

システム制御 I

4学期

月 5, 6限 14:00-16:10

木 3, 4限 11:00-13:10

5号館 第15講義室 (システムコース)

担当: 平田 健太郎

1/23 第12回

周波数応答

Schedule

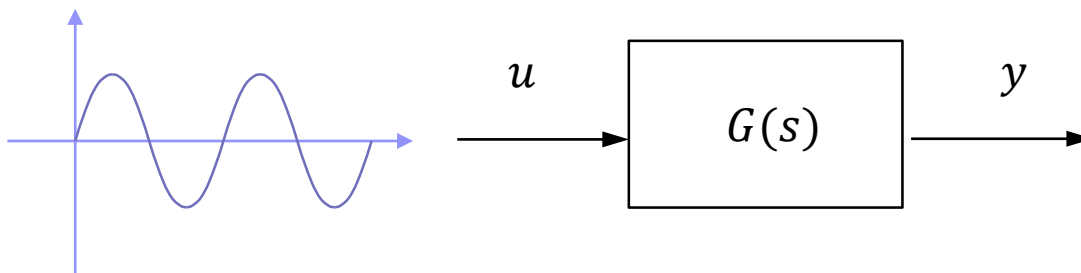
- | | | |
|-----------------|----------|------|
| 1. 12/2 (today) | 9. 1/9 | 中間試験 |
| 2. 12/5 | 10. 1/16 | |
| 3. 12/9 | 11. 1/20 | |
| 4. 12/12 | 12. 1/23 | |
| 5. 12/16 | 13. 1/27 | |
| 6. 12/19 | 14. 1/30 | |
| 7. 12/23 | 15. 2/3 | |
| 8. 1/6 | 16. 2/6 | 期末試験 |

前回のおさらい

根軌跡

周波数応答

安定な伝達関数システムに正弦波入力を印加すると？



$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad u(t) = \sin t \quad \rightarrow \quad u(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$y(s) = G(s)u(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+1} \right)$$

$$\rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+1} \right) \right] = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$$

$$\alpha \sin t + \beta \cos t = \gamma \sin(t + \phi) = \gamma(\sin t \cos \phi + \cos t \sin \phi)$$

$$\alpha = \gamma \cos \phi, \beta = \gamma \sin \phi \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \phi = \text{atan}(\beta/\alpha)$$

$$\begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma = 1/\sqrt{2} \\ \phi = \text{atan}(-1) = -\pi/4 \end{array}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

時間が十分に経過すると($t \rightarrow \infty$)右辺第1項は0に収束.

定常応答は, 振幅が $1/\sqrt{2}$ 倍され, 位相が $\pi/4$ だけ遅れた, 入力と同じ周波数の正弦波となる.

周波数応答の原理

周波数応答

- 正弦波入力に対する定常応答

仮定: $G(s)$ は安定 $\Leftrightarrow g(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$

キーポイント: 合成積 $g(t) * u(t)$ をもとに考える.

“定常状態”をいかに表現するか？

$y_s(t)$: 入力 $e^{j\omega t}$ に対する定常応答

若者と老人の視点の違い



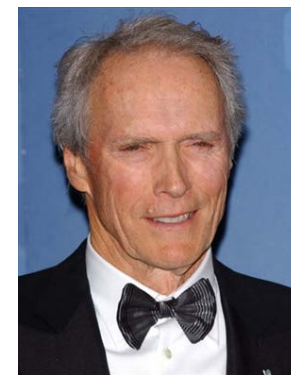
若者の今 ($t = 0$)

無限の彼方(未来) ($t = \infty$)

無限の彼方(過去) ($t = -\infty$)

老人の今 ($t = 0$)

$$y_s(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau, u(\tau) = e^{j\omega\tau}$$



$$\begin{aligned}
y_s(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t g(t - \tau) e^{j\omega\tau} d\tau \\
&\quad (\eta = t - \tau) \\
&= \int_{-\infty}^0 g(\eta) e^{j\omega(t-\eta)} (-d\eta) \\
&= \int_0^{\infty} g(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta e^{j\omega t} \\
&= [G(s)]_{s=j\omega} e^{j\omega t}
\end{aligned}$$

$G(j\omega)$: Frequency Response Function
 周波数応答関数

事実: 安定な伝達関数に正弦波信号を入力すると, 定常状態では同じ周波数の正弦波状信号が出力される.



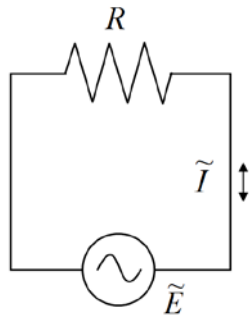
安定な伝達関数に正弦波入力を印加した時の定常応答を周波数応答と定める.

$$y_s(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t g(t - \tau) e^{j\omega\tau} d\tau = [G(s)]_{s=j\omega} e^{j\omega t}$$

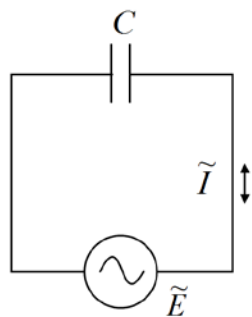
$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

$G(j\omega) = [G(s)]_{s=j\omega}$: 周波数応答関数
(周波数伝達関数)

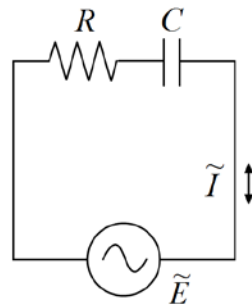
交流回路の複素インピーダンスと概念は同じ



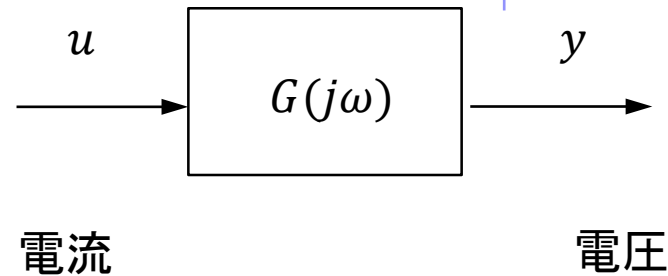
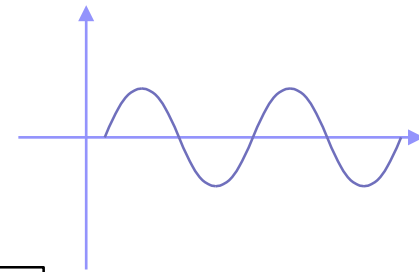
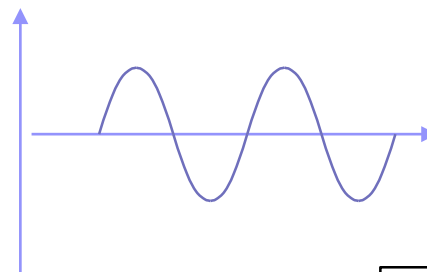
$$\tilde{E} = R\tilde{I} = RI_m \sin \omega t$$



$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \frac{1}{C} \int \tilde{I} dt \\ &= -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t \\ &= \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \tilde{E}_r + \tilde{E}_c \\ &= RI_m \sin \omega t - \frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t \\ &= I_m \left(R \sin \omega t - \frac{1}{\omega C} \cos \omega t \right) \end{aligned}$$



複素量として $G(j\omega)$ をプロットすることによって
その性質を把握できる.

角周波数 ω は実数である. $\omega \in [-\infty, +\infty]$

ω を媒介変数として, 各 ω に対する $G(j\omega)$ の値を複素平面上にプロットしたもの

➡ ナイキスト線図 (Nyquist diagram)

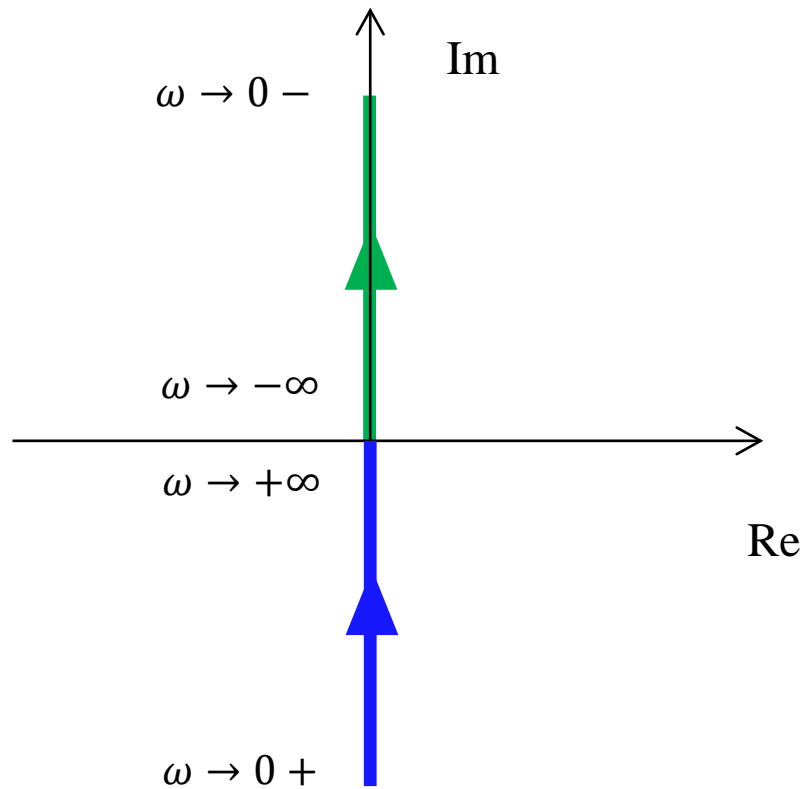
ゲイン $|G(j\omega)|$ と位相 $\angle G(j\omega)$ を分離して, (それぞれ実数なので), 対周波数のプロット2つを一組として表現したもの

➡ ボーデ線図 (Bode diagram)

ナイキスト線図の例

積分要素のナイキスト線図

$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$$



1次系のナイキスト線図 $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}, K = 1 \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$

$K \neq 1$ のとき, 拡大・縮小

$$\frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1 - j\omega T}{1 + \omega^2 T^2} =: x(j\omega) + jy(j\omega)$$

$$x(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}, \quad y(j\omega) = \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\left(x(j\omega) - \frac{1}{2}\right)^2 = \left\{\frac{2 - (1 + \omega^2 T^2)}{2(1 + \omega^2 T^2)}\right\}^2 = \left\{\frac{1 - \omega^2 T^2}{2(1 + \omega^2 T^2)}\right\}^2 = \frac{1 - 2\omega^2 T^2 + \omega^4 T^4}{4(1 + \omega^2 T^2)^2}$$

$$y(j\omega)^2 = \frac{4\omega^2 T^2}{4(1 + \omega^2 T^2)^2}$$

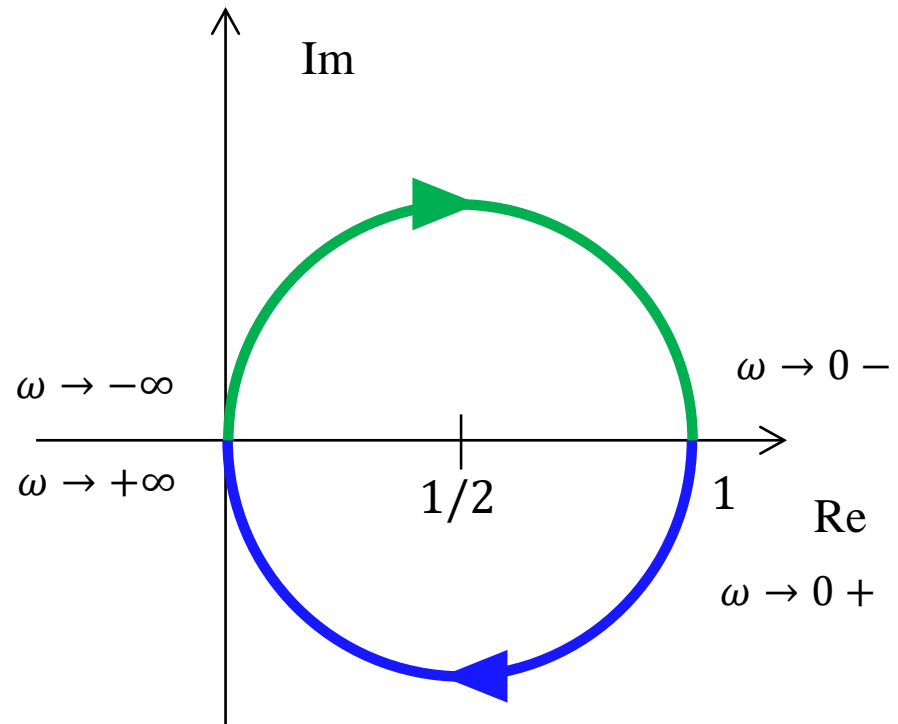
$$\rightarrow \left(x(j\omega) - \frac{1}{2}\right)^2 + y(j\omega)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

1次系のナイキスト線図 $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}, K = 1 \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$

$$x(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}, \quad y(j\omega) = \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

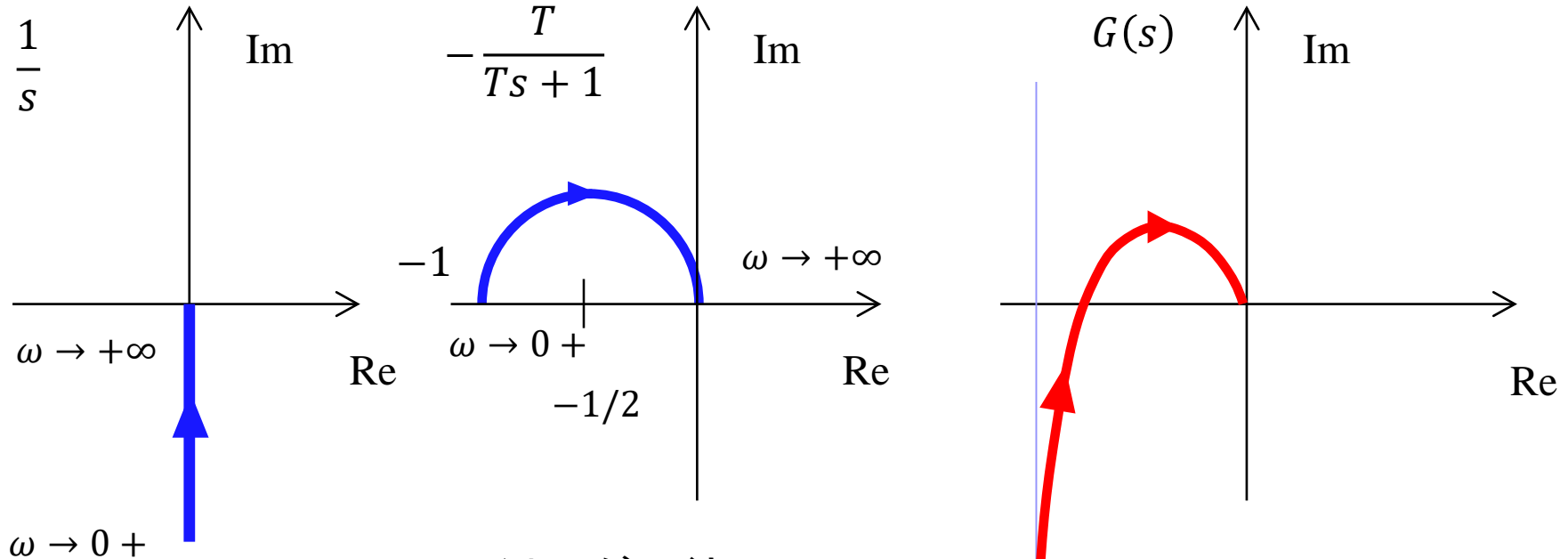
$$\left(x(j\omega) - \frac{1}{2}\right)^2 + y(j\omega)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

➡ 円の方程式



直列結合系のナイキスト線図は、部分分数展開して、各周波数におけるベクトルの和から求めることができる。

サーボ系
$$G(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{Ts + 1} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1}$$



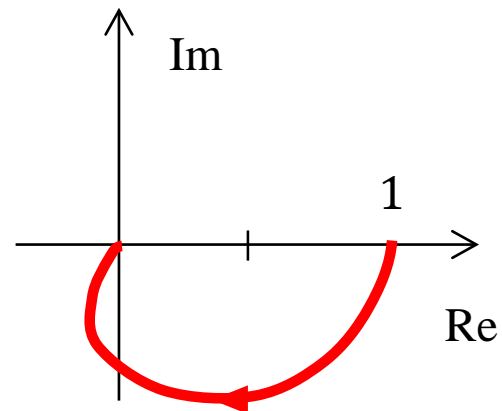
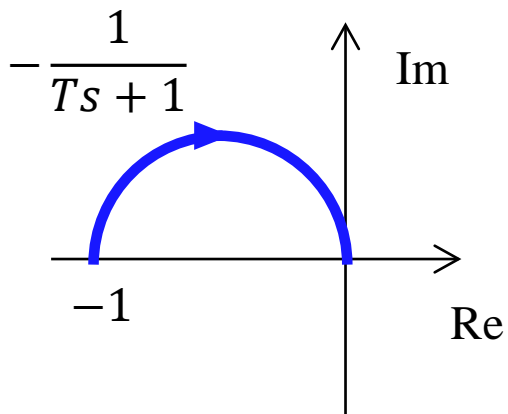
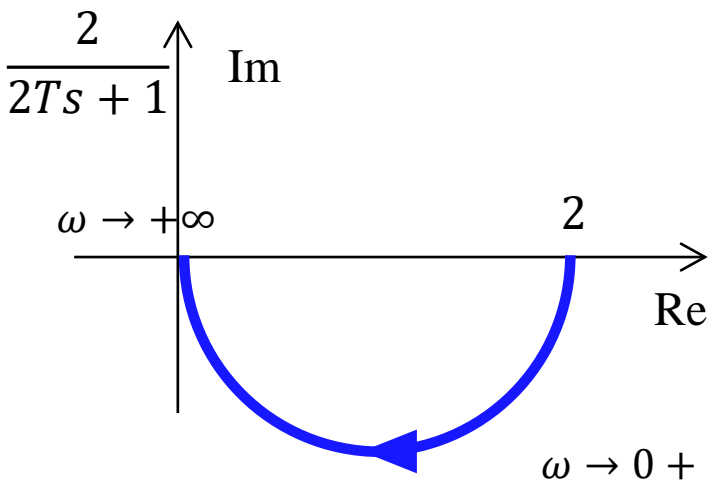
マイナスがつくと
ナイキスト線図は原点について
点対称に反転

2次系のナイキスト線図 (1次系の積の場合(重根でない))

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} = \frac{1}{T_1 - T_2} \left(\frac{T_1}{T_1s + 1} - \frac{T_2}{T_2s + 1} \right)$$

$T_1 = 2T, T_2 = T$ とすると

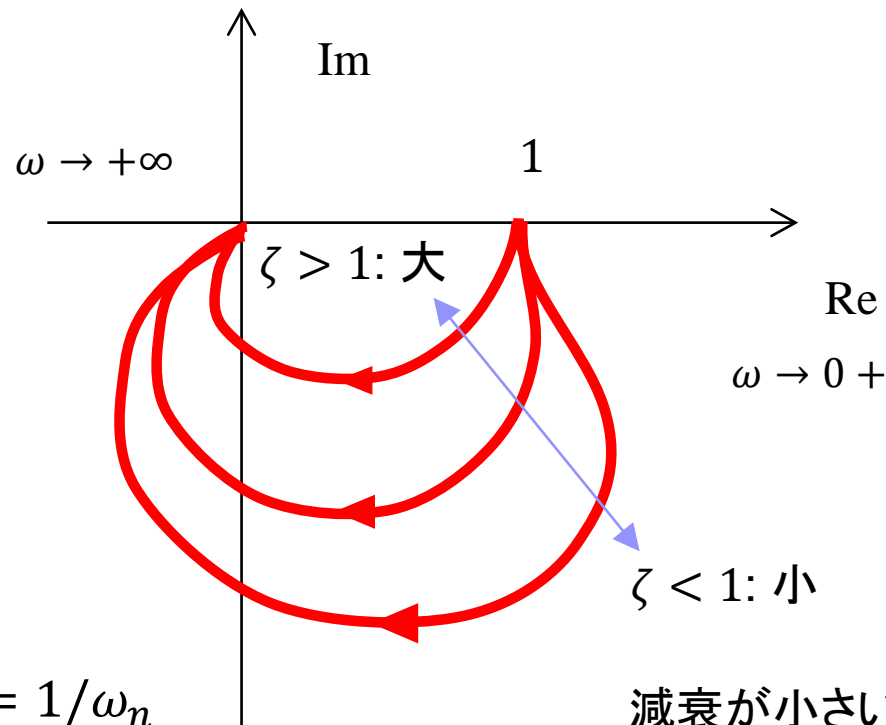
$$G(s) = \frac{1}{T} \left(\frac{2T}{2Ts + 1} - \frac{T}{Ts + 1} \right) = \frac{2}{2Ts + 1} - \frac{1}{Ts + 1}$$



2次系のナイキスト線図

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

(複素共役(振動系)の場合を含む)



$\zeta = 1$ のとき
重根

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$
$$= \frac{1}{(Ts + 1)^2}, \quad T = 1/\omega_n$$

減衰が小さいと中間周波数で
ゲインが大きくなる。

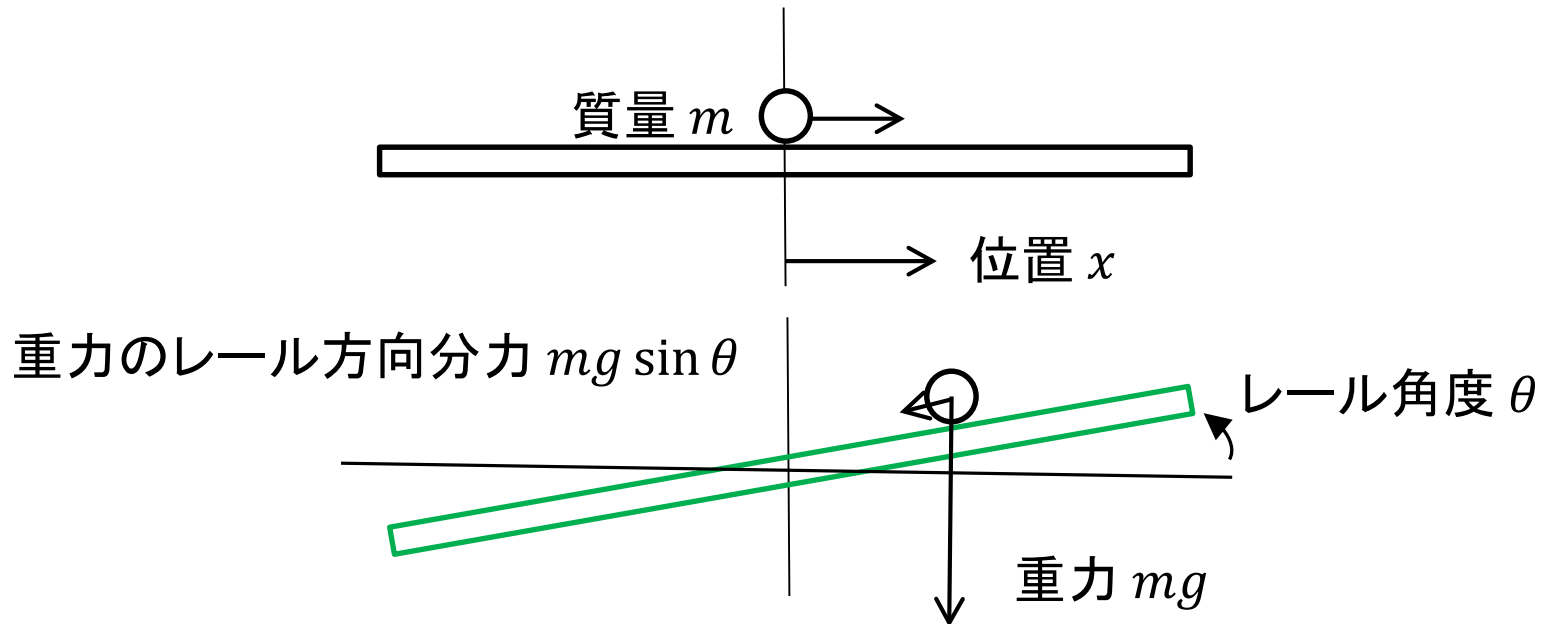
講義第1, 2回目の続き



Ball & Beam のオフライン計算によらない
安定化方法は？



伝達関数を求める



摩擦・空気抵抗なし

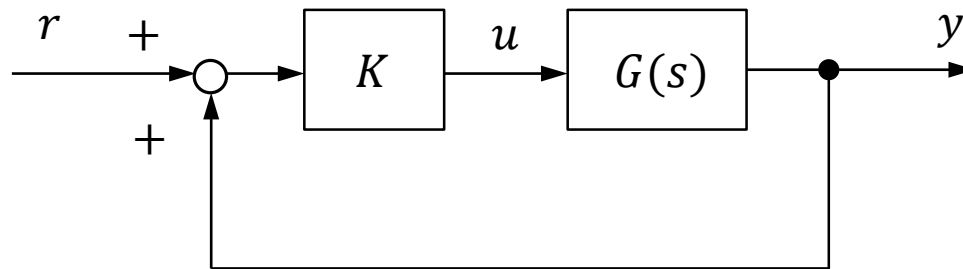
$$\text{運動方程式 } m\ddot{x} = -mg \sin \theta \quad \xrightarrow{\quad} \quad \ddot{x} = -g \theta \quad \xrightarrow{\quad \mathcal{L} \quad} \quad x(s) = -\frac{g}{s^2} \theta(s)$$

線形近似 $\sin \theta \simeq \theta$

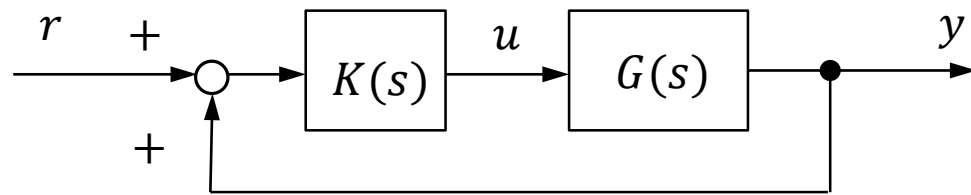


レール角度 θ

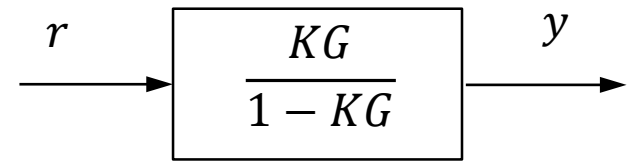
ボール位置 x



$$G(s) = -\frac{g}{s^2}$$



$$G(s) = -\frac{g}{s^2}$$



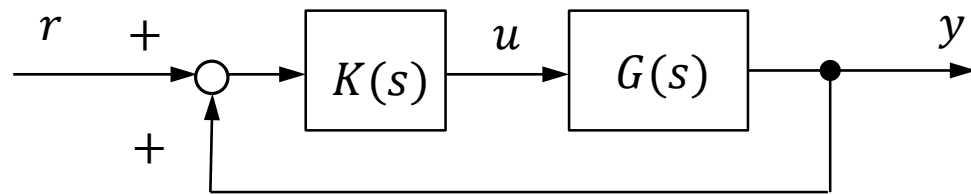
特性方程式 $1 - KG = 0$ の根が安定ならば, 閉ループ系は安定

$$1 - KG = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{K(s)g}{s^2} = 0 \Leftrightarrow s^2 + K(s)g = 0$$

$$r \equiv 0 \text{ として } u = K(s)y \Rightarrow \theta = K(s)x$$

$$K(s) = \frac{1}{g}(s + 1)$$

位置 x と速度 \dot{x} の和に係数 $1/g$ をかけてレール角度 θ を決定



$$G(s) = -\frac{g}{s^2}$$

$$K(s) = \frac{1}{g}(s + 1)$$

位置 x と速度 \dot{x} の和に係数 $1/g$ をかけてレール角度 θ を決定

$$1 - KG = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{K(s)g}{s^2} = 0 \Leftrightarrow s^2 + K(s)g = 0 \Leftrightarrow s^2 + s + 1 = 0$$

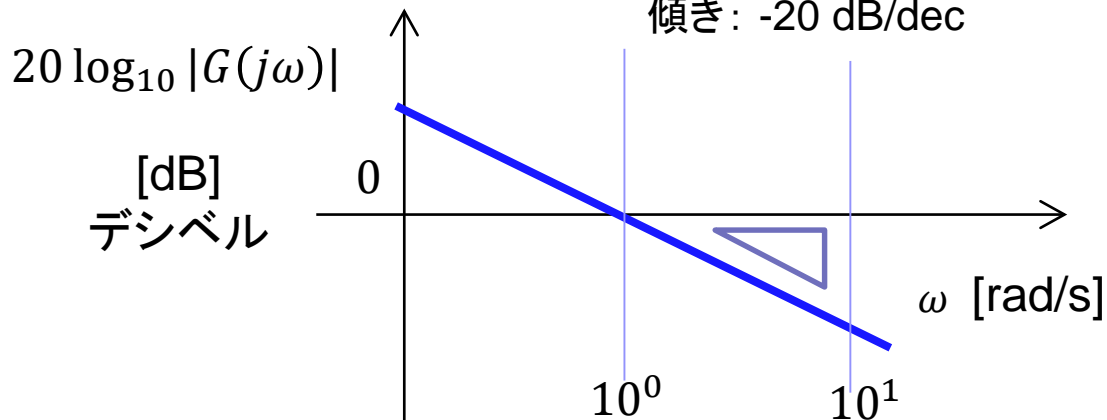
2次系の安定条件は全ての係数が正. よって特性方程式 $1 - KG = 0$ の根はすべて左半平面にあり, 閉ループ系は安定となる.

ボーンデ線図の例

積分要素のボーデ線図

$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$$

ゲイン線図

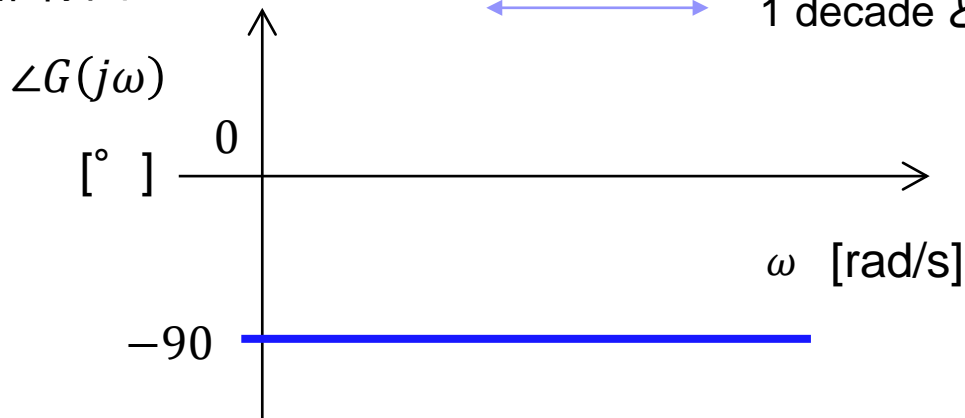


ゲインは周波数が10倍になると1/10になる

位相は-90° で一定

両対数グラフ

位相線図



片対数グラフ

1次系のボーンデ線図

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

周波数が低いとき, 分母の1(実部)が dominant

周波数が高いとき, 分母の $j\omega T$ (虚部)が dominant

両者の中間は実部と虚部の大きさが等しいとき, $\omega T = 1, \omega = 1/T$.

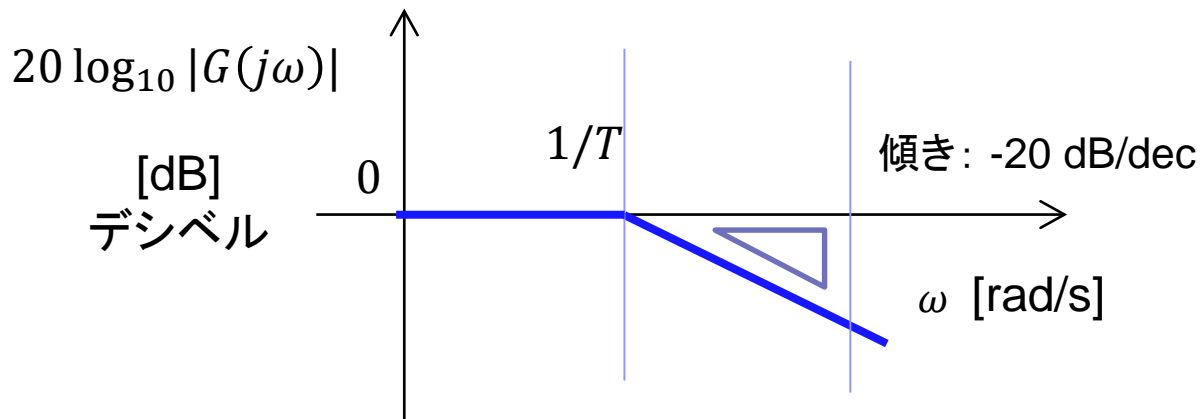
低周波域ではゲインは1, 高周波域では積分器と同じ(周波数が10倍でゲイン1/10倍; 両対数では傾き -20dB/dec の直線)

低周波域では位相は 0° , 高周波域では積分器と同じ(-90°)

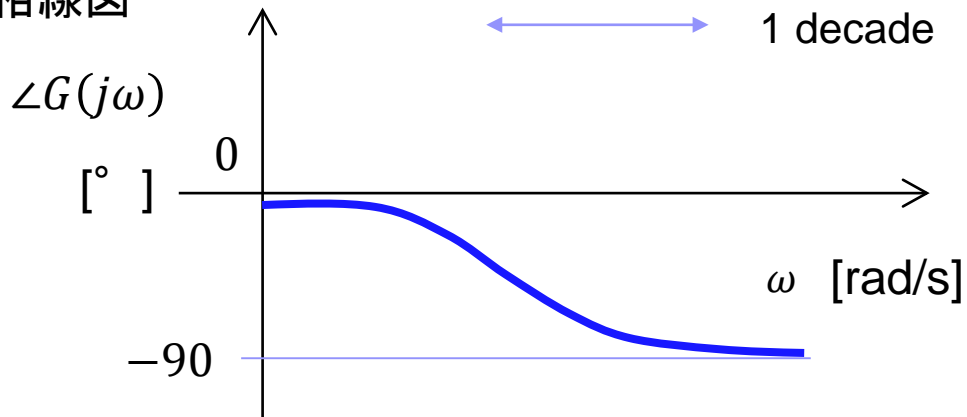
1次系のボーデ線図

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

ゲイン線図

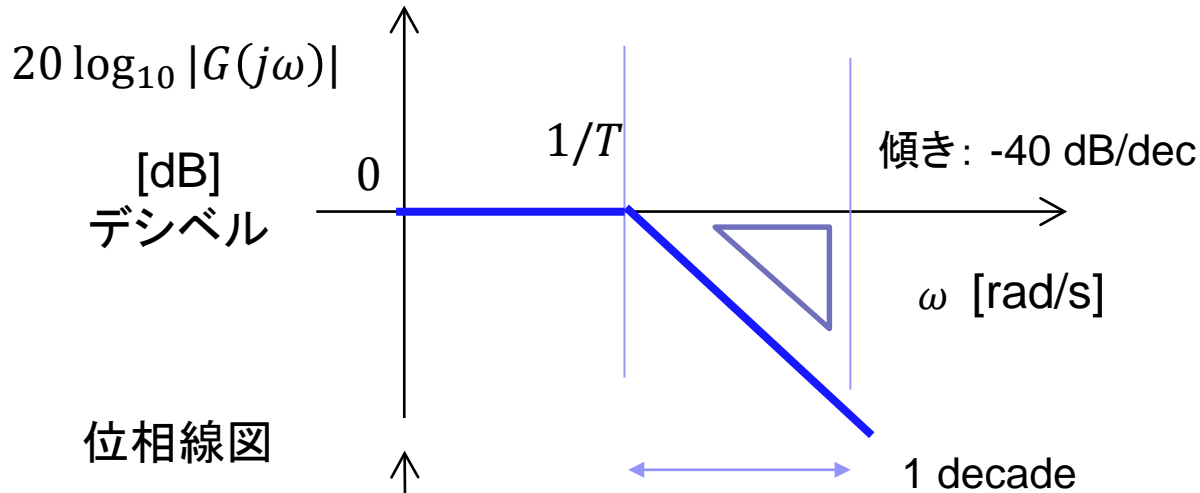


位相線図

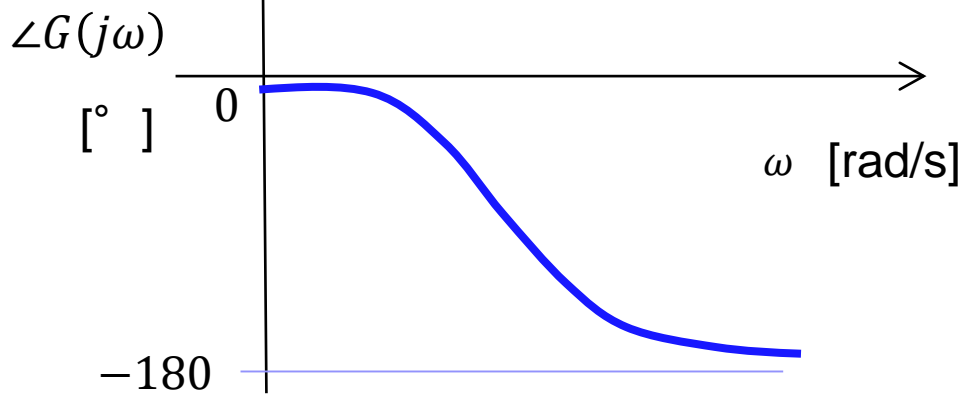


2次系のボーデ線図 $G(s) = \frac{1}{(Ts + 1)^2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{(1 - \omega^2 T^2) + 2j\omega T}$

ゲイン線図



位相線図



2次系のボーンデ線図 $G(s) = \frac{1}{T_1s + 1} \frac{1}{T_2s + 1}$

$$G = G_1 G_2$$

ゲイン

$$|G| = |G_1| |G_2| \quad 20 \log_{10} |G| = 20 \log_{10} |G_1| + 20 \log_{10} |G_2|$$

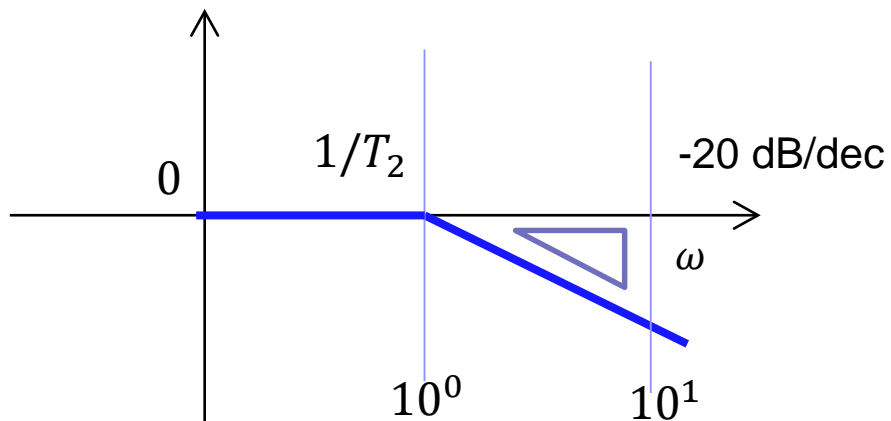
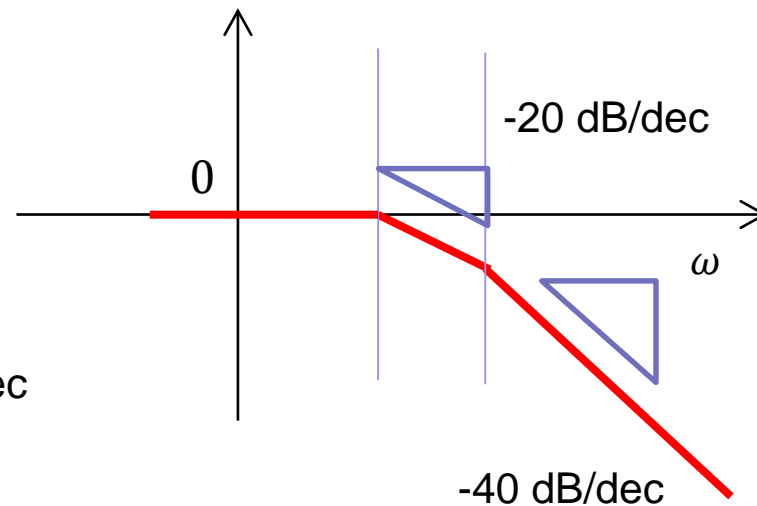
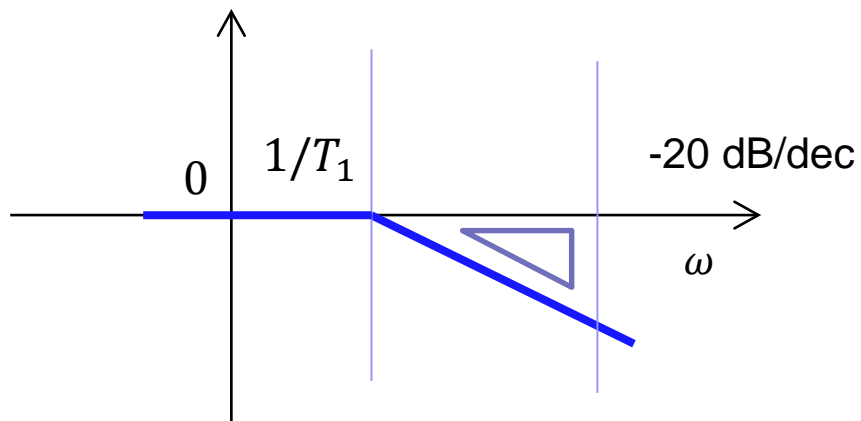
位相

$$\angle G = \angle G_1 + \angle G_2$$

直列結合系のボーンデ線図は、それぞれの要素に対するプロットの重ね合わせ(和)で表現できる.

2次系のボーンデ線図 $G(s) = \frac{1}{T_1s + 1} \frac{1}{T_2s + 1}$

ゲイン線図

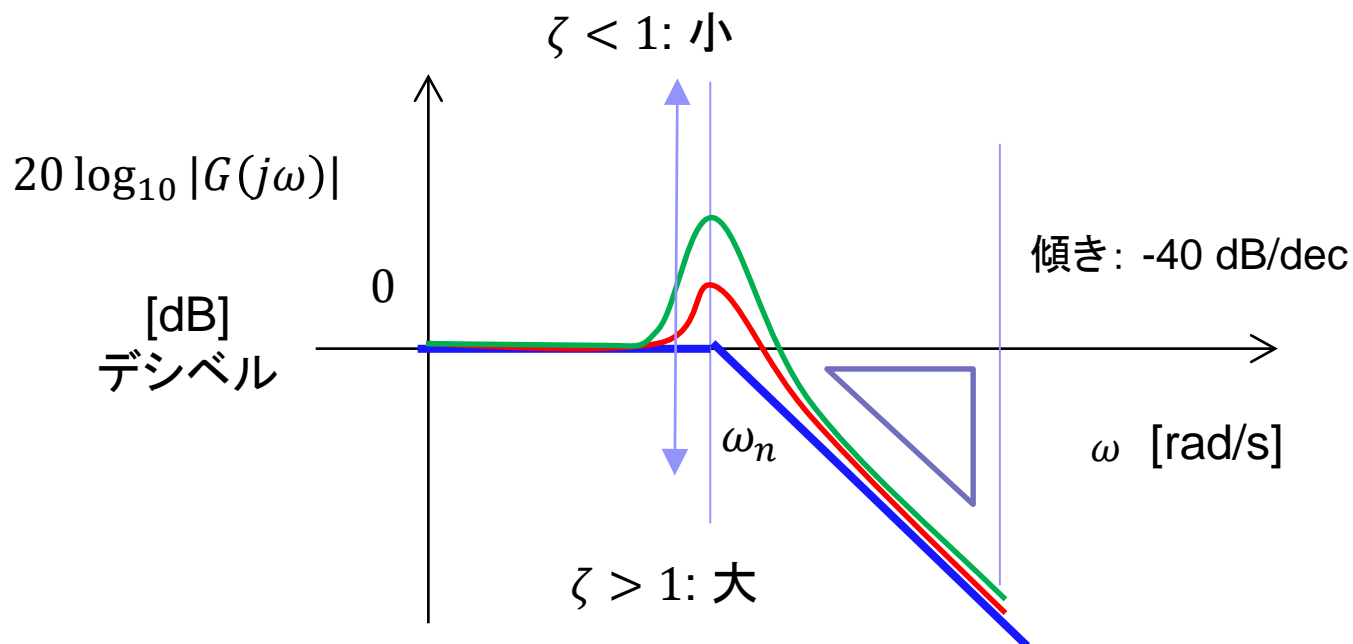


2次系のボーンデ線図

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

(複素共役(振動系)の場合を含む)

ゲイン線図



減衰が小さいと共振ピークゲインが大きくなる.