

# システム制御 I

4学期

月 5, 6限 14:00-16:10

木 3, 4限 11:00-13:10

5号館 第15講義室 (システムコース)

担当: 平田 健太郎

1/16 第10回

過渡応答と安定性 (3)

# Schedule

- |                 |          |      |
|-----------------|----------|------|
| 1. 12/2 (today) | 9. 1/9   | 中間試験 |
| 2. 12/5         | 10. 1/16 |      |
| 3. 12/9         | 11. 1/20 |      |
| 4. 12/12        | 12. 1/23 |      |
| 5. 12/16        | 13. 1/27 |      |
| 6. 12/19        | 14. 1/30 |      |
| 7. 12/23        | 15. 2/3  |      |
| 8. 1/6          | 16. 2/6  | 期末試験 |

## 前回のおさらい

### 低次系の応答

1次系; 時定数, ゲイン

2次系; 減衰係数, 自然角周波数

### 線形システムの安定性

#### 入出力安定性の定義

定理:

入出力安定  $\Leftrightarrow$  インパルス応答が絶対可積分

定理: (プロパーな有理伝達関数)

入出力安定  $\Leftrightarrow$  極の実部がすべて負

## To Do (前回)

- 1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする)
- 2) 復習
- 3) 教科書 4.4～4.8 を読む.

## ラウス-フルビッツの安定判別法

(有理)伝達関数の安定性(入出力安定性)は, 極の実部によって決定される.



しかし, 5次以上の実係数多項式の零点を解析的に求めることはできない(解の公式がない)ので, 極の値を求めてから判定するのは(数値計算から求めることを除外すれば)不可能



実係数多項式の零点がすべて複素左半平面にあるか否かを, 個々の零点の値を求めることなく, 係数から判定する方法が必要



ラウス-フルビッツ (Routh-Hurwitz) の安定判別法

ラウスの方法: ラウス表を用いる.



フルビッツの方法: フルビッツ行列式を用いる.

任意の次数の行列の行列式を計算できるなら, フルビッツの方法の方が覚えることが少なくて済む.

## 行列式の定義:

正方行列  $A$  に対して, 行列式  $\det A$  あるいは  $|A|$  が定められる.

定義は以下のとおり

幾つかの相異なる要素を並べ替えることを置換という. (あるいは順列)  
2つの要素を入れ替えることを互換という. 任意の置換は, 互換の繰返し  
で表現できる. 偶数回(奇数回)の互換で表現できる置換を偶置換  
(奇置換)という.

数列  $\{1, 2, \dots, n\}$  のひとつの置換を  $\sigma$ ,  $\sigma$  の全体を  $S_n$  とおく.  $\text{sgn}(\sigma)$  は  
置換の符号であり, 偶置換のとき  $+1$ , 奇置換のとき  $-1$  である. このとき

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_i} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

2次の行列については  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$\{1,2\}$  の置換は,  $\{1,2\}, \{2,1\}$  の2通り. 前者は偶置換, 後者は奇置換.



$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} = \text{sgn}(\sigma) a_{11} a_{22} + \text{sgn}(\sigma) a_{12} a_{21}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

3次の行列については

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

{1,2,3}



{2,1,3}

置換が1回: 奇置換

{1,2,3} の置換は, {2,1,3}, {1,3,2}, {3,2,1} (奇置換)  
 {1,2,3}, {3,1,2}, {2,3,1} (偶置換) の6通り.

{1,2,3}



{2,1,3}

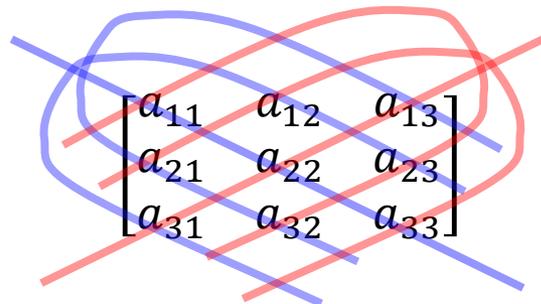


{2,3,1}

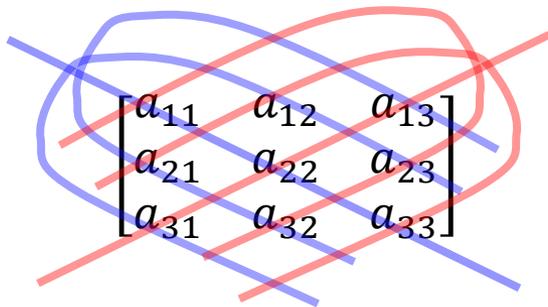
置換が2回: 偶置換

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

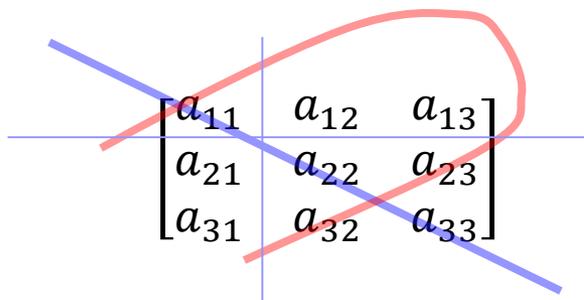


サラスの方法



線は、第1行目の  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  のどれかを必ず通る。

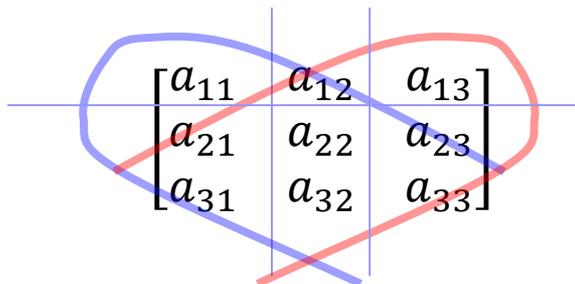
$a_{11}$  に注目すると



$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

元の行列から1行1列を  
取り除いた小行列

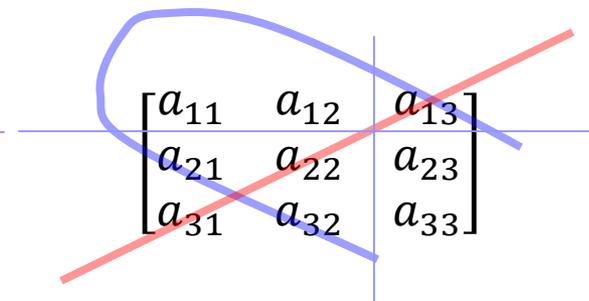
$a_{12}$  に注目すると



$$-a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式はこれらの和

$a_{13}$  に注目すると



$$a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

## 行列式の展開:

定義から, 行列式をある列または行について展開することができる.

$$A = [a_{ij}],$$

$$\det A = \sum_{l=1}^n a_{kl} \tilde{a}_{kl} \quad (\text{第 } k \text{ 行についての展開})$$

$\tilde{a}_{kl}$  は余因子であり,  $A$  から第  $k$  行と第  $l$  列を取り除いた行列の行列式に  $(-1)^{k+l}$  をかけたもの.

列展開も同様.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

← 第1行について展開

$$\begin{array}{|c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$\begin{array}{|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

符号  $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{第1行について展開}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

符号

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} |*| + a_{13} |*| - a_{14} |*|$$

## フルビッツの安定判別法

$$A(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0, a_0 > 0$$

$a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$  とする.

$A(s) = 0$  の根がすべて複素左半平面 ( $\text{Re}[s] < 0$ ) にあるとき,  
 $A(s)$  はフルビッツ, あるいは安定である, という.

## 必要条件

実係数多項式の根は実数か, いずれも根である複素共役対の片方

対応する因子は  $s - \alpha$  or  $(s - \beta - j\gamma)(s - \beta + j\gamma)$

安定であるとき,  $\alpha < 0, \beta < 0$

$$s - \alpha = s + |\alpha| \quad (s - \beta - j\gamma)(s - \beta + j\gamma) = s^2 - 2\beta s + (\beta^2 + \gamma^2)$$

  
正

$$= s^2 + \underline{2|\beta|s} + \underline{(\beta^2 + \gamma^2)}$$

  
正 

安定な因子の係数は全て正  $\Rightarrow$  これらの積である多項式の係数もしかり

最高次の係数が正であるとき, 他の係数が全て正であることは  
安定性の必要条件

実部が0は安定に入らないので, 係数が0もない  $\Rightarrow$  欠項もない





## 2次の場合

対応する項がなければ0

$$A(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2, a_0 > 0 \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0$$

$$a_1, a_2 > 0 \text{ であれば安定} \Rightarrow a_0, a_1, a_2 > 0$$

必要条件が十分条件でもある。

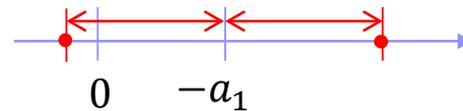
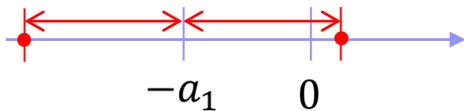
$$A(s) = a_0s^2 + a_1s + a_2, a_0 > 0$$

解の公式から, 判別式  $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$  のとき,  $s = \frac{-a_1 \pm j\sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}}{2a_0}$

実部が負, すなわち  $a_1 > 0$  であれば安定.  $a_1^2 < 4a_0a_2$  より  $a_2 > 0$ .

判別式  $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$  のとき,  $s = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$

$\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} > |a_1|$  であるとき, 2つの解は異符号となるので, 安定でない.



$a_0a_2 \geq 0$ , すなわち  $a_2 \geq 0$  でなければならない. しかし  $a_2 = 0$  のとき, 虚軸上の根  $s = 0$  を持つから不適. よって  $a_2 > 0$ . このとき  $a_1 > 0$  ならば安定.

したがって,  $a_0 > 0$  のとき, 2次系の安定性の必要十分条件は  $a_1, a_2 > 0$  と確認できる.

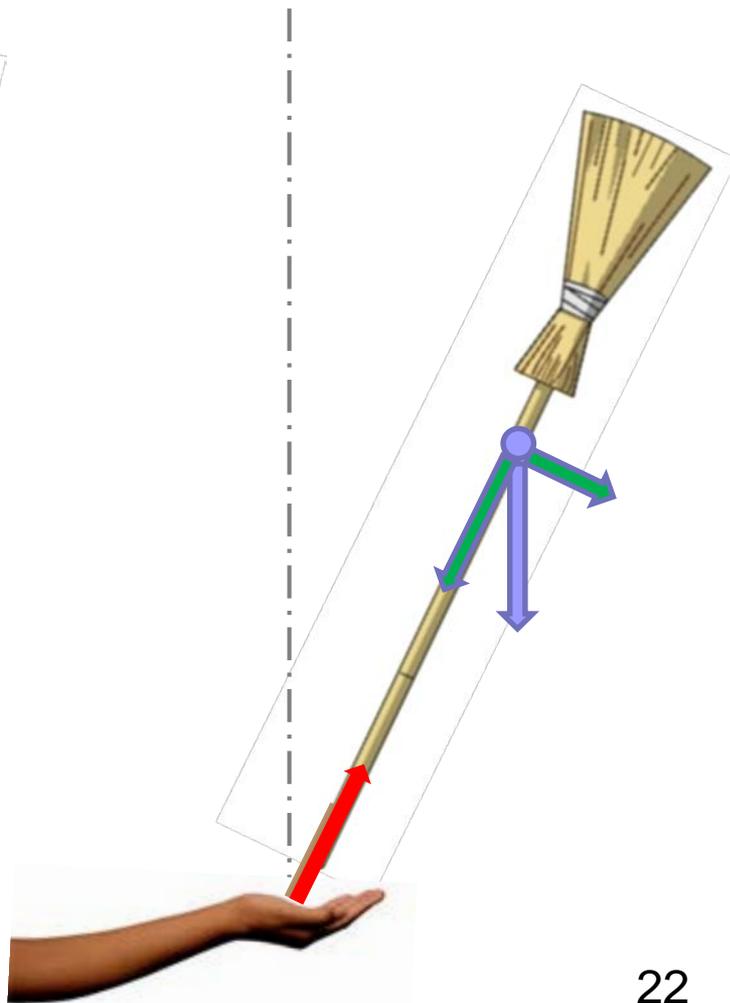
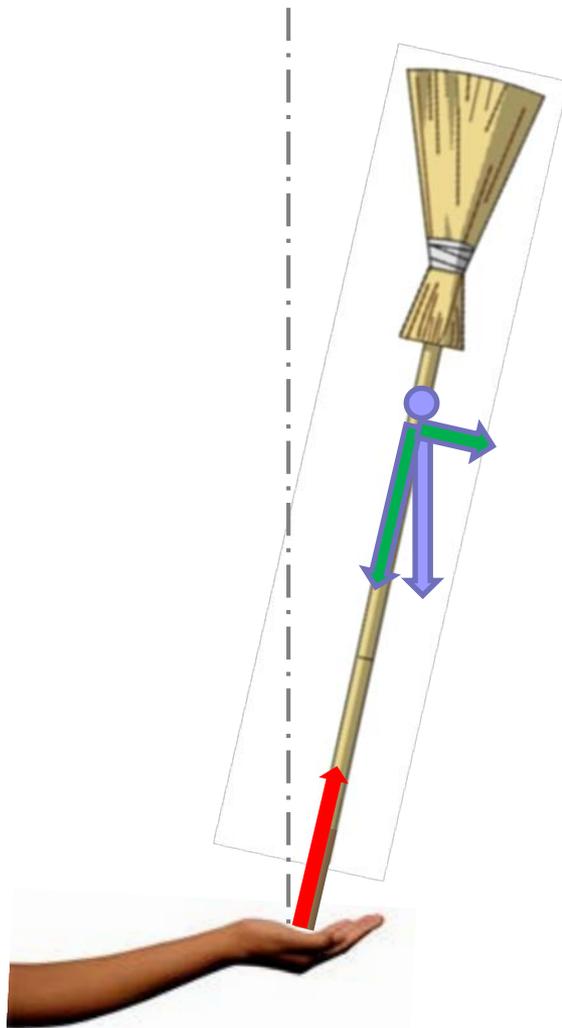
# 平衡点

動的システムのつりあい状態を  
平衡点という。

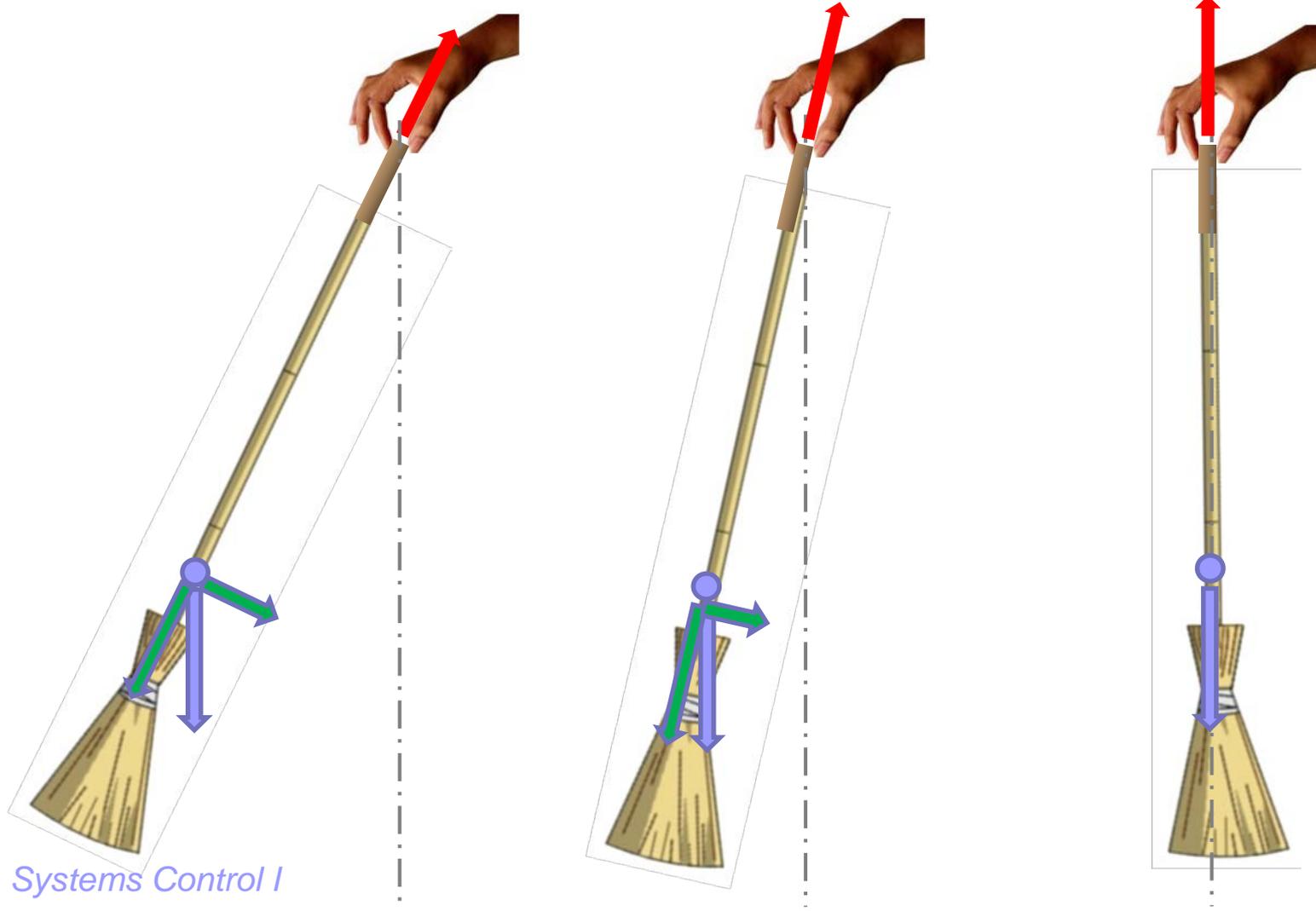


ほうきの2つの平衡点

# 安定？不安定？



# 安定？不安定？



# Stability



時間とともに, 状態が平衡点から離れていくとき, その平衡点は不安定

時間とともに, 状態が平衡点に近づいていくとき, その平衡点は安定



ほうきのダイナミクスは線形ではない（非線形; 後述）



古典制御理論(伝達関数)は線形システムを対象としている。

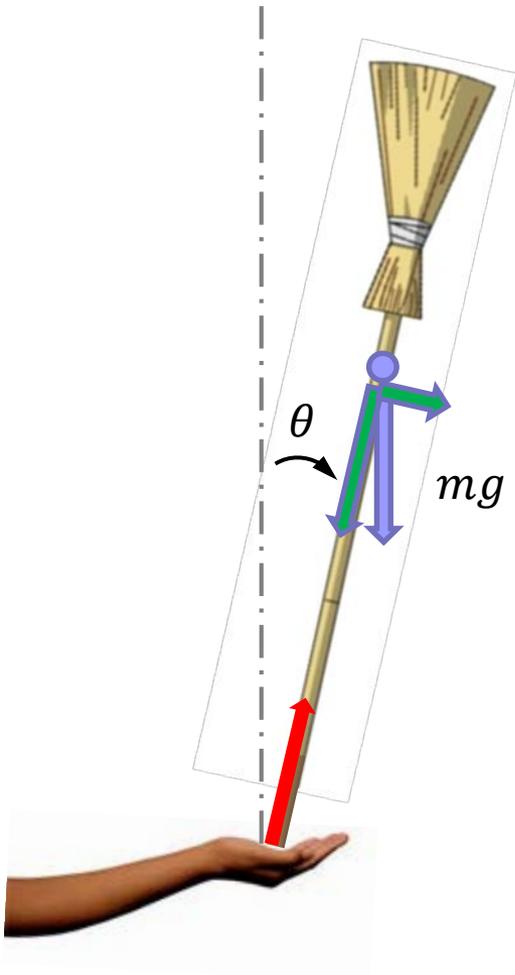


伝達関数の安定性から実物の挙動を把握するには、  
制御対象の平衡点近傍での振る舞いを線形システム  
によって近似する必要がある。



線形近似

# 線形近似



ほうきの慣性モーメント(端点まわり):  $I$

ほうきの質量:  $m$

重力加速度:  $g$

回転中心から重心までの距離:  $l$

ほうきの角度:  $\theta$

回転の粘性摩擦係数:  $\mu$

オイラーの運動方程式:  $I\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} = mg l \sin \theta$

オイラーの運動方程式:  $I\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} = mgl \sin \theta$

線形な微分方程式: 解の重ね合わせが成立



ある解のスカラー倍も解になる.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\alpha\theta) = \alpha\ddot{\theta}, \frac{d}{dt}(\alpha\theta) = \alpha\dot{\theta} \text{ だが, 一般に } \sin \alpha\theta \neq \alpha \sin \theta$$

$I\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} = mgl \sin \theta$  が解  $\theta(t)$  を持っても,  $\alpha\theta(t)$ ,  $\alpha \neq 1$  は解でない.

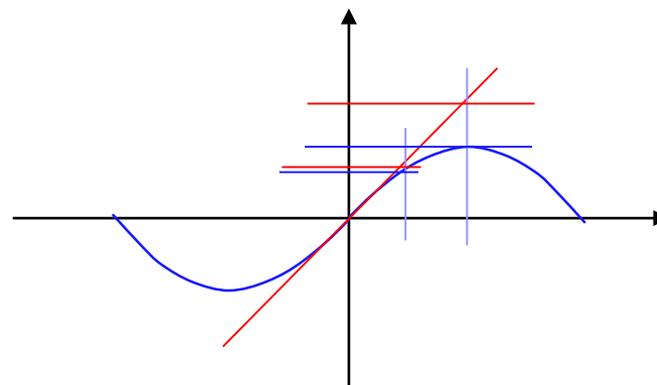


線形な微分方程式でない.

# 線形近似

オイラーの運動方程式:  $I\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} = mgl \sin \theta$

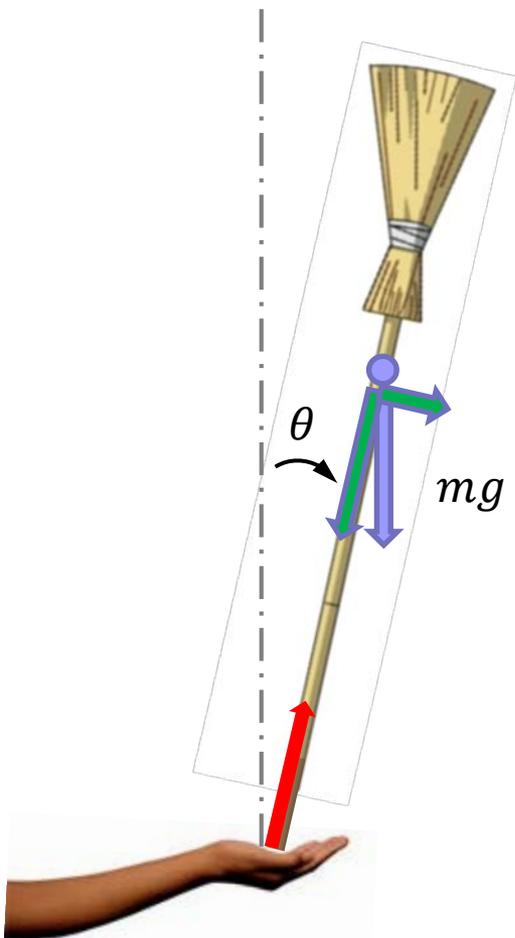
$\theta$ が微小であるとき,  $\sin \theta \simeq \theta$



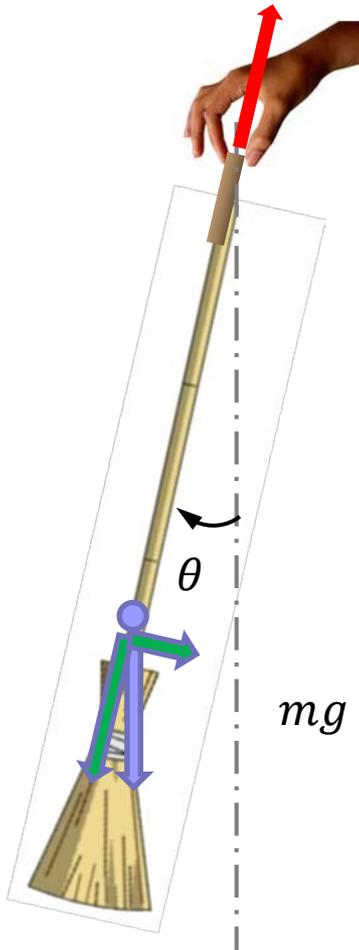
線形化された運動方程式:  $I\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} - mgl\theta = 0$

$$\theta(s) = \frac{I(\dot{\theta}(0) + s\theta(0)) + \mu\theta(0)}{Is^2 + \mu s - mgl}$$

$I, \mu, m, g, \ell$  は全て正  $\Rightarrow$  異符号があるので不安定



# 線形近似



$$\text{運動方程式: } I\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

$$\text{線形化: } I\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + mgl\theta = 0$$

$$\theta(s) = \frac{I(\dot{\theta}(0) + s\theta(0)) + \mu\theta(0)}{Is^2 + \mu s + mgl}$$

2次系はすべての符号が正のとき安定

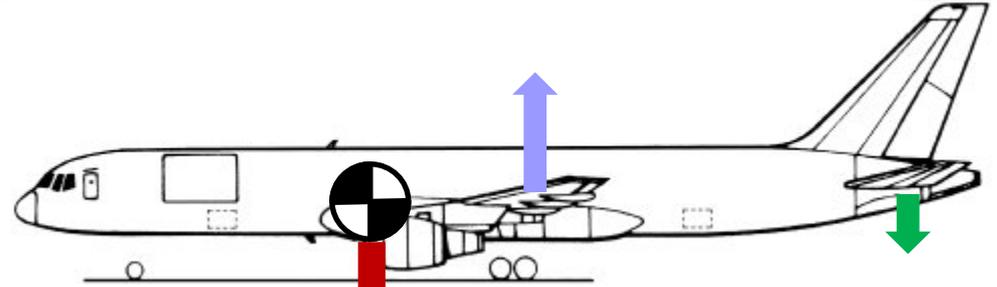
物理的解釈: 生じた変位を減少させるように力が働く(復元力). だから安定になる.

# Why paper airplane can fly ?

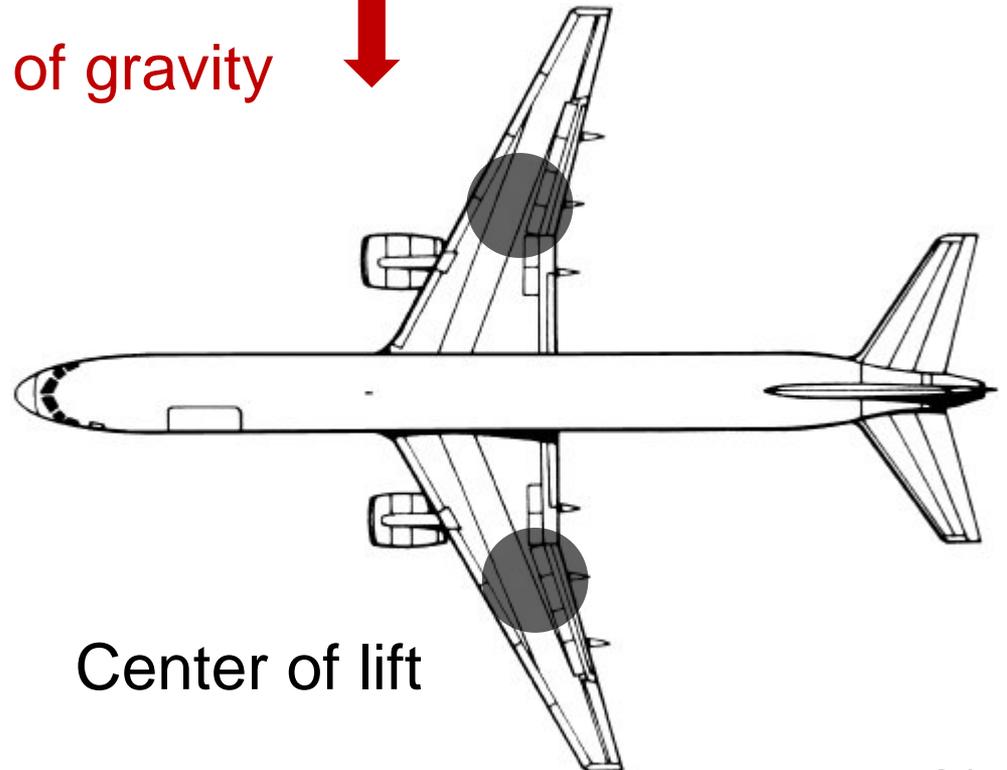
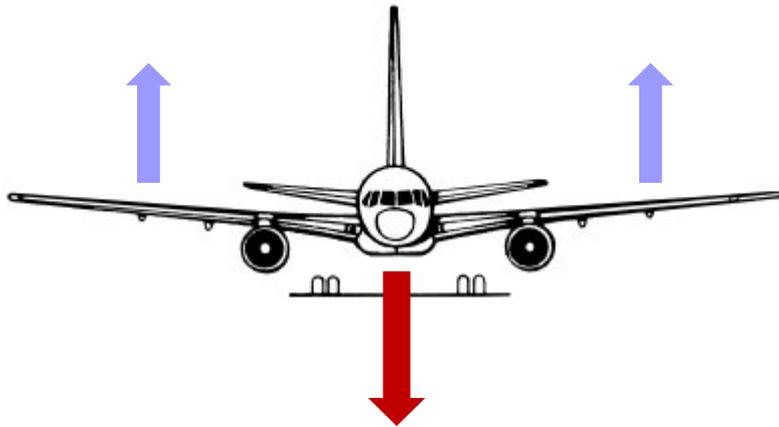


(Directional dependency)

# Pitch Dynamics of airplane

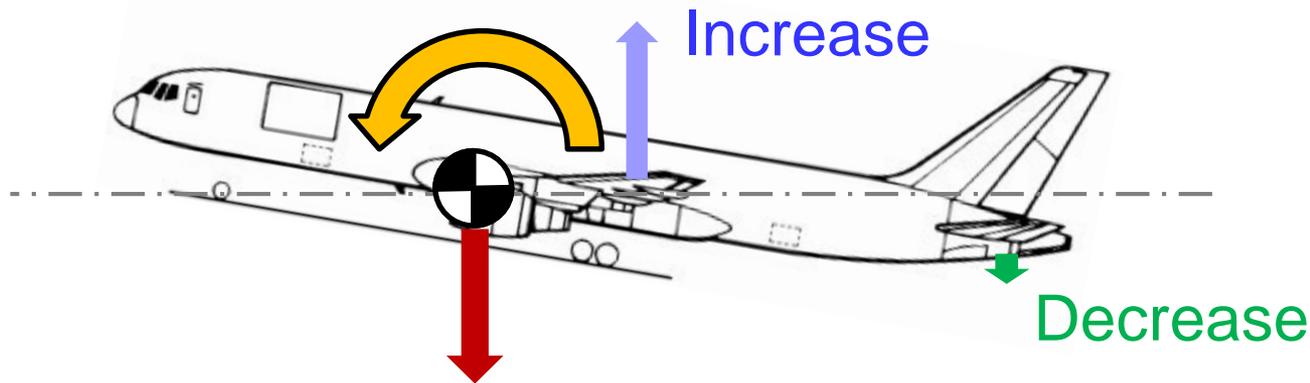
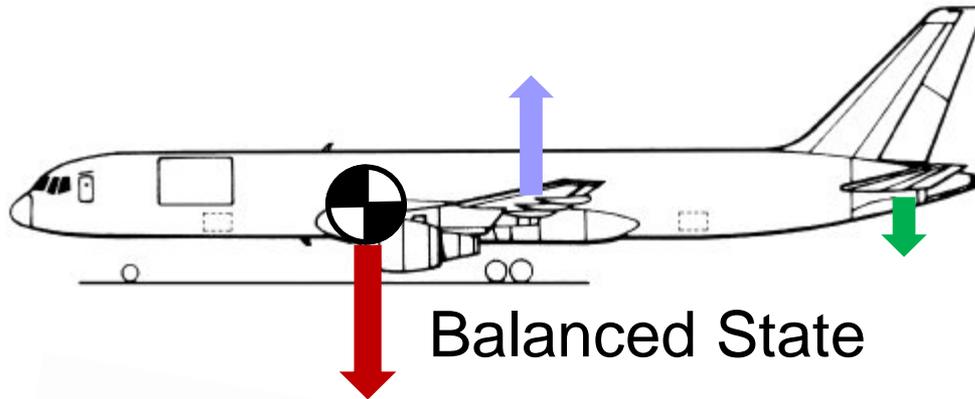


Center of gravity

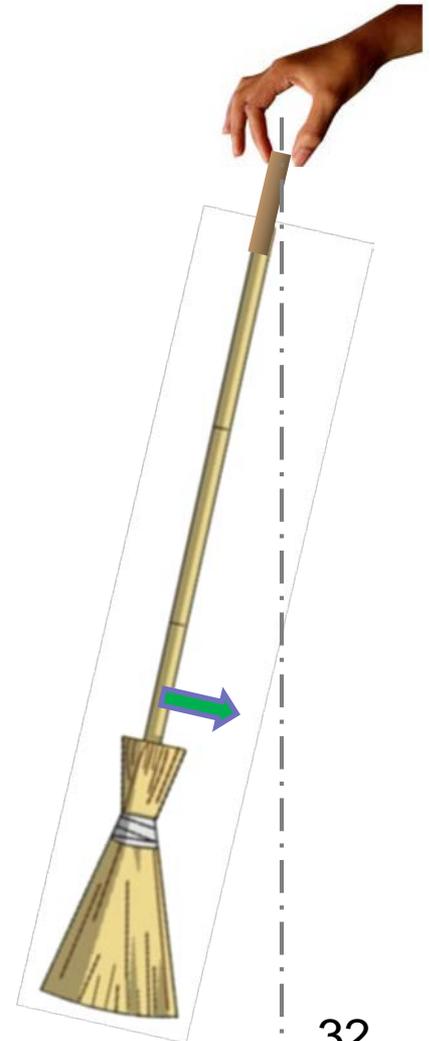


Center of lift

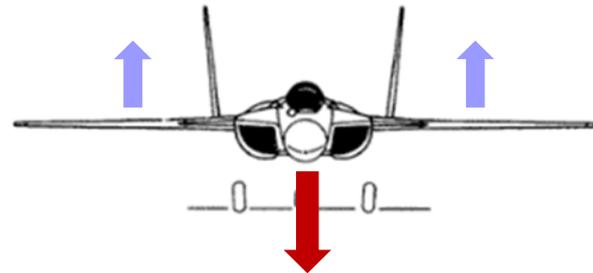
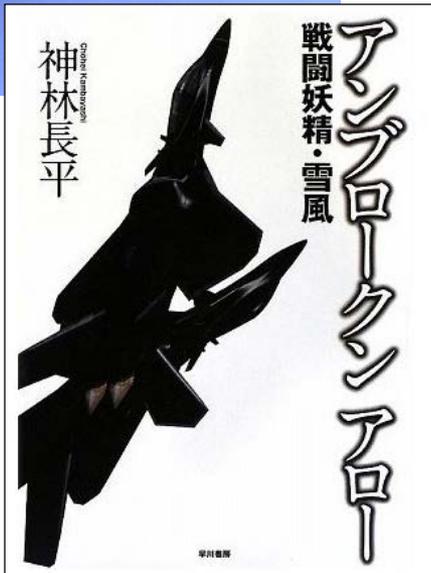
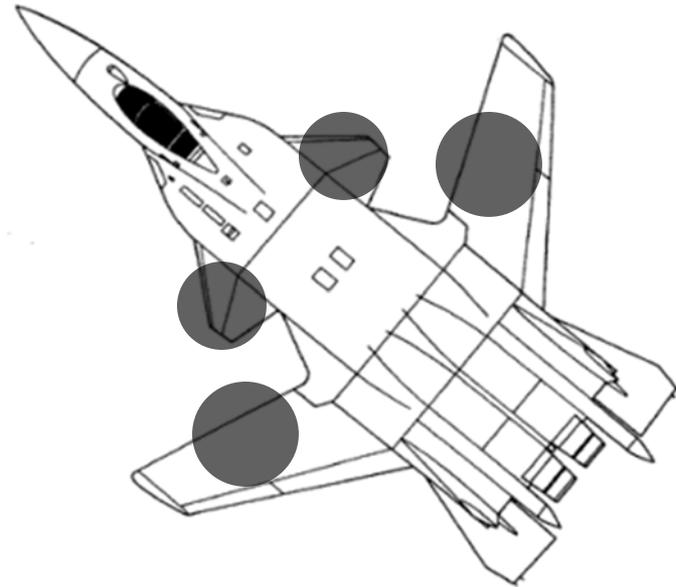
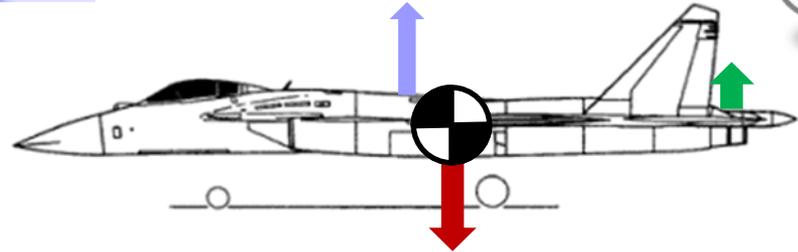
# Behavior of Sweptback Wing



When pitch angle increases, restoring moment is generated



# Fictitious Design?!



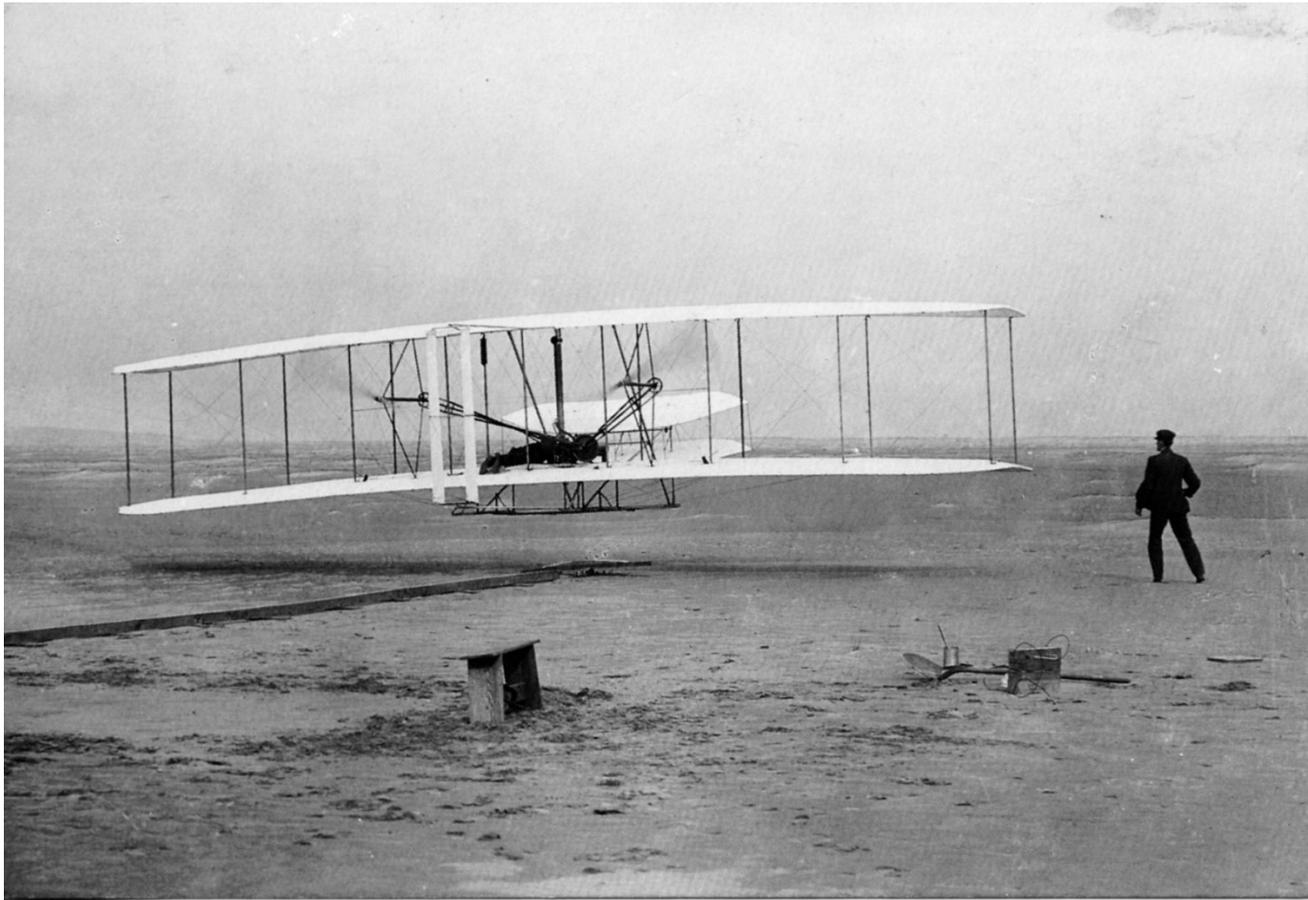
# Real Airplanes with Forward Swept Wings

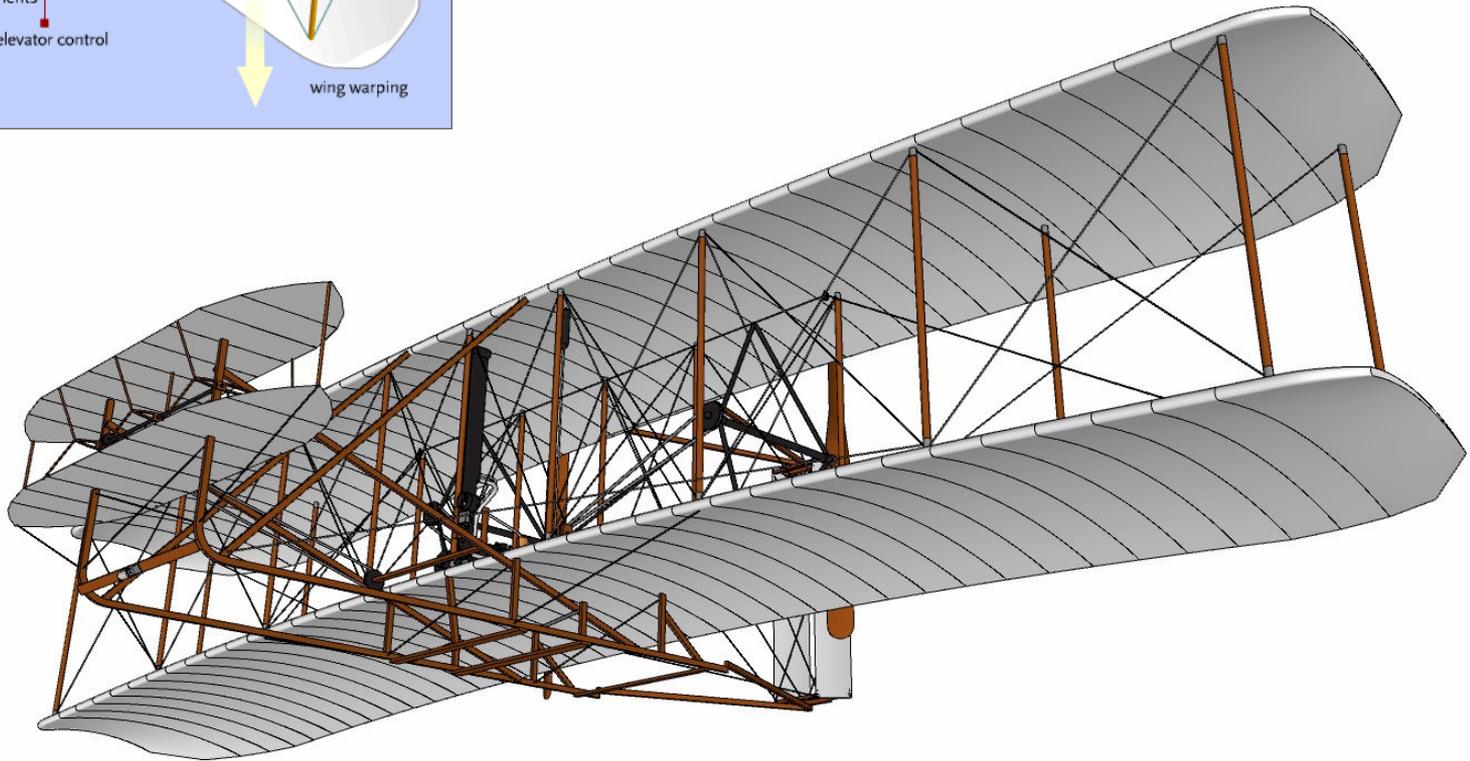
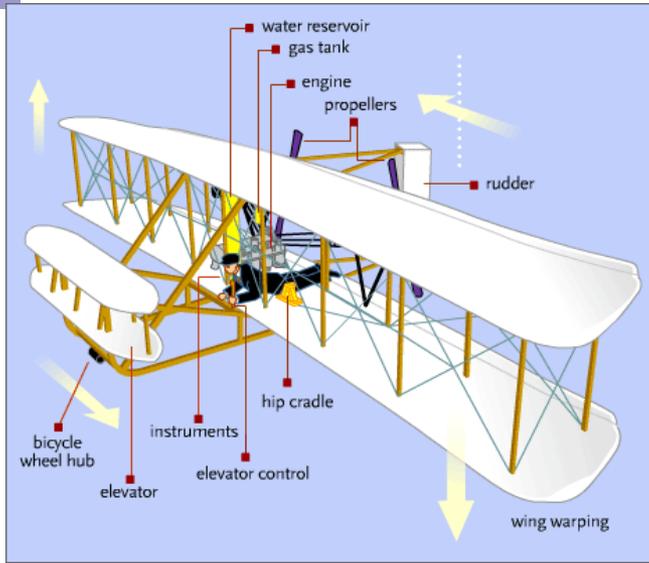


Improve maneuverability by sacrificing airframe stability (Feedback Stabilization)



# ■ Wright Flyer





Wright flyer (1903) のピッチ安定性は非常に低く, 極めて速い手動制御の介入がないと, 飛行を継続できないことが後の研究で明らかとなった.

それを考慮に入れて, 制御機構 (wing-warping) を導入したことが, **制御の重要性を当初から認識していたことが**, 世界初の有人動力飛行を成功させた要因といわれている.

## To Do (今回)

- 1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする)
- 2) 復習
- 3) 教科書 5.1～5.2 を読む.