}$

➡  $\angle P(s) = \angle(s - 1) - \angle(s + 2) - \angle(s - 2) - \angle(s - 3)$

経路  $C$  は 1, 2, 3 を含むが,  $-2$  を含まない.



➡  $s$  が  $C$  上を周回するとき

$\angle(s - 1), \angle(s - 2), \angle(s - 3)$

の増分はそれぞれ  $-2\pi$

$\angle(s + 2)$  の増分は 0

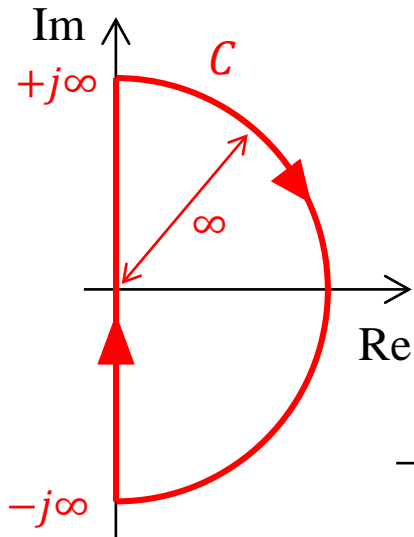
➡  $\angle P(s)$  の増分は  $(-2\pi) - 2 \times (-2\pi) = -2\pi$



$P(s)$  の軌跡は原点を(半時計周りに)1回周回する.

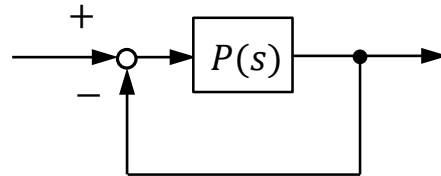
➡  $C$  内に含まれる極と零点の数の差が1であることが分かる.





とすれば,  $P(s)$  の右半平面内の零点と極の数の差  
 が分かる.

$P(s)$  は既知なので,  $P(s)$  の不安定零点と極  
 の数の差が知りたいわけではない.



特性方程式  $1 + P(s) = 0$



$1 + P(s)$  の右半平面内零点: **不安定閉ループ極**

$1 + P(s)$  の右半平面内極: **不安定開ループ極**

$1 + P(s)$  の不安定零点の数を知りたい!  $1 + P(s)$  の不安定極の数は既知

しかも

$1 + P(s)$  の軌跡の原点まわりの周回数 =  $P(s)$  の軌跡の  $-1 + j0$  まわりの周回数



不安定閉ループ極の数が分かる. (0 なら安定)

$P(s)$  自身が安定であるとき, ナイキスト線図(軌跡)が  $-1 + j0$  まわりを周回しなければ, 不安定閉ループ極の数は 0, すなわち閉ループ系は安定 (必要十分条件)

$P(s)$  が不安定極をもつときの条件は教科書を参照. (0 でない特定の回数周回することが安定性の必要十分条件)

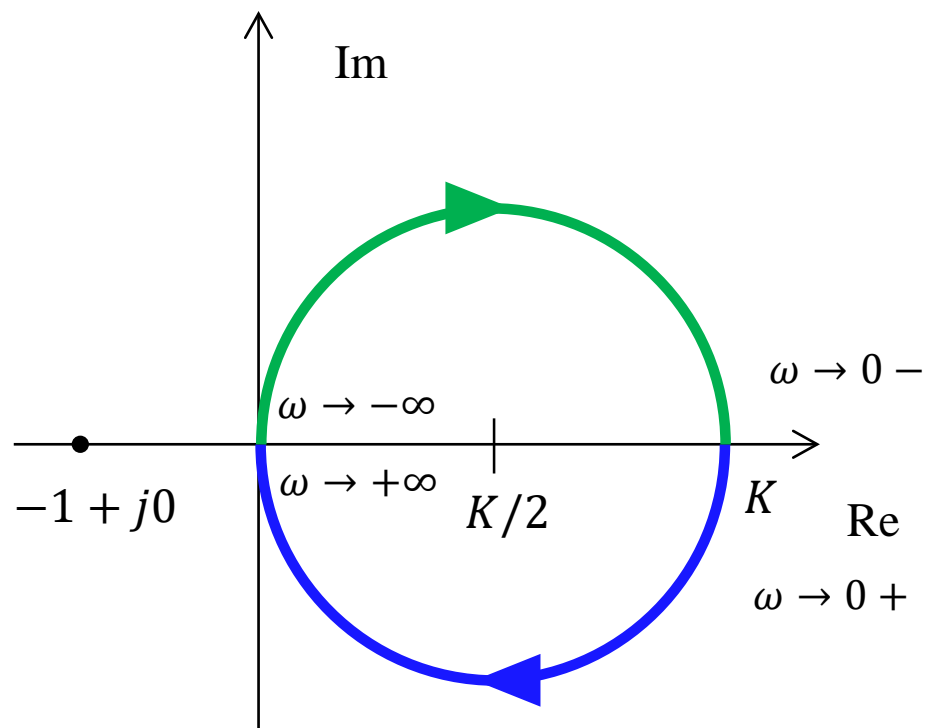
1次系のナイキスト線図

$$P(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

ナイキスト線図は  $-1 + j0$  を  
かすめることもない



単一負フィードバック系は  
決して不安定にならない



2次系のナイキスト線図

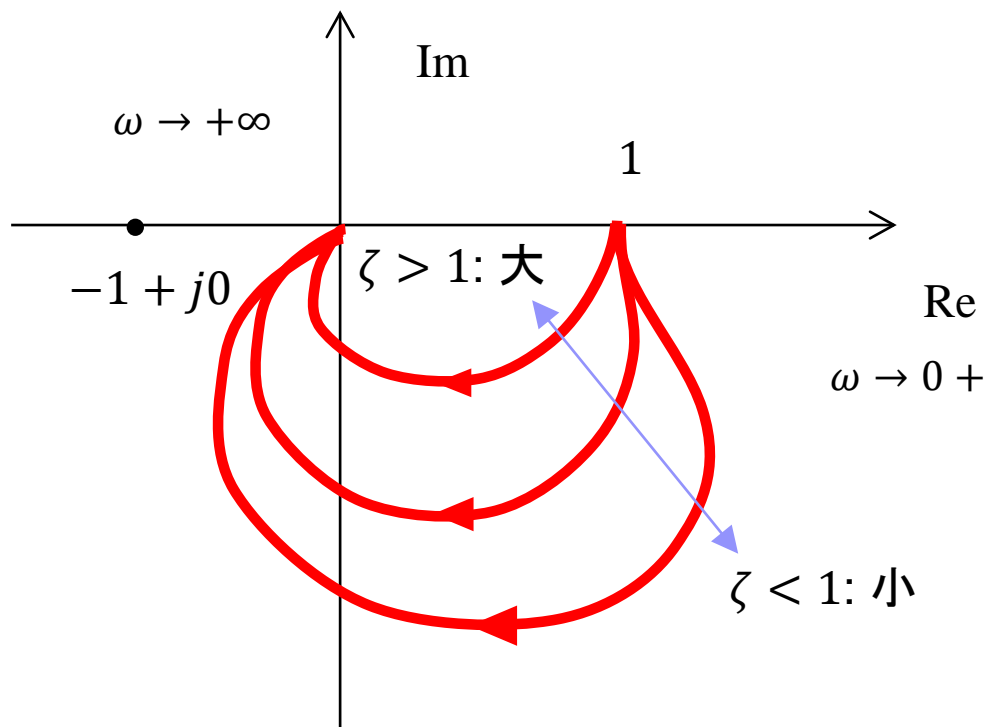
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

(複素共役(振動系)の場合を含む)

ナイキスト線図は  $-1 + j0$  を  
かすめることもない



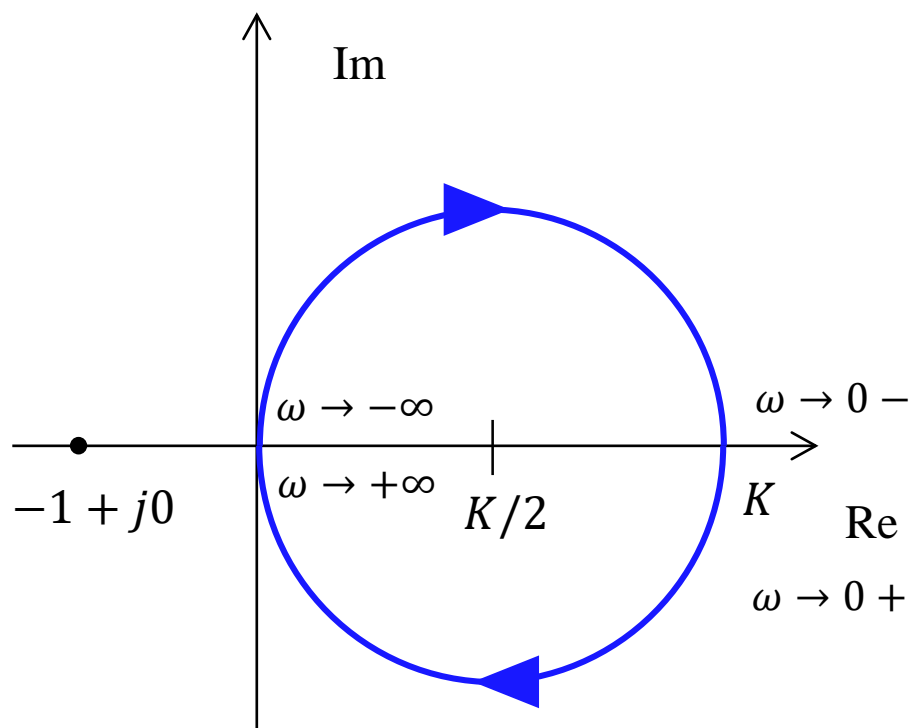
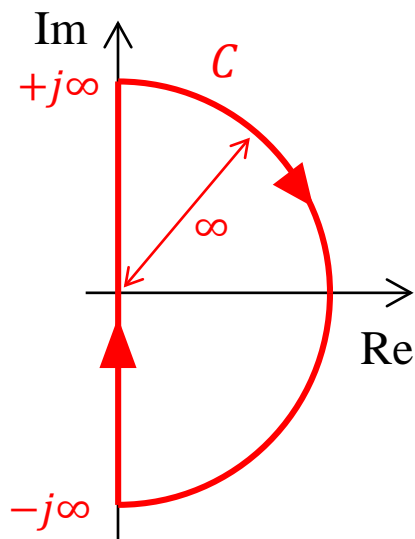
このような2次系では同様に,  
単一負フィードバック系は  
決して不安定にならない



# ナイキストの安定定理

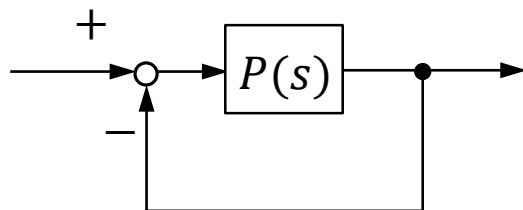
ナイキスト線図: 伝達関数  $P(s)$  に対して,  $s = j\omega$  とし,  $\omega$  を  $-\infty$  から  $+\infty$  まで変化させたときの値  $P(j\omega)$  を複素平面上にプロットしたもの.

$$P(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$



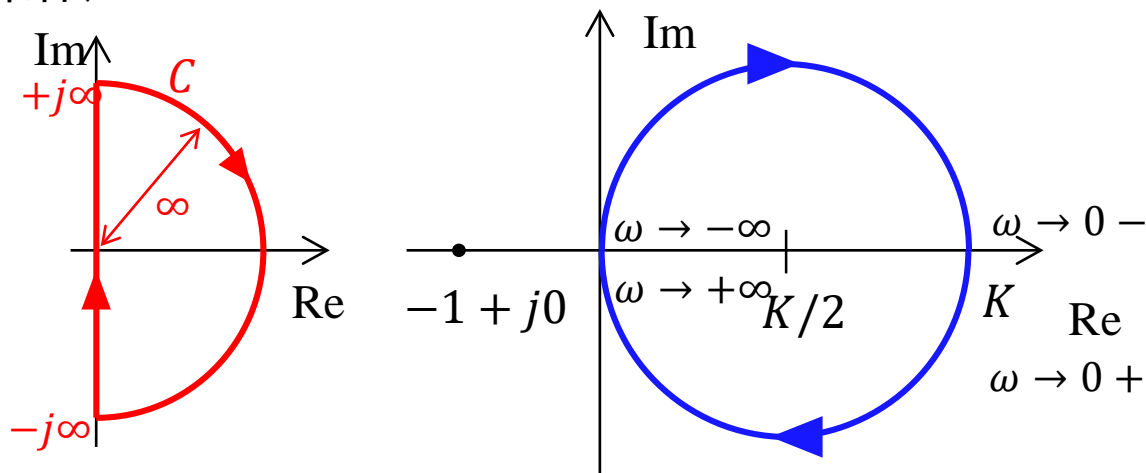
実際にはこのような閉路を考えている.  
 $P(s)$  が厳密にプロパーなら  $\omega \rightarrow \infty$  で  $P(j\omega) \rightarrow 0$

ナイキストの安定定理: 開ループ伝達関数  $P(s)$  のナイキスト線図が点  $-1 + j0$  を周回する数から, 単一負フィードバック系の安定性が分かる.



単一負フィードバック系

$P(s)$  自身が安定であるとき, ナイキスト線図(軌跡)が  $-1 + j0$  まわりを周回しなければ, 不安定閉ループ極の数は 0, すなわち閉ループ系は安定 (必要十分条件)



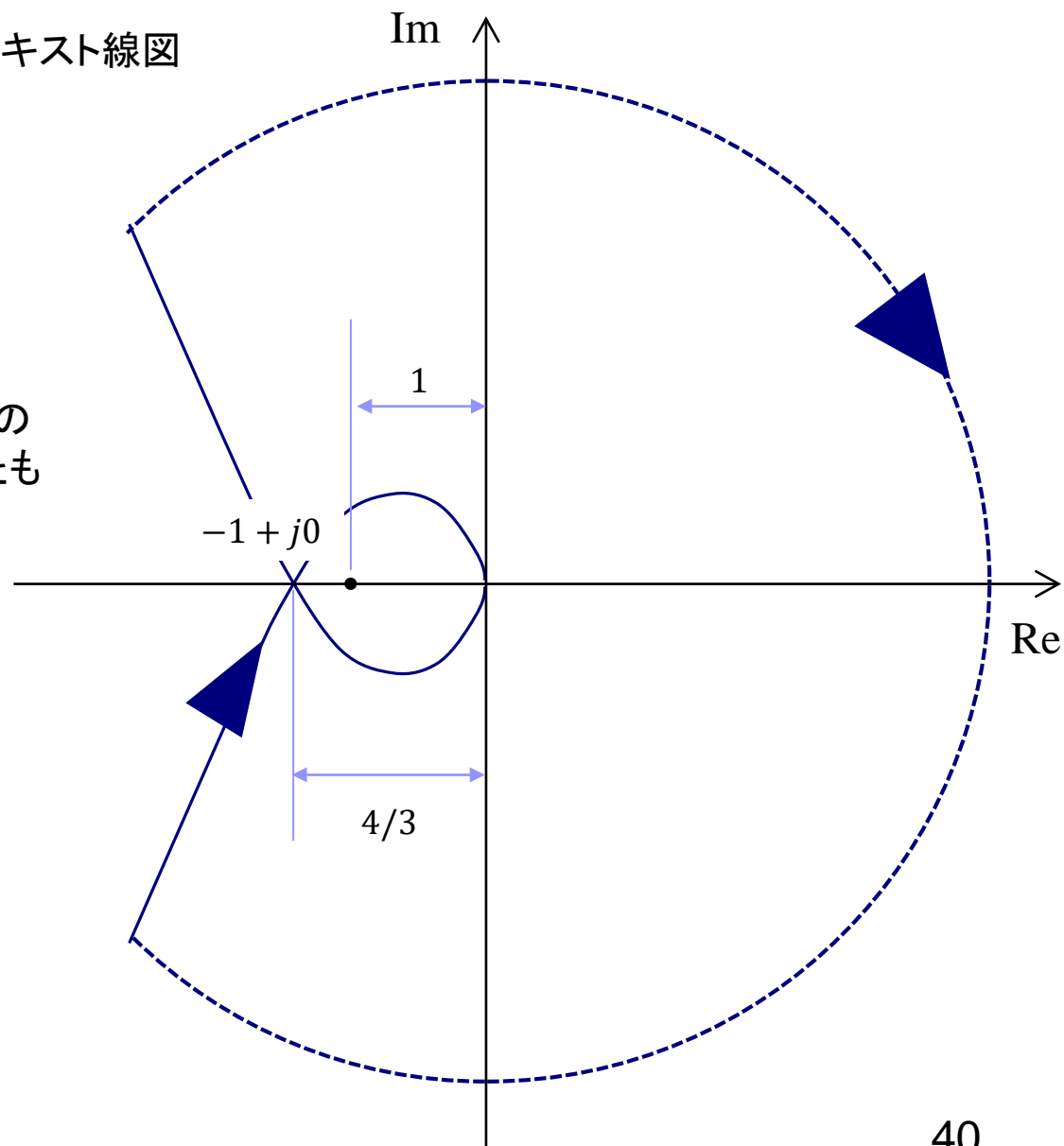


$$P(s) = \frac{2}{s(s+1)(2s+1)} \quad \text{のナイキスト線図}$$

分子が2なので、ナイキスト線図は元のものから原点を中心に2倍拡大されたものになる

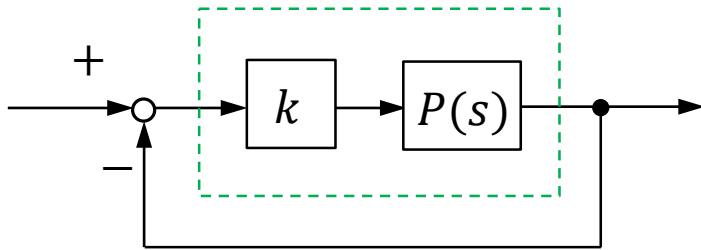


$-1 + j0$  まわりを周回するので、閉ループ系は不安定





# 安定余裕



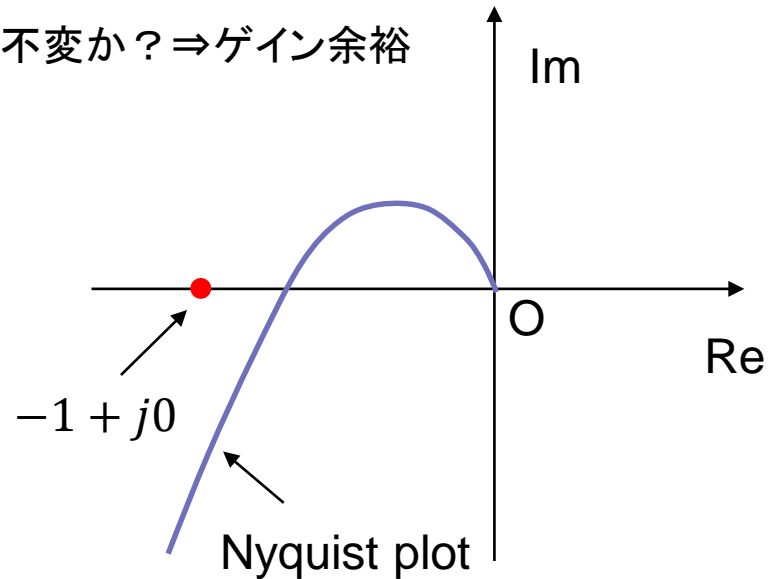
ゲイン補償を挿入した場合には開ループ伝達関数が  $P(s) \rightarrow kP(s)$  となったと見なせる



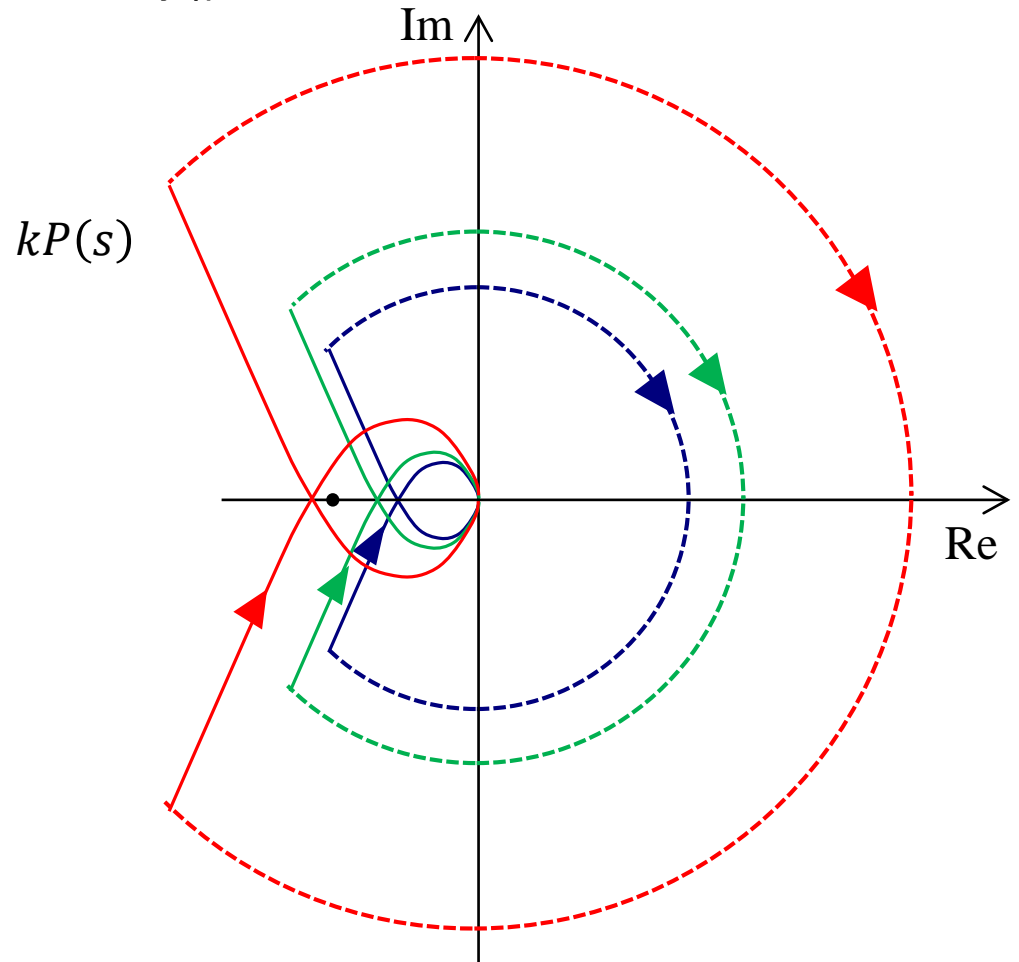
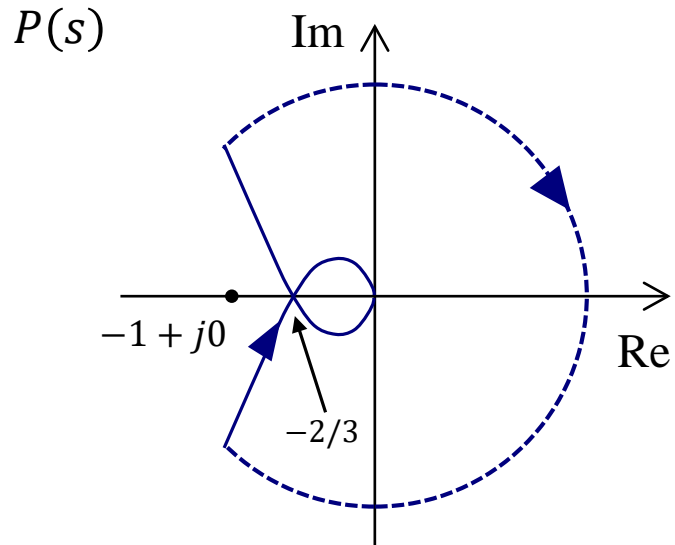
$P(s) \rightarrow kP(s)$  となる時、ナイキスト線図は原点まわりに拡大される。



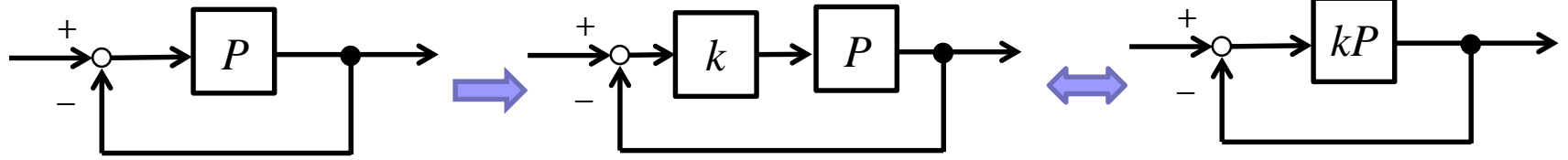
どこまで拡大しても周回数は不変か？ $\Rightarrow$ ゲイン余裕



どこまで拡大しても周回数は不変か？⇒ゲイン余裕

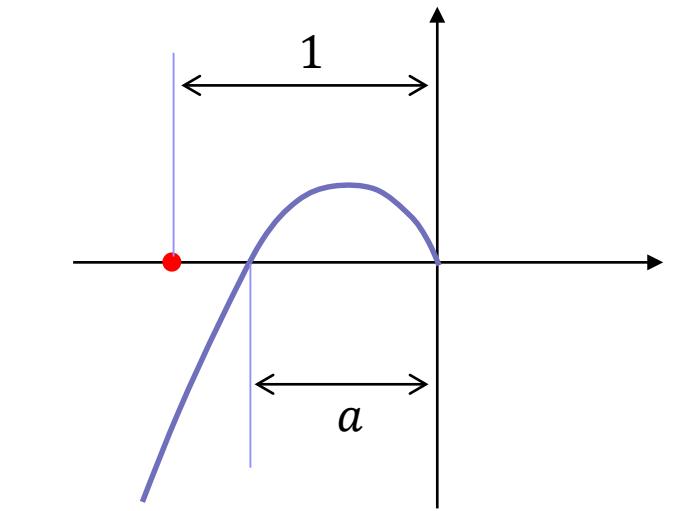
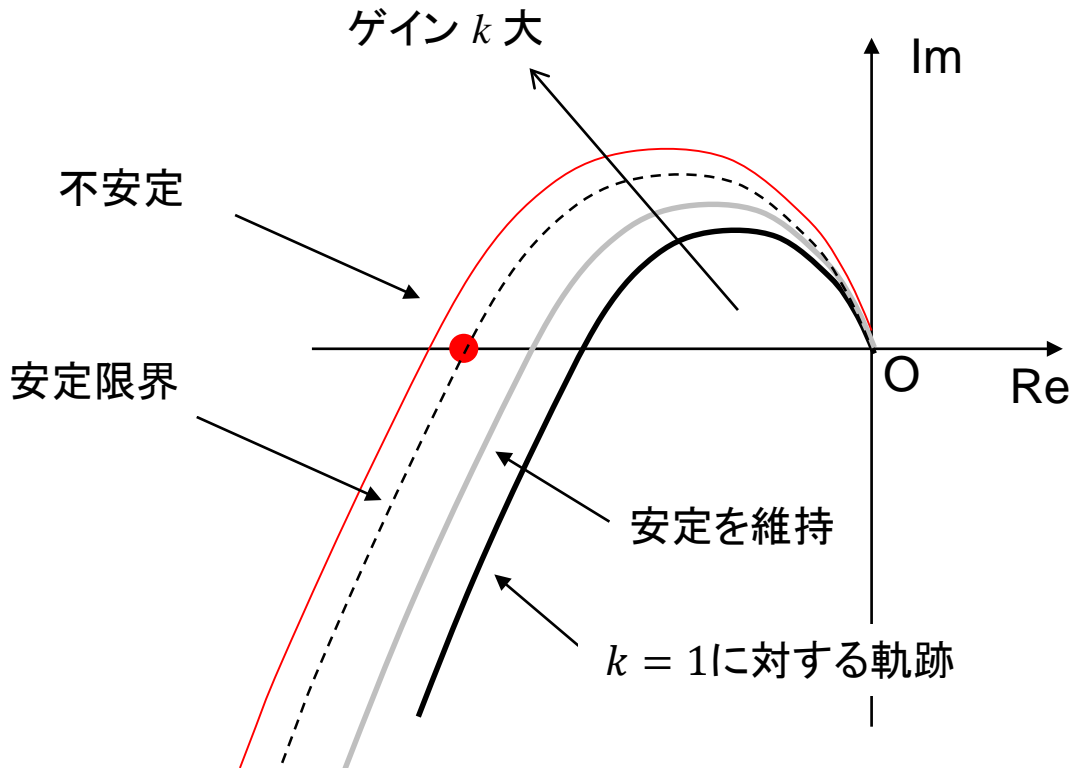


この場合は3/2倍以上だと周回数が変化  
⇒ 安定なゲインの範囲は  $0 < k < 3/2$



ゲイン補償

軌跡の拡大

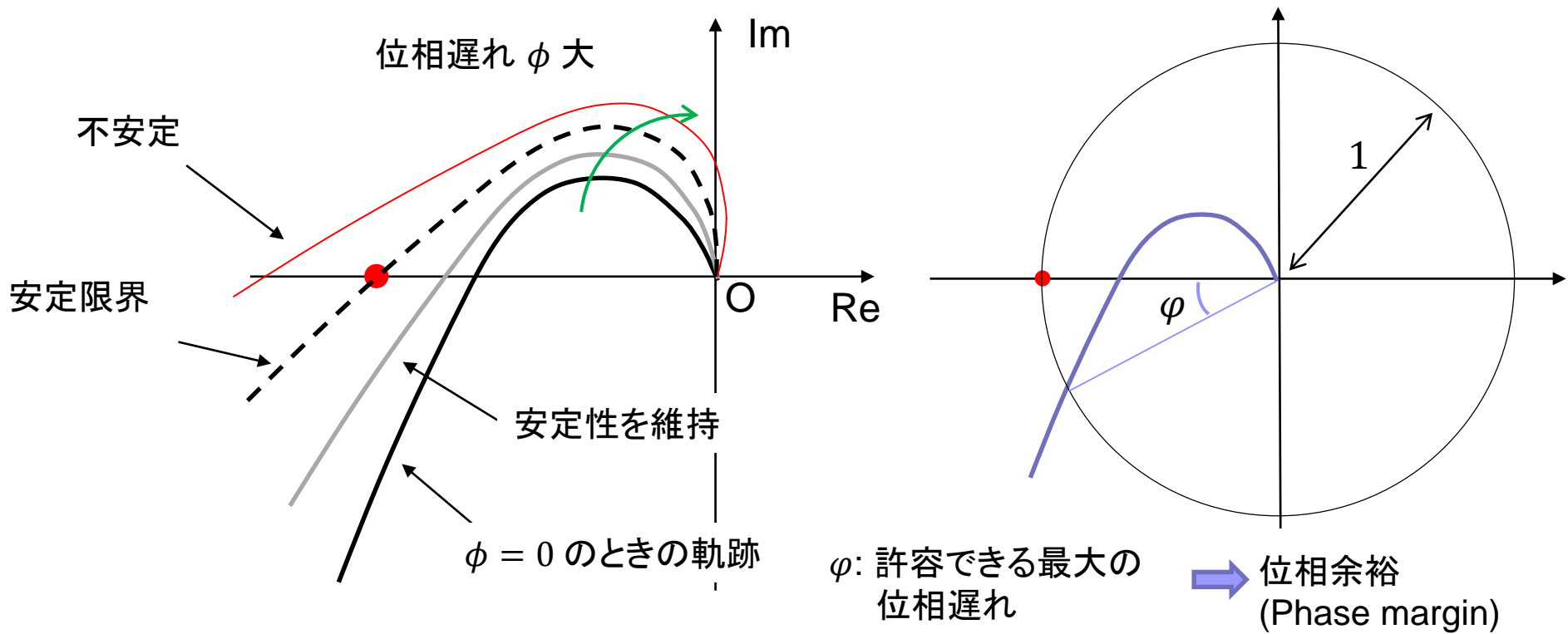
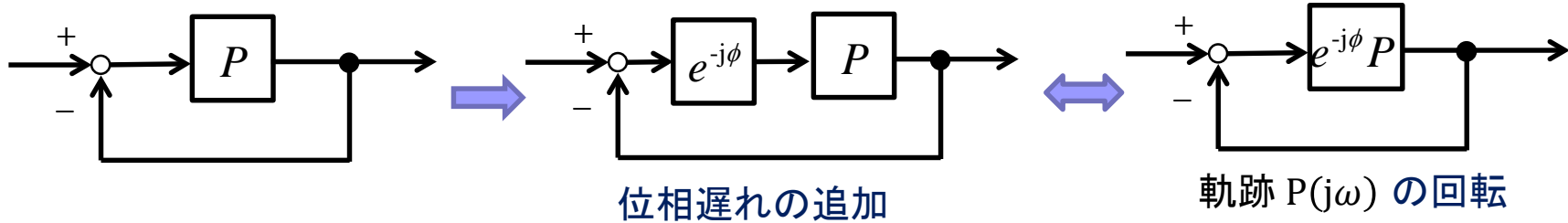


$1/a$ : 許容できる最大のゲイン

➡ ゲイン余裕  
(Gain margin)

ナイキスト線図からゲイン余裕を求める手順は、スカラーパラメータであるゲインの変化が、ナイキスト線図の拡大・縮小に対応するという性質をうまく利用している.

ここでもやはり、ゲインがスカラーパラメータであること、すなわち制御対象がSISO系であることが重要である.



ゲイン余裕・位相余裕は, 現在の制御対象にどの程度の変動が加わっても安定性が維持できるかの定量的な尺度を与えている.



安定余裕の概念



制御系には, パラメータの変動など不確定要因が存在した場合にも, 安定性を維持する性質が望まれる.



ロバスト性の概念

(ロバスト性を保証するための理論  
⇒ ロバスト制御理論)

## To Do (今回)

- 1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする)
- 2) 復習 (教科書 6章)
- 3) 教科書 7.1～7.4 を読む.
- 4) Web にアップロードする演習問題 (4) をやってくる.