

システム制御 I

4学期

月 5, 6限 14:00-16:10

木 3, 4限 11:00-13:10

5号館 第15講義室 (システムコース)

担当: 平田 健太郎

1/20 第11回

過渡応答と安定性(4)

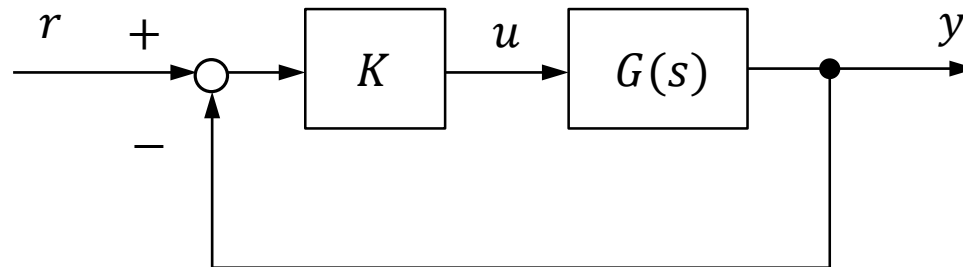
Schedule

- | | | |
|-----------------|----------|------|
| 1. 12/2 (today) | 9. 1/9 | 中間試験 |
| 2. 12/5 | 10. 1/16 | |
| 3. 12/9 | 11. 1/20 | |
| 4. 12/12 | 12. 1/23 | |
| 5. 12/16 | 13. 1/27 | |
| 6. 12/19 | 14. 1/30 | |
| 7. 12/23 | 15. 2/3 | |
| 8. 1/6 | 16. 2/6 | 期末試験 |

伝達関数 $G(s) = \frac{1}{s^2+s-2}$ は不安定である.

$G(s)$ は有理伝達関数であるから, 安定性の必要十分条件はすべての極の実部が負であることである.

極とは分母多項式を零にする点であるから $s^2 + s - 2 = (s + 2)(s - 1)$ より, 極は $s = -2, 1$ である. $s = 1$ の実部は負でない.



というフィードバック制御によって, $G(s)$ を含むフィードバック系を安定にしよう. ただし K はスカラーのゲインとする.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2} \right)$$

$G(s)$ が BIBO 安定 $\Leftrightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ が絶対可積分 i.e., $\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty$

$$g(t) = \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) \quad \Rightarrow \quad |g(t)| \geq \frac{1}{3}(|e^t| - |-e^{-2t}|) \quad \text{三角不等式}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |g(t)| dt \geq \frac{1}{3} \left(\int_0^{\infty} e^t dt - \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \right)$$

$e^t \geq 1 (t > 0)$ なので

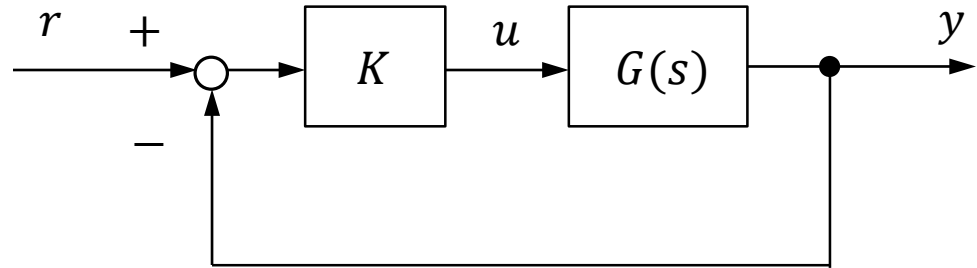
$$\int_0^{\infty} e^t dt \geq \int_0^{\infty} 1 dt = [t]_0^{\infty} \quad \text{第1項は発散}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left[-\frac{e^{-2t}}{2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} \quad \text{第2項は収束}$$

右辺は発散するので $g(t)$ は絶対可積分でない

$\Rightarrow G(s)$ は BIBO 安定でない

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$



フィードバック系 (r から y まで) の伝達関数は $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ であるので
閉ループ系の極は $1 + KG(s) = 0$ とする点である.

$$1 + KG(s) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 1 + \frac{K}{s^2 + s - 2} = 0$$
$$\quad \quad \quad \longleftrightarrow \quad s^2 + s + (K - 2) = 0$$

2次系の安定条件は全ての係数が同符号であったから $K > 2$ ならば
フィードバック系を安定にすることができる.

では 2 よりも大きい K をどう選ぶか？

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$$

例えば $K = \frac{20}{9}$ のとき フィードバック系 (r から y まで) の伝達関数は

$$\frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{\frac{20/9}{s^2 + s - 2}}{1 + \frac{20/9}{s^2 + s - 2}} = \frac{20/9}{s^2 + s + 2/9} = \frac{20}{3} \left(\frac{1}{s + 1/3} - \frac{1}{s + 2/3} \right)$$

$$g(t) = 20/3(e^{-t/3} - e^{-2t/3}) \quad \Rightarrow \quad |g(t)| \leq \frac{20}{3} (|e^{-t/3}| + |-e^{-2t/3}|) \quad \text{三角不等式}$$

$$\int_0^{\infty} |e^{-t/3}| dt = \int_0^{\infty} e^{-t/3} dt = [-3e^{-t/3}]_0^{\infty} = 3$$

$$\int_0^{\infty} |-e^{-2t/3}| dt = \int_0^{\infty} e^{-2t/3} dt = \left[-\frac{3e^{-2t/3}}{2} \right]_0^{\infty} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq 30 < \infty$$

\Rightarrow $g(t)$ は絶対可積分

\Rightarrow フィードバック系はBIBO安定

前回のおさらい

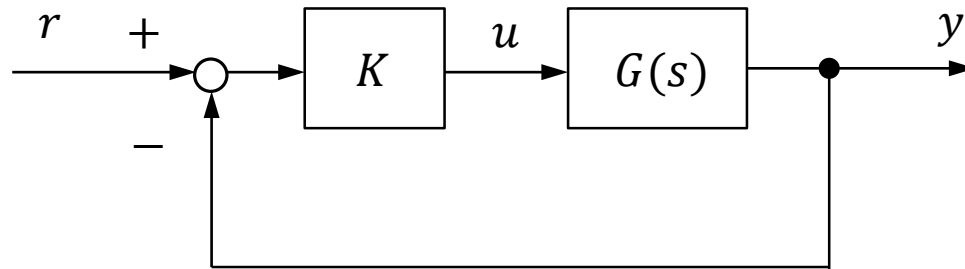
フルビッツの安定判別法

安定性の必要条件
行列式の展開
必要十分条件

振子系の安定性

平衡点
運動方程式
線形化

根軌跡



$G(s)$ は有理伝達関数とする. 上のようなフィードバック系制御を構成した場合, 参照入力 r から出力 y までの閉ループ伝達関数は

$$\frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

であり, 特性方程式は $1 + KG(s) = 0$ となる. スカラゲイン K をパラメータと見ると, **根の位置は K の変化に対して連続的に変化する.** これに基づき K の値を 0 から $+\infty$ まで変化させたときの根の描く軌跡を複素平面上にプロットしたものを根軌跡という. 数値計算によらなくても, 方程式に関する代数的な性質を利用することで軌跡の概形が得られるため, ゲイン選択の指針として有用である.

$$G(s) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^m (s - z_k)}{a_0 \prod_{k=1}^n (s - p_k)} = \frac{b_0 (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{a_0 (s - p_1) \cdots (s - p_n)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$\{p_k\}$: $G(s)$ の極, $\{z_k\}$: $G(s)$ の零点

$N(s)$: 実係数 m 次多項式, $D(s)$: 実係数 n 次多項式, $n \geq m$

$$N(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m, \quad D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$$

$1 + KG(s) = 0$ を考えるので, $a_0, b_0 \neq 1$ のときは $K' = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) K$ として K' の根軌跡を考えればよいので, $a_0 = b_0 = 1$ とする.

$$G(s) = \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} = \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$: 実係数 m 次多項式, $D(s)$: 実係数 n 次多項式, $n \geq m$

$$1 + KG(s) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad D(s) + KN(s) = 0$$

$$\quad \quad \quad \longleftrightarrow \quad A(s) := \tilde{a}_0 s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \cdots + \tilde{a}_n = 0$$

$\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_n$: 実数

R0 (Rule 0): 根軌跡は実係数の代数方程式 $A(s)=0$ の根であるから, n 本の分岐からなり実軸に関して(上下)対称である.

複素根は必ず複素共役対として現れる.

R1: $K=0$ に対応する根軌跡上の点は開ループ伝達関数 $G(s)$ の極に一致する.

$$1 + KG(s) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad G(s) = -1/K$$

$$G(s) = \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \quad \text{より}$$

$$1 + KG(s) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \prod_{k=1}^n (s - p_k) = -K \prod_{k=1}^m (s - z_k)$$

$K=0$ のとき, s は p_1, \dots, p_n のいずれか

R2: $K = \pm \infty$ のとき, 根軌跡は無限遠点も含めた $G(s)$ の零点に漸近する.

$$1 + KG(s) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad G(s) = -1/K$$

$$G(s) = \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \quad \text{より}$$

$$1 + KG(s) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad -\frac{1}{K} \prod_{k=1}^n (s - p_k) = \prod_{k=1}^m (s - z_k)$$

$K = \pm \infty$ のとき, s は z_1, \dots, z_m のいずれか
もしくは 無限遠点 $|s| = \infty$ ($n > m$ のとき)

R3: 無限遠点に発散する分岐の漸近する直線は実軸上の特定の点を通り、その角度も定まる.

$$1 + KG(s) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{G(s)} = -K$$
$$\quad \quad \quad \longleftrightarrow \quad \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m} = -K$$

$|s| \rightarrow \infty$ のとき, $\nu := n - m$ とおくと左辺は $s^\nu + (a_1 - b_1)s^{\nu-1}$ で近似できる.

$$s^\nu + (a_1 - b_1)s^{\nu-1} = s^\nu \left(1 + \frac{a_1 - b_1}{s} \right) \simeq |K| e^{j\pi}$$

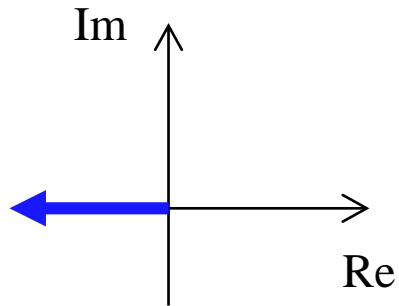
$$s^\nu \left(1 + \frac{a_1 - b_1}{s} \right) \simeq |K| e^{j\pi}$$

両辺の ν 乗根をとり, $(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$ ($|x| \ll 1$) を用いると

$$s = -\frac{a_1 - b_1}{\nu} + |K|^{\frac{1}{\nu}} e^{j\theta_l} \quad \theta_l = \frac{(2l+1)\pi}{\nu}, \quad l = 0, 1, \dots, \nu - 1$$

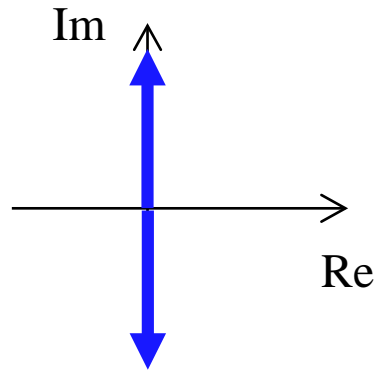
分岐の重心: $-\frac{a_1 - b_1}{\nu} = \frac{1}{\nu} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right)$ 解と係数の関係より

発散方向 (バターワースパターン)



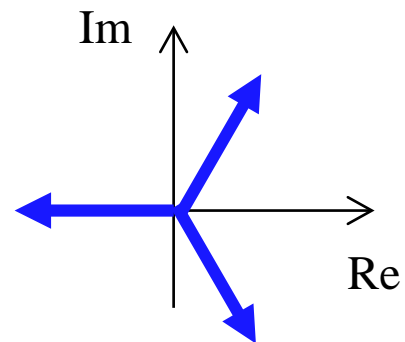
$$\nu = 1$$

$$\theta = -180^\circ$$



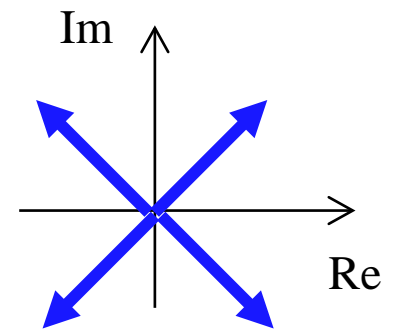
$$\nu = 2$$

$$\theta = \pm 90^\circ$$



$$\nu = 3$$

$$\theta = -180^\circ, \pm 60^\circ$$



$$\nu = 4$$

$$\theta = \pm 135^\circ, \pm 45^\circ$$

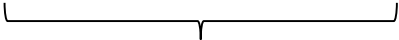
R4: 実軸上にいくつかの $G(s)$ の極と零点が存在するとき, 実軸のどの部分が軌跡に含まれるかも, 解析的に求まる.

$$1 + KG(s) = 0 \iff \frac{1}{G(s)} = \frac{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}{\prod_{k=1}^m (s - z_k)} = -K$$

$\frac{1}{G(s)}$ の位相が $-\pi$

s が実軸にあるとき, 複素共役な極・零点は無関係

$$\begin{aligned} \angle\{(s - p)(s - \bar{p})\} &= \angle(s - p) + \angle(s - \bar{p}) \\ &= \angle(s - (\sigma + j\omega)) + \angle(s - (\sigma - j\omega)) \quad s \in \mathbb{R} \\ &= \angle(s - \sigma + j\omega) + \angle(s - \sigma + j\omega) = 0 \end{aligned}$$



複素共役

s と極・零点の左右が入れ替わると, 位相が $\pm\pi$ で反転. その総和が $-\pi$ となる部分が実軸上の軌跡となる.

R5: 根軌跡が実軸から分岐する点は, ある代数方程式の根によって定まる.

分岐点では s は重根 $\longleftrightarrow A(s) = (s - s_1)^2 B(s)$

$$A'(s) = 2(s - s_1)B(s) + (s - s_1)^2 B'(s)$$

$$\therefore A(s_1) = A'(s_1) = 0$$

$$A(s) = N(s) \left\{ \frac{D(s)}{N(s)} + K \right\}$$

$$A'(s) = N'(s) \left\{ \frac{D(s)}{N(s)} + K \right\} + N(s) \frac{d}{ds} \left\{ \frac{D(s)}{N(s)} \right\}$$

分岐点も根なので $\frac{D(s)}{N(s)} + K = 0$

分岐点では $N(s) \neq 0$

よって $\left[\frac{d}{ds} \left\{ \frac{D(s)}{N(s)} \right\} \right]_{s=s_1} = 0$

R6: 根軌跡が虚軸を横切るときのゲイン K および交点の値はラウス・フルビッツの方法を用いて求めることができる.

フィードバック系が安定限界にあるとき, 極のうちひとつは虚軸上にあるため



The Origin of Control Theory

ON GOVERNORS

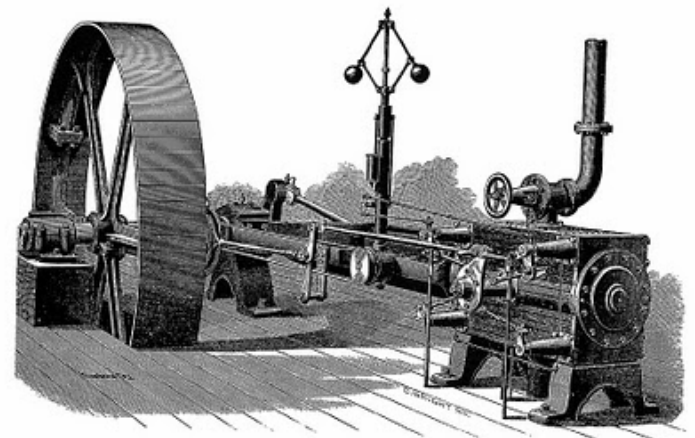
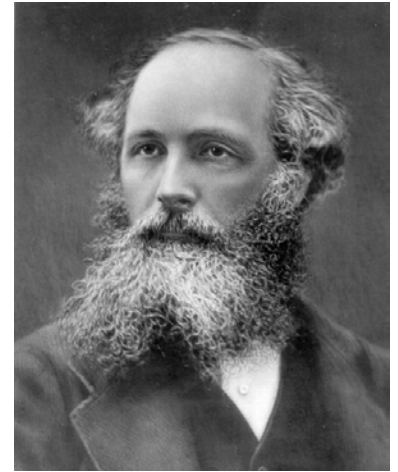
J.C. MAXWELL

From the Proceedings of the Royal Society, No.100, 1868.

A GOVERNOR is a part of a machine by means of which the velocity of the machine is kept nearly uniform, notwithstanding variations in the driving-power or the resistance.

Most governors depend on the centrifugal force of a piece connected with a shaft of the machine. When the velocity increases, this force increases, and either increases the pressure of the piece against a surface or moves the piece, and so acts on a break or a valve.

In one class of regulators of machinery, which we may call *moderate* resistance is increased by a quantity depending on the velocity. Thus pieces of clockwork the moderator consists of a conical pendulum revolving in a circular case. When the velocity increases, the ball of the pendulum against the inside of the case, and the friction checks the increase of veloc

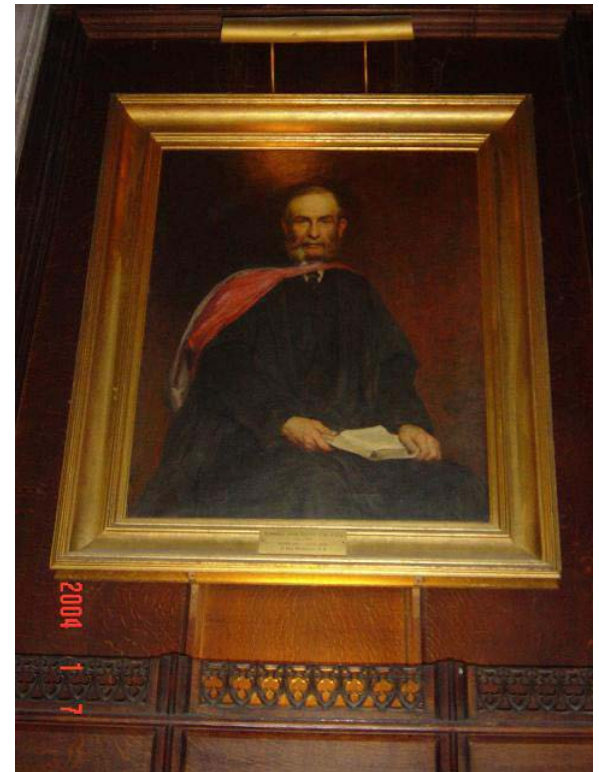




Cambridge University



Sir Maxwell



Routh

necessary to write down equations, as Maxwell did. He found their solutions in some of the simpler cases, but the general problem of stating the conditions for any equation to represent a stable motion was only solved ten years later by another Cambridge mathematician, E. J. Routh.

Curiously enough, Routh and Maxwell were undergraduates together and sat for the Mathematical Tripos examination at the same time. An amusing anecdote is told of this occasion. Apparently Maxwell was so confident of his triumph in the examination that he did not even trouble to rise earlier in the morning than usual, to hear the lists of successful candidates read out in the Senate House, but sent his servant instead. On his return, Maxwell is said to have inquired of him, 'Well, tell me who's second!', and was somewhat taken aback to receive the reply, 'You are, sir!', for Routh had defeated him. For his work on

分かりやすい例

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)} \quad \text{の根軌跡}$$

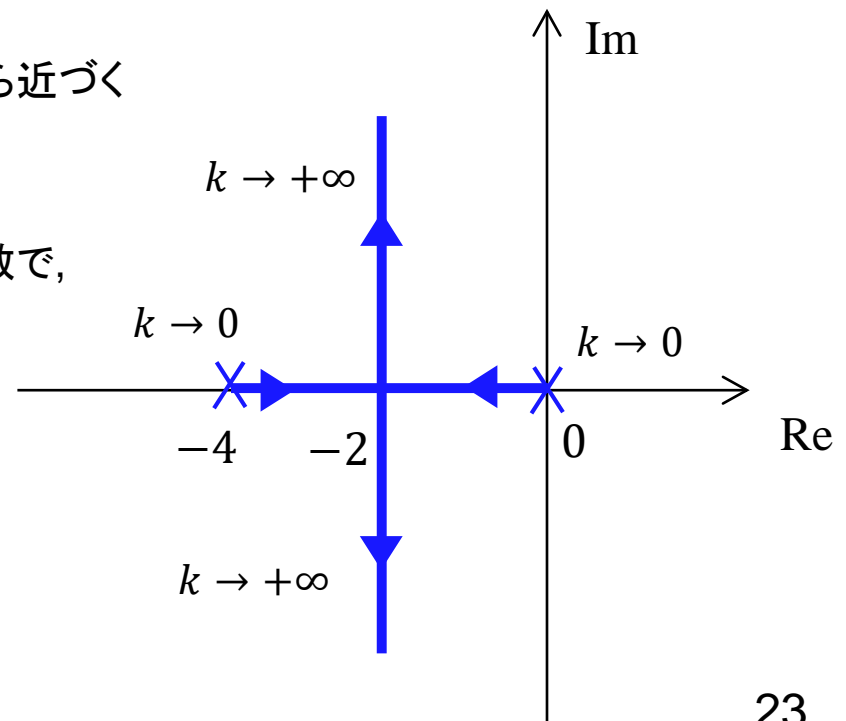
$$1 + KG(s) = 1 + \frac{K}{s(s+4)} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad s^2 + 4s + K = (s+2)^2 + K - 4 = 0$$

根軌跡の性質は使わずに $p_1, p_2 = -2 \pm \sqrt{4-K}$ と直接計算できる.

$0 < K < 4$ のとき $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, 点 -2 の両側から近づく

$K = 4$ のとき $p_1, p_2 = -2$ (重根)

$K > 4$ のとき p_1, p_2 は実部が -2 の共役複素数で,
 K が大きくなるにつれて虚部は大きくなっていく



Check

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)} \quad A(s) = s^2 + 4s + K, n = 2$$

R0: 実係数代数方程式 $A(s)=0$ の根の軌跡であるから, 2本の分岐からなり実軸に関して対称.

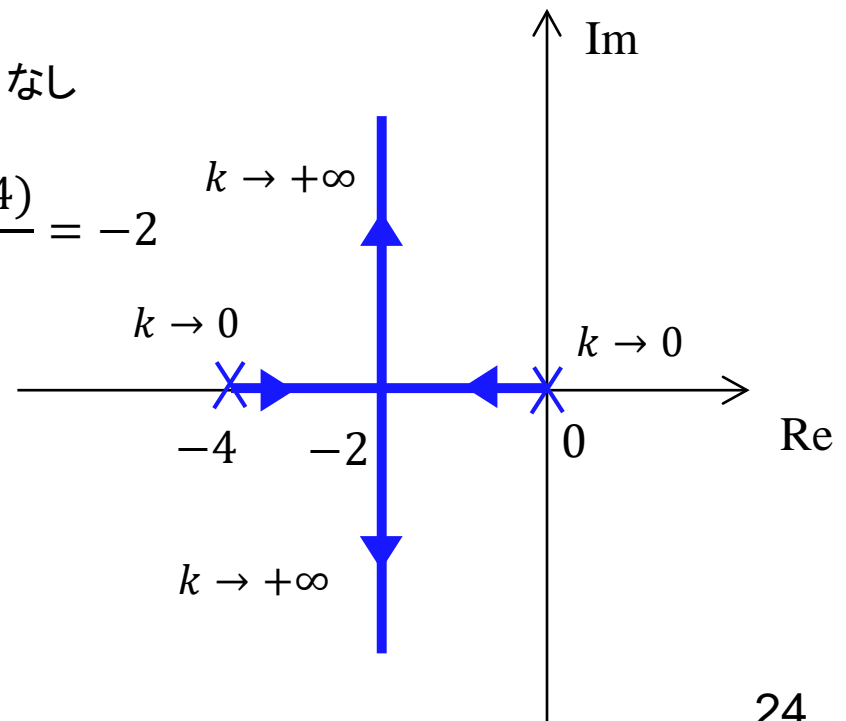
R1: $K=0$ に対応する根軌跡上の点は開ループ伝達関数 $G(s)$ の極. $s = -4, 0$

R3: 無限遠点に発散する分岐の漸近する直線は実軸上の特定の点を通り, 角度も定まる.

相対次数 $\nu = 2$, 極 $p_1 = 0, p_2 = -4$, 零点 (z_i) なし

$$\text{重心} \quad s_g = \frac{1}{\nu} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) = \frac{0 + (-4)}{2} = -2$$

相対次数 $\nu = 2$ なので発散方向は $\pm 90^\circ$

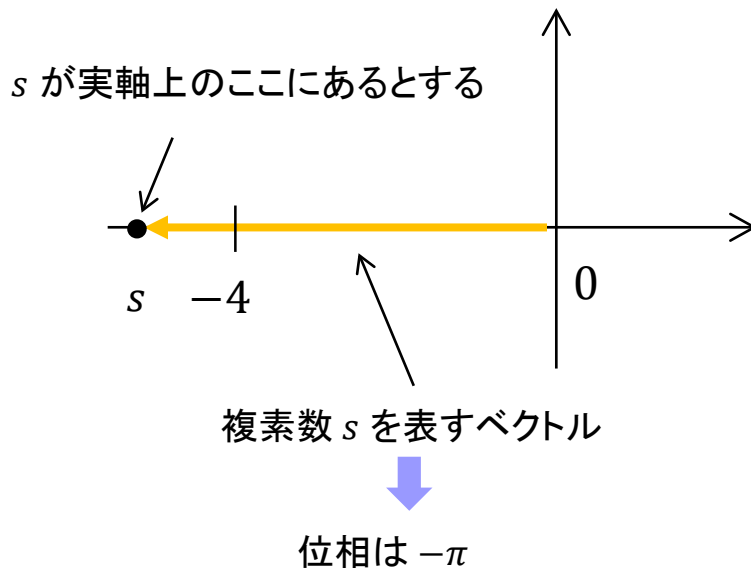


$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

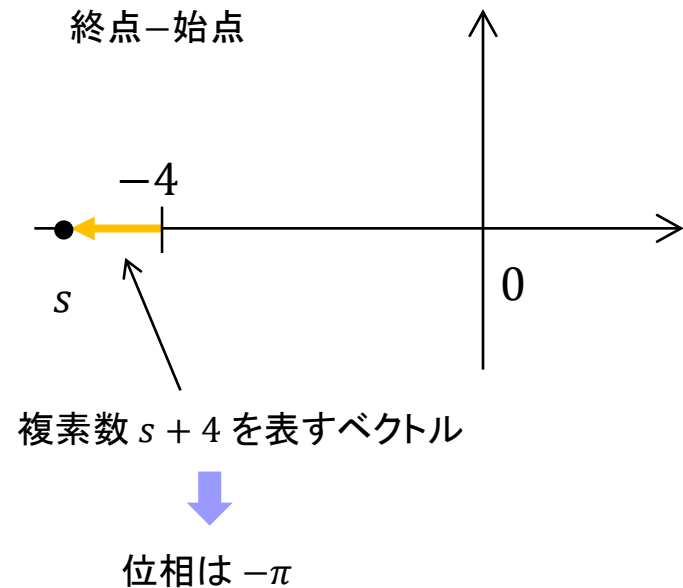
$$A(s) = s^2 + 4s + K, n = 2$$

R4: 実軸上にいくつかの $G(s)$ の極と零点が存在するとき, 実軸のどの部分が軌跡に含まれるかも, 解析的に求まる.

$$\frac{1}{G(s)} = s(s+4) = -K$$



$$s+4 = s - (-4)$$



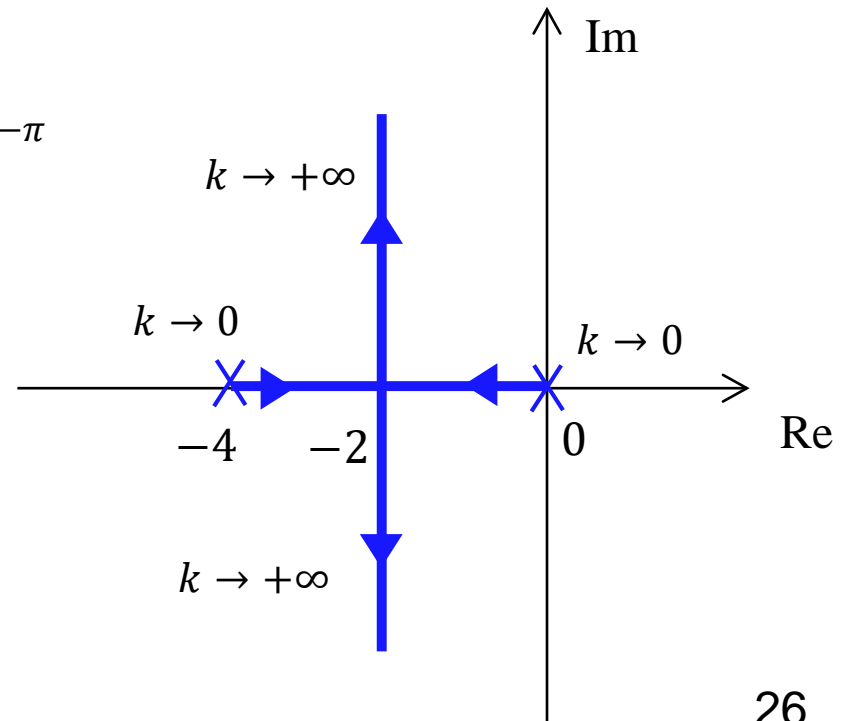
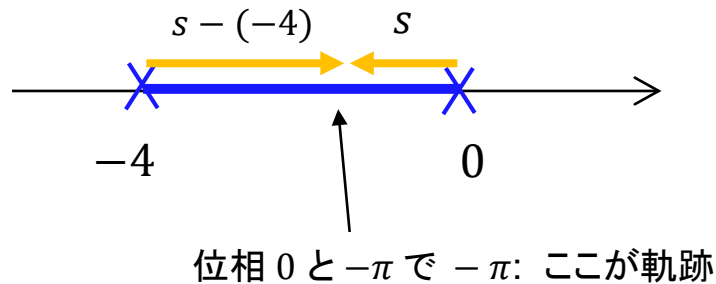
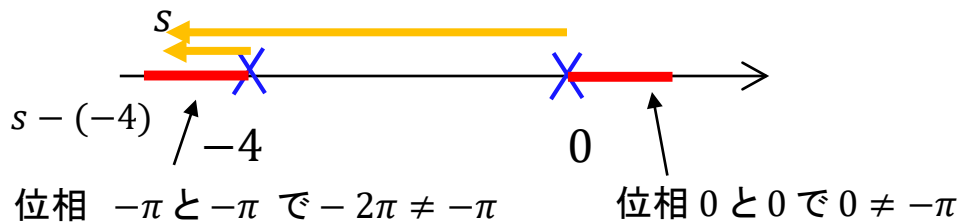
$$s(s+4) \text{ の位相は } -2\pi (= 0) \rightarrow \angle[s(s+4)] \neq \angle[-K]$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

$$A(s) = s^2 + 4s + K, n = 2$$

R4: 実軸上にいくつかの $G(s)$ の極と零点が存在するとき, 実軸のどの部分が軌跡に含まれるかも, 解析的に求まる.

$$\frac{1}{G(s)} = s(s+4) = -K$$

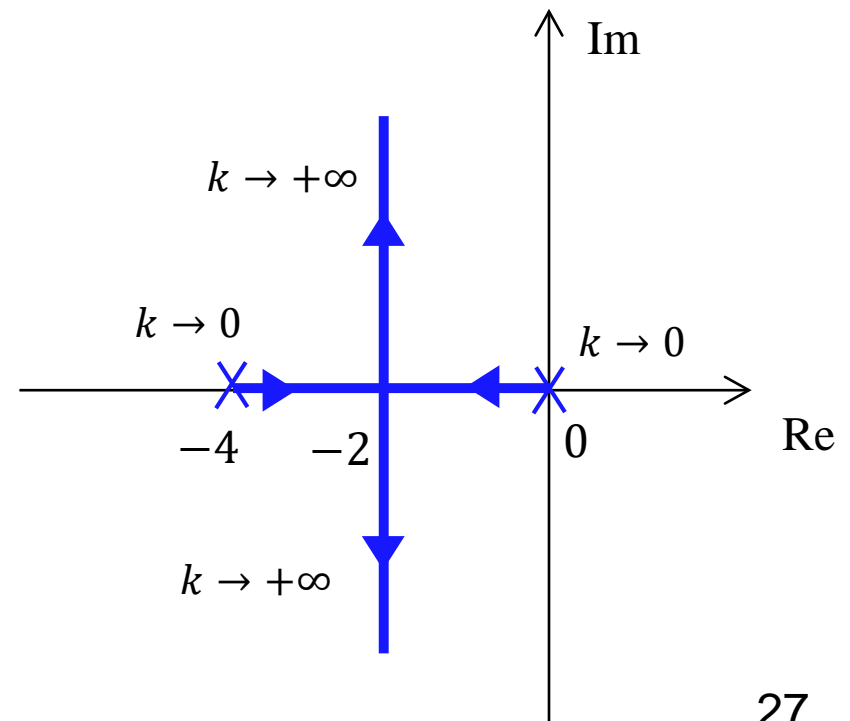


$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

$$A(s) = s^2 + 4s + K, n = 2$$

R5: 根軌跡が実軸から分岐する点は、ある代数方程式の根によって定まる。

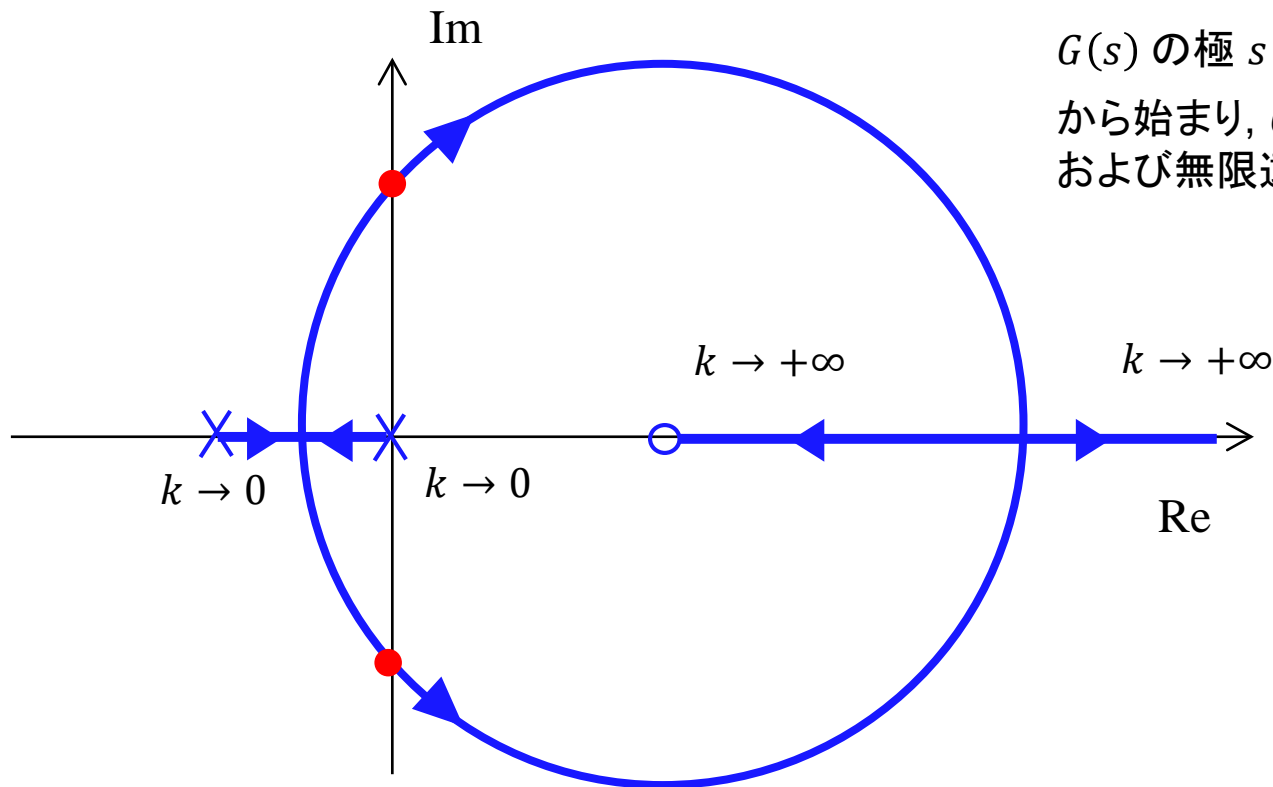
$$A'(s) = 2s + 4 = 0 \quad \longrightarrow \quad s = -2$$



$$G(s) = \frac{5 - s}{s(s + 2)}$$

の根軌跡

- × 極
- 零点



$G(s)$ の極 $s = 0, -2$
 から始まり, $G(s)$ の零点 $s = 5$
 および無限遠点に向かう.

R0~R6を駆使して描く. 円になることは別途確認.

$$1 + KG(s) = 1 + \frac{K(5-s)}{s(s+2)} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad s(s+2) + K(5-s) = 0$$

$$s = \sigma + j\omega \quad \longrightarrow \quad (\sigma + j\omega)(\sigma + 2 + j\omega) + K(5 - \sigma - j\omega) = 0$$

$$\text{実部} \quad \sigma^2 - \omega^2 + (2 - K)\sigma + 5K = 0 \quad \cdots(1)$$

$$\text{虚部} \quad [2\sigma + (2 - K)]\omega = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega = 0 \quad \text{or} \quad \underline{K = 2(\sigma + 1)}$$

式(1)に代入すると

$$\sigma^2 - \omega^2 - 2\sigma^2 + 10(\sigma + 1) = 0$$

$$\longrightarrow \quad \sigma^2 + \omega^2 - 10(\sigma + 1) = 0$$

$$\longrightarrow \quad (\sigma - 5)^2 + \omega^2 = 35$$

軌跡が実軸上にないとき ($\omega \neq 0$), 中心 $(5,0)$, 半径 $\sqrt{35}$ の円周上にある.

$$G(s) = \frac{5-s}{s(s+2)}$$

$$1 + kG(s) = 0$$

$$s(s+2) + k(5-s) = 0$$

$$s^2 + (2-k)s + 5k = 0$$

$\begin{matrix} & / & & / & & / \\ a_0 & & a_1 & & a_2 \end{matrix}$

$$\Delta_1 = 2 - k > 0 \quad \rightarrow \quad k < 2$$

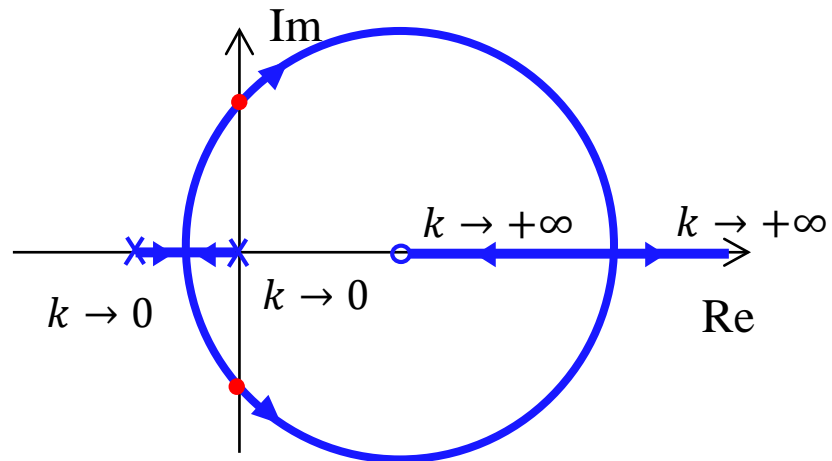
$$\Delta_2 = 5(2-k)k > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < k < 2$$

Q. 赤い点の座標を求めよ

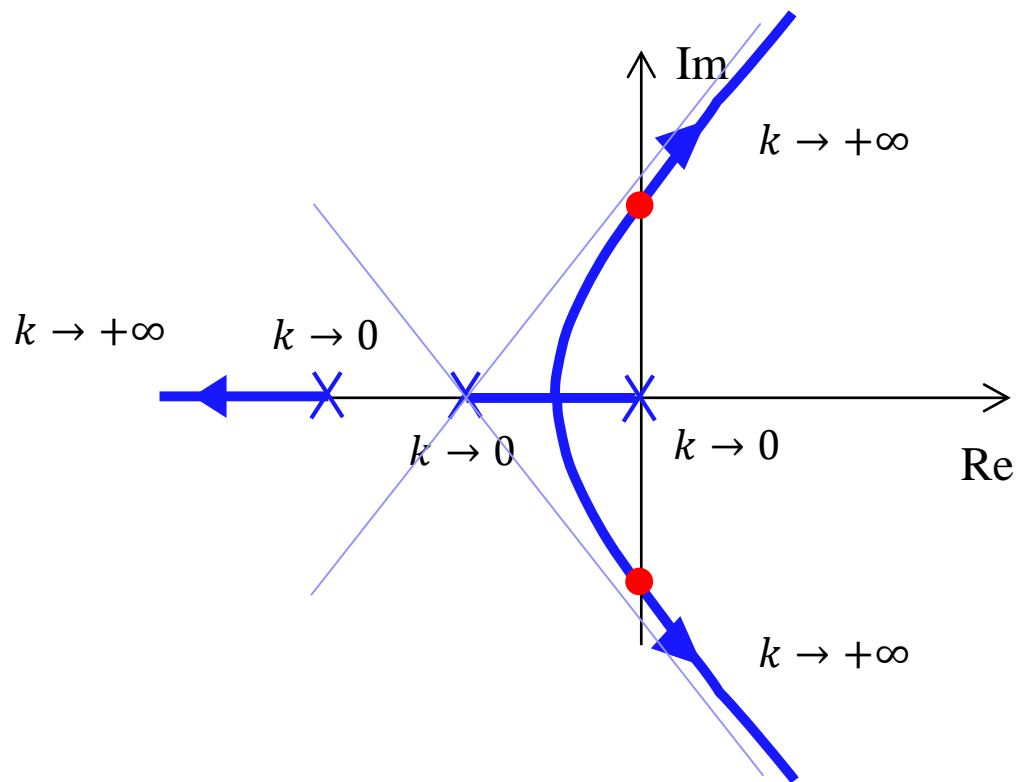
フルビッツ行列

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-k & 0 \\ 1 & 5k \end{bmatrix}$$

フルビッツ行列式(2次までの主座小行列式)
が全て正 \Leftrightarrow 多項式は安定



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(2s+1)} \quad \text{の根軌跡}$$



$G(s)$ の極 $s = 0, -1, -1/2$
 から始まり, $G(s)$ の無限遠零点
 ($-\pi, \pm\pi/3$ のバターワース
 パターン) に向かう.

$$1 + kG(s) = 0$$

$$s(s + 1)(2s + 1) + k = 0$$

$$2s^3 + 3s^2 + 1s + k = 0$$

$\begin{matrix} & / & & / & & / & & / \\ a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 \end{matrix}$

フルビッツ行列

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & k & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & k \end{bmatrix}$$

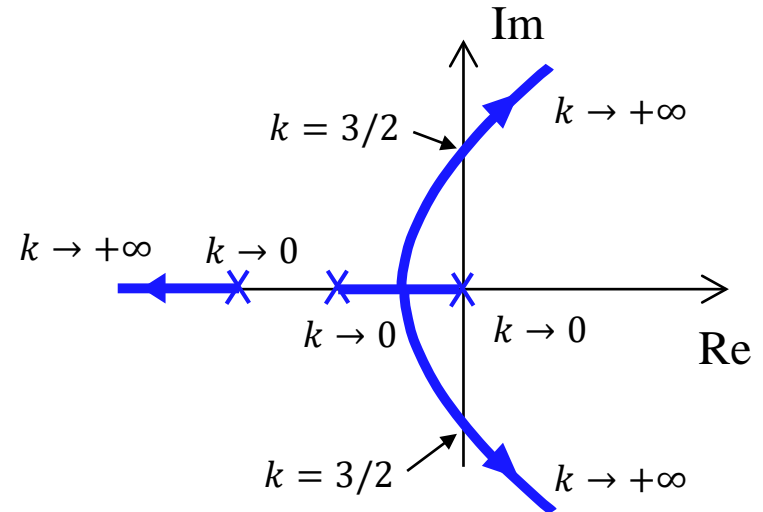
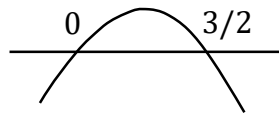


フルビッツ行列式(3次までの主座小行列式)
が全て正 \Leftrightarrow 多項式は安定

$$\Delta_1 = 3 > 0 \rightarrow \text{自明}$$

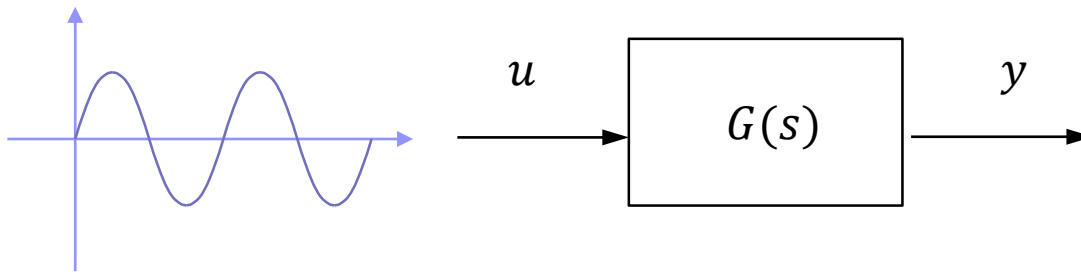
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2k > 0, \rightarrow k < 3/2$$

$$\Delta_3 = k\Delta_2 = k(3 - 2k) > 0 \rightarrow 0 < k < 3/2$$



周波数応答

安定な伝達関数システムに正弦波入力を印加すると？



$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad u(t) = \sin t \quad \rightarrow \quad u(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$y(s) = G(s)u(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+1} \right)$$

$$\rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+1} \right) \right] = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$$

$$\alpha \sin t + \beta \cos t = \gamma \sin(t + \phi) = \gamma(\sin t \cos \phi + \cos t \sin \phi)$$

$$\alpha = \gamma \cos \phi, \beta = \gamma \sin \phi \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \phi = \text{atan}(\beta/\alpha)$$

$$\begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma = 1/\sqrt{2} \\ \phi = \text{atan}(-1) = -\pi/4 \end{array}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

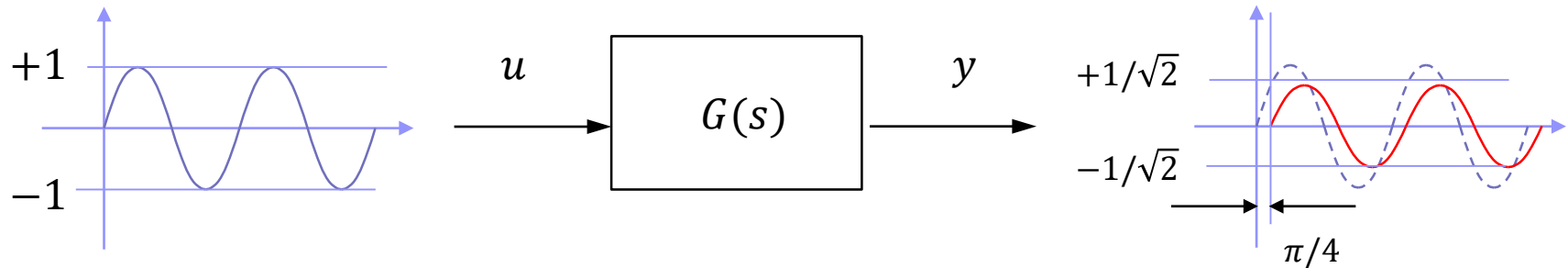
時間が十分に経過すると($t \rightarrow \infty$)右辺第1項は0に収束.

定常応答は, 振幅が $1/\sqrt{2}$ 倍され, 位相が $\pi/4$ だけ遅れた, 入力と同じ周波数の正弦波となる.

$$u(t) = \sin t$$

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

$$y(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right)$$



これは一般論としても成立し, 安定な伝達関数システムに正弦波入力を印加すると, 定常応答は, 振幅, 位相が変化した, 入力と同じ周波数の正弦波となる.

これが周波数応答の原理である.