システム制御 I

4学期
月 5, 6限　14:00-16:10
木 3, 4限　11:00-13:10
5号館 第15講義室 (システムコース）

担当:平田 健太郎

1/6 第8回

過渡応答と安定性 (2)

Schedule

1. 12/2 (today)
2. 12/5
3. 12/9
4. 12/12
5. 12/16
6. 12/19
7. 12/23
8. 1/6
9. 1/9 中間試験
10. 1/16
11. 1/20
12. 1/23
13. 1/27
14. 1/30
15. 2/3
16. 2/6 期末試験

前回のおさらい

時間領域における応答

インパルス応答
ステップ応答

演習問題（2）の解説

2018/12/26　担当　平田，中村

システム制御Ｉ　演習（3）

1.　以下の問いに答えよ．なおラプラス変換 $\mathcal{L}[\cdot]$ は，片側ラプラス変換を指すものとする．

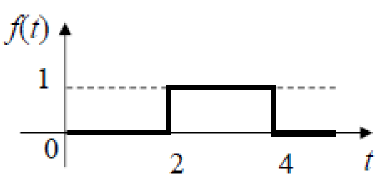
（1）指数関数 $e^{\alpha t}$（α：複素数）のラプラス変換と収束領域を求めよ．

（2）問(1)の結果を用いて，正弦関数 $\sin(\omega t)$のラプラス変換を求めよ．

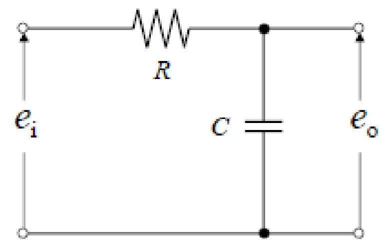
（3）ステップ関数$1(t)$のラプラス変換を求めよ．

（4）$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ であるとき，$f(t-T)$（$T>0$：定数）のラプラス変換を求めよ（答えのみでよい）．

（5）問(3)，(4)の結果を用いて，下図に示す関数 $f(t)$のラプラス変換を求めよ．



2. 下図の RC 回路を考える．ただし，e_i は入力電圧，e_o は出力電圧（コンデンサの端子電圧），R は抵抗，C は静電容量である．以下の問いに答えよ．



（1）電圧 e_i, e_o の関係を表す回路方程式（微分方程式）を求めよ．

（2）電圧 e_i から e_o までの伝達関数 $G(s)$を求めよ．

（3）伝達関数 $G(s)$の極を求めよ．

（4）コンデンサの初期電圧を $e_\mathrm{o}(0)= a \neq 0$ としたとき，出力電圧 e_o のラプラス変換 $E_\mathrm{o}(s)$を求めよ．

（5）出力電圧 $e_\mathrm{o}(t)$を求めることで，応答（出力）は初期値と入力に関する項の和で表現されることを示せ．ヒント：入力に関する項は合成積を用いて表す．

3. 空欄 1A から 4F の語句として最も適切なものを下の解答群から選びなさい．ただし，同じ選択肢を何回選んでもよい．また，空欄 a から d には適切な数式を記述すること．

（1）多項式の比で表される関数を[1A]とよぶ．[1A]で表される伝達関数は，厳密にプロパー，バイプロパー，非プロパーなどに分類される．例えば，以下の伝達関数 G_1 は[1B]，G_2 は[1C]，G_3 は[1D]である．

$$G_1(s) = \frac{7s+1}{3s+2}, G_2(s) = \frac{5s+3}{s^2+3s+2}, G_3(s) = s$$

（2）線形時不変システム S の出力 $y(t)$は，システム S の[2A]応答 $g(t)$と入力 $u(t)$の合成積 $y(t)=g*u$ =[a]で表される．$g(t)$, $u(t)$, $y(t)$のラプラス変換をそれぞれ $G(s)$, $U(s)$, $Y(s)$としたとき，$Y(s)$=[b]となる．ここで，入力 $u(t)$がディラックのデルタ関数 $\delta(t)$で表されるとき，$U(s)=\mathcal{L}[\delta(t)]$=[c]となるため，$Y(s)$=[d]が成立する．したがって，伝達関数は[2B]応答のラプラス変換とみなせる．

（3）制御方法は大きく分けて 2 つに分類される．一方は，制御器と制御対象に対応する伝達ブロックが[3A]結合された[3B]制御である．もう一方は，制御対象からの出力が帰還されて，制御器への入力として与えられる制御方法であり，これを[3C]制御という．
第 1，2 回目の講義では，Ball and Beam 装置においてボールが原点で停止するように，レールを傾けるタイミングを事前に計算する方法を説明した．この方法は広義の[3D]制御とみなせる．

（4）機械系と電気系の間にはアナロジーが存在する．例えば，力と電圧，速度と電流の組み合わせの場合，マスは[4A]，バネは[4B]，ダンパーは[4C]と対応する．また，力と電流，速度と電圧のように組み合わせを逆にすると，コイルは[4D]，コンデンサは[4E]の対応関係となる．
なお，電流は配線を切断し，その間に電流計を挿入することで計測されるため，電流と（そのアナロジーの関係にある）力は[4F] Variable とよばれる．

解答群

ア）抵抗　イ）コイル　ウ）コンデンサ　エ）インパルス　オ）ステップ　カ）ランプ　キ）マス
ク）バネ　ケ）ダンパー　コ）直列　サ）並列　シ）Heaviside　ス）Across　セ）Pade
ソ）Through　タ）複素関数　チ）指数関数　ツ）有理関数　テ）非有理関数　ト）厳密にプロパー
ナ）バイプロパー　ニ）非プロパー　ヌ）フィードバック　ネ）フィードフォワード

低次系の応答

微分要素

$$G(s) = Ts$$

変位（回転角）の微分は速度（角速度）である．発電機を利用したタコジェネレータは発生電圧が回転角速度に比例するので微分要素とみなせる．だが, 純粋な微分要素は非プロパーなので実現できない．

近似微分要素

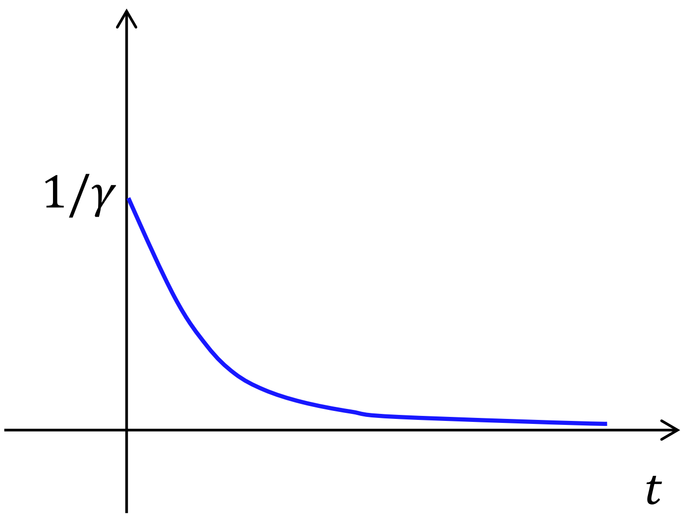
$$G(s) = \frac{Ts}{1+\gamma Ts}, \gamma > 0$$

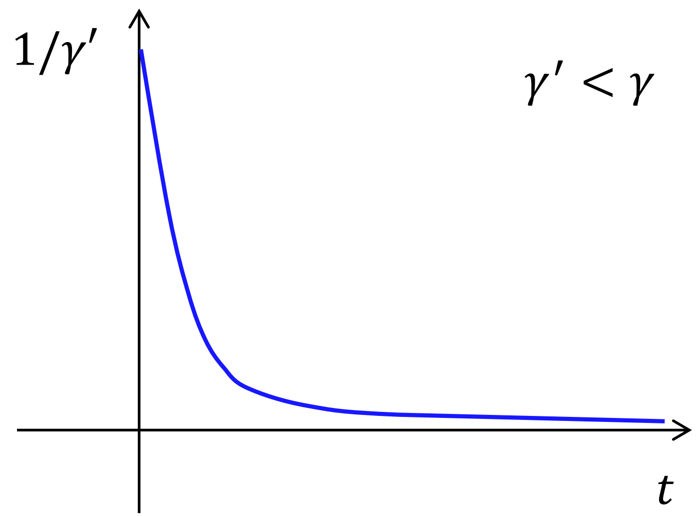
直観的には $\gamma \ll 1$ のとき $G(s) \simeq Ts$

ステップ応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Ts}{1+\gamma Ts}\ \frac{1}{s}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{T}{1+\gamma Ts}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/\gamma}{s+1/(\gamma T)}\right] = \frac{1}{\gamma}e^{-\frac{1}{\gamma T}t}$$





$\gamma \to 0$ のとき Ts のステップ応答 $T\delta(t)$ に近づく.

$\delta(t)$: ディラックのデルタ関数

1次系 (1st-order system)

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

ステップ応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s] = \mathcal{L}^{-1}\left[K\left(\frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}\right)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}\right)\right]$$

$$= K\left(1 - e^{-t/T}\right), t > 0$$

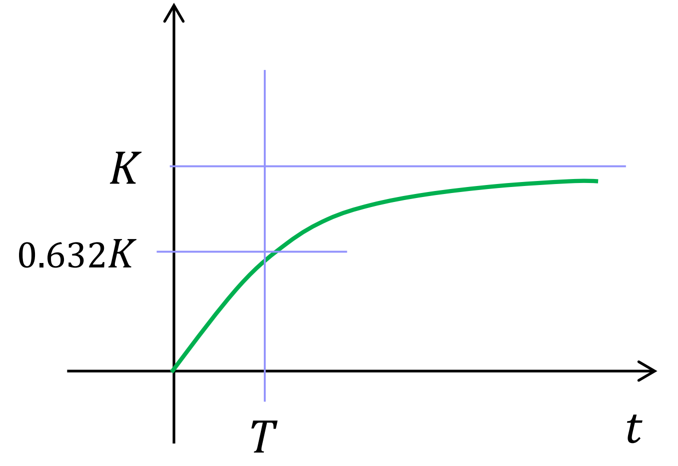
$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}$$

K: ゲイン

入力の大きさが定常状態で K 倍される.

T: 時定数

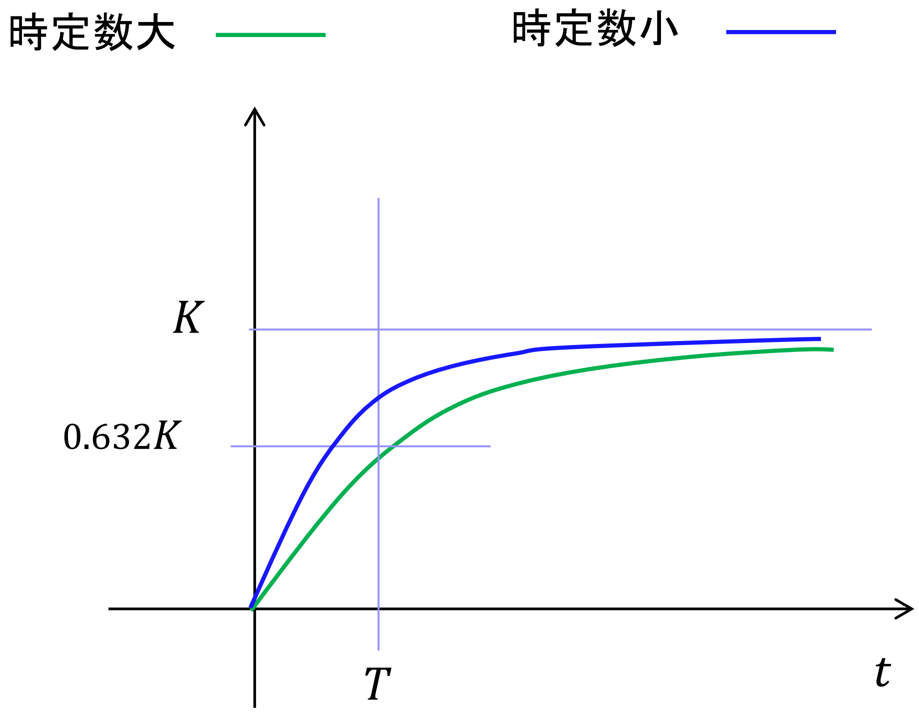
応答が最終値の63.2%に達するまでの時間. 応答の速さの目安



$e \simeq 2.7 \qquad e^{-1} \simeq 0.368$

$$y(T) = K(1 - e^{-1}) = 0.632K$$

$$G_1(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} \qquad G_2(s) = \frac{K}{T_2 s + 1} \qquad T_1 > T_2$$



時定数が小さいほど, 応答は速くなる

2次系 (2nd-order system)

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}, \quad a_1, a_2, b > 0$$

標準形に変換（特性を見やすくするため）

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ζ: 減衰係数, ω_n: 自然角周波数

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s - p_1)(s - p_2) = 0$$

$$p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$p_1, p_2 = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

判別式は ζ のみに依存　$\Rightarrow \zeta \geq 1$ なら実根, $0 < \zeta < 1$ なら共役複素根

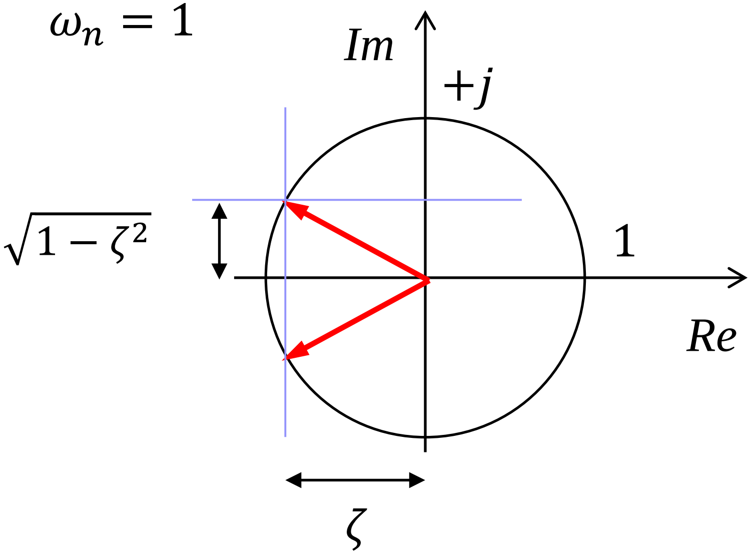
複素根のとき, $-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}$ の絶対値は $\sqrt{(-\zeta)^2 + \left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2} = 1$

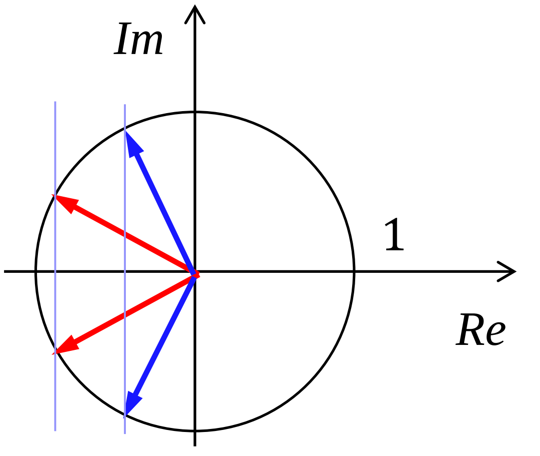
従って, 複素根は単位円周上にある.

実部, 虚部のバランスは ζ によって決まり, 拡大率を ω_n が表す.

$$p_1, p_2 = \omega_n\left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

$\omega_n = 1$

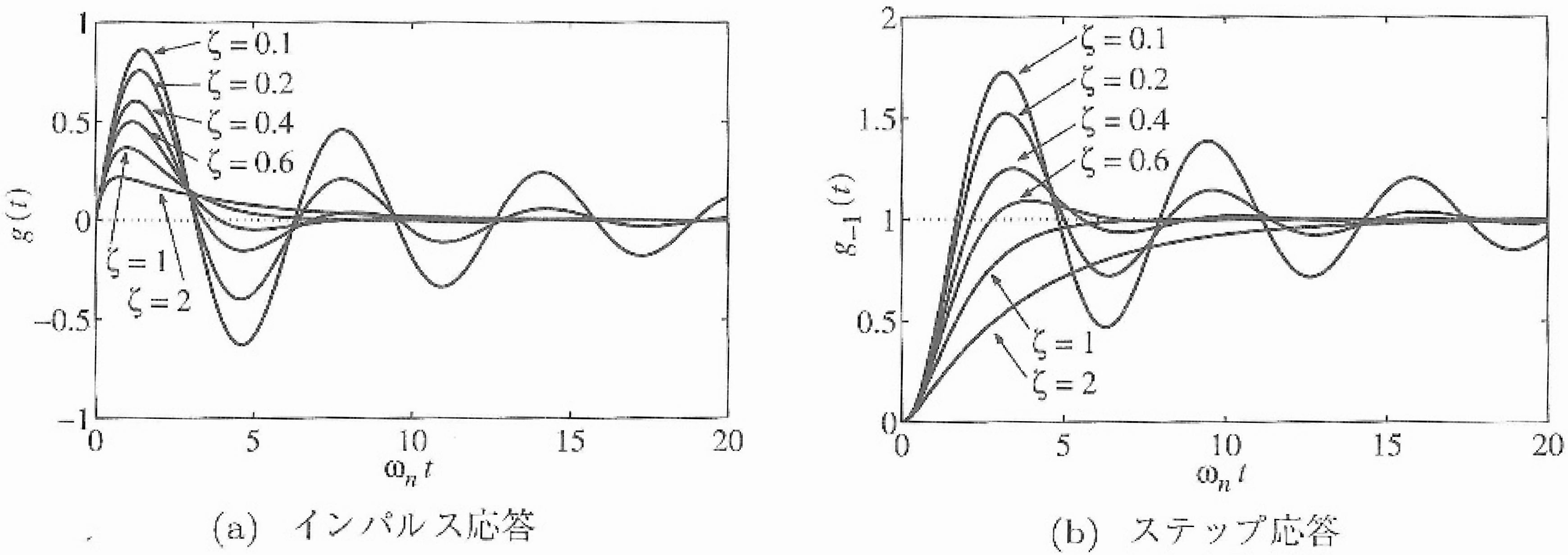




ζ: 大 ⇒ 減衰大, ζ: 小 ⇒ 減衰小

$\zeta = 0$ のとき, 根は純虚数 ⇒ 減衰のない振動

$e^{p_1 t} = e^{\omega_n\left(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}\right)t}$ なので, 横軸に t ではなく, $\omega_n t$ をとれば, ζ の違いによる応答の差だけを評価できる. (時間軸の伸縮)



ζ = 0.1
ζ = 0.2
ζ = 0.4
ζ = 0.6
ζ = 1
ζ = 2
g(t)
ω_n t
(a) インパルス応答
ζ = 0.1
ζ = 0.2
ζ = 0.4
ζ = 0.6
ζ = 1
ζ = 2
g_{-1}(t)
ω_n t
(b) ステップ応答

図 4.5 2 次系の応答

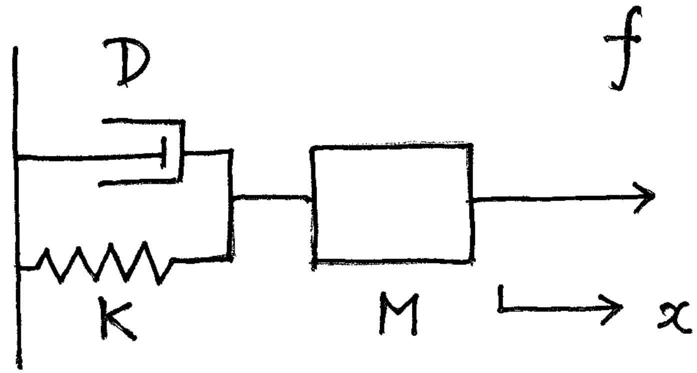
ドアクローザーについて

ドアクローザーとは？

ドアクローザー自体はバネとダンパーの組み合わせ

回転型のマス･バネ･ダンパー系 ⇨ 2次系

マス・バネ・ダンパー系



$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = f$$

初期値応答 ⇒ 外力 $f \equiv 0$（恒等的に零） 初期値 $x(0) \neq 0, \dot{x}(0) = 0$

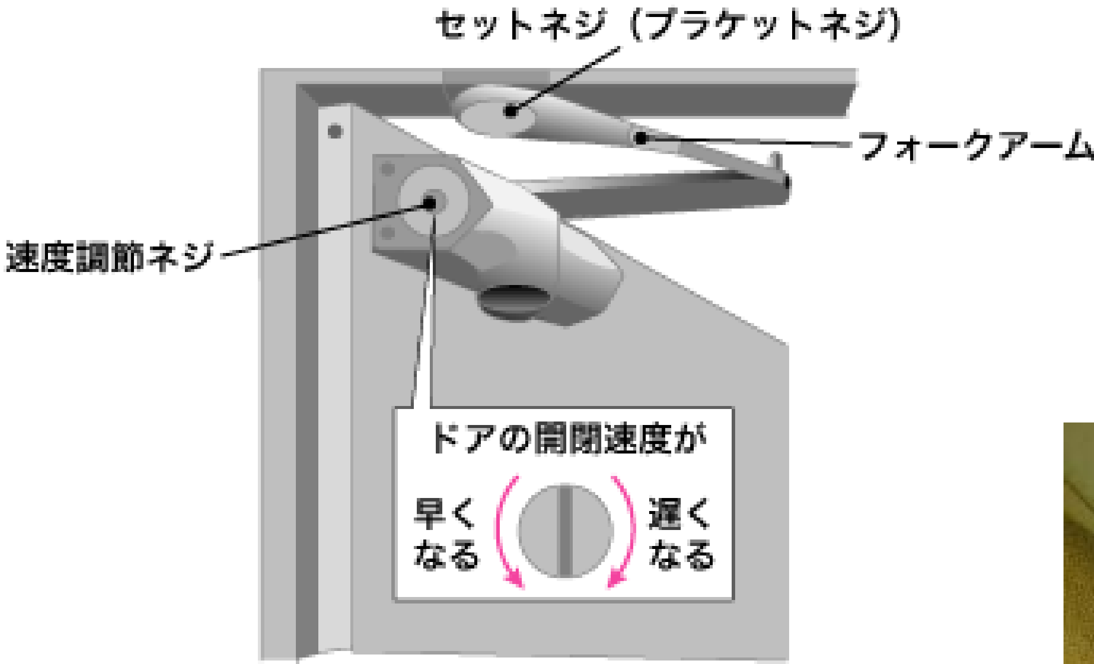
$$\mathcal{L}[\dot{x}] = sX(s) - x(0), \quad \mathcal{L}[\ddot{x}] = s\{sX(s) - x(0)\} - \dot{x}(0)$$

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = f \quad \Rightarrow \quad X(s)(Ms^2 + Ds + K) = (Ms + D)x(0)$$

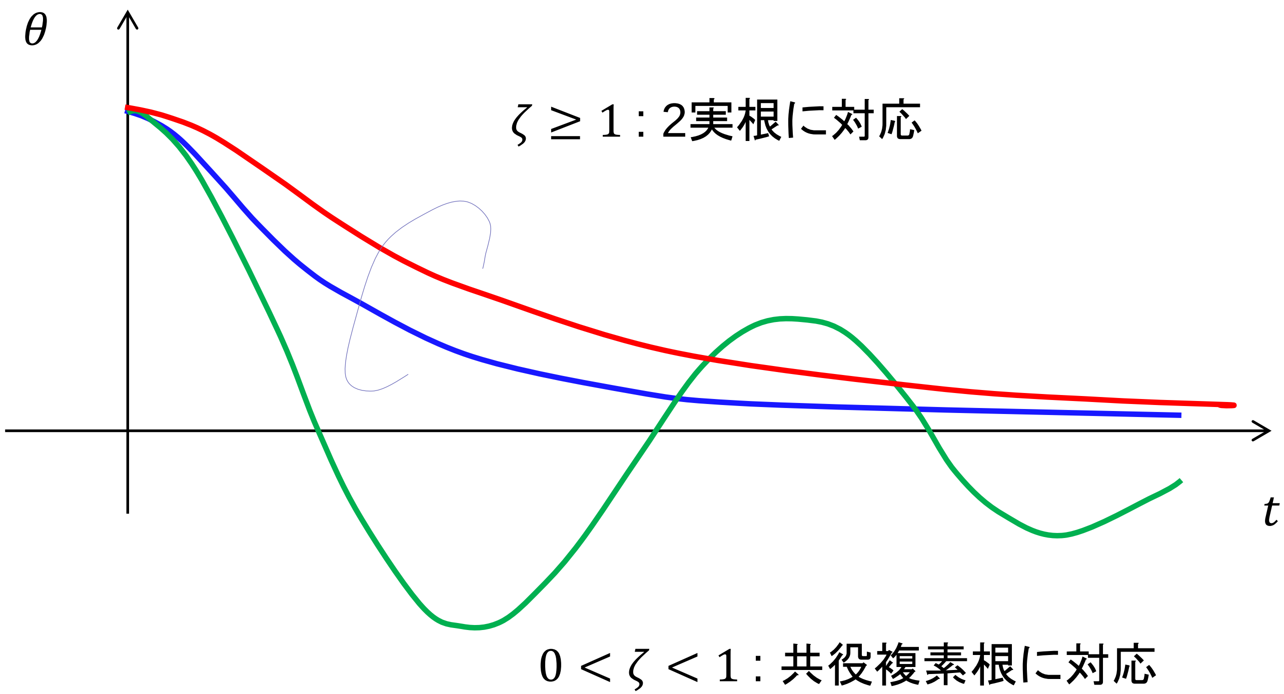
$$X(s) = \boxed{\frac{Ms + D}{Ms^2 + Ds + K}}\, x(0)$$

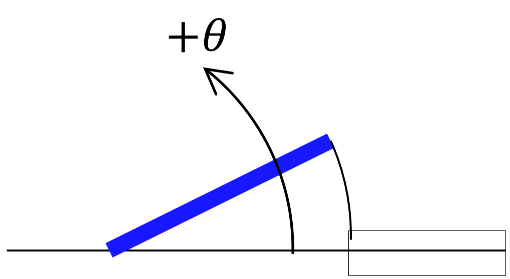
この2次系のインパルス応答の $x(0)$ 倍

過渡特性の概略は $\dfrac{1}{Ms^2 + Ds + K}$ と同じ



どう調整するのがよいか？





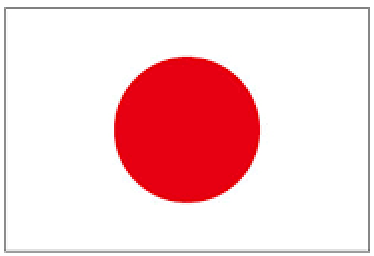
通常のドアは $\theta > 0$ の範囲でしか開閉しないので，複素根になってθが負の領域になると「バタンッ！」

どう調整するのがよいか？

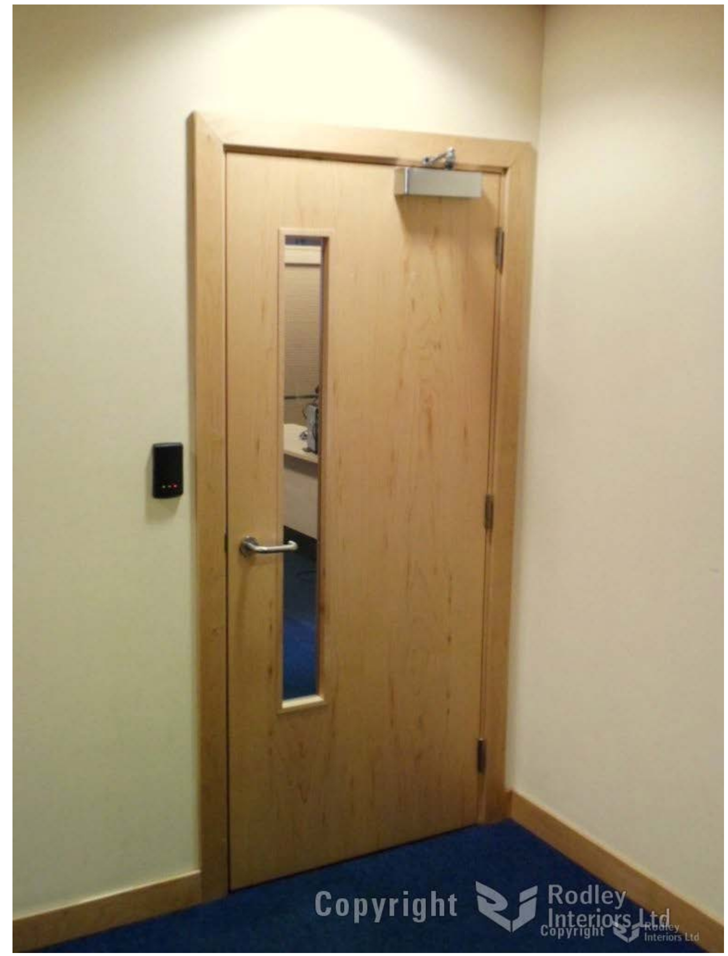
制御工学的見解：　複素根にならず, 最も早く閉まる（最大の減衰度が得られる）ようにする.

$\zeta = 1$ となるように調整

How should the door behave?



VS



3次系の応答 （概要）

$$G(s) = \frac{k}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$ 零点なし

$$G(s) = \frac{k(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$ 零点あり

分母は実係数多項式なので, 一つは必ず実根, のこりは実根2つか共役複素根

零点ありの場合, $|p_1 - z_1| \simeq 0$ のとき, モード $e^{p_1 t}$ の応答への寄与は小さい. (Heavisideの展開定理を考えよ.) ($p_1 = z_1$ なら完全に2次系になる.) 極めて近い極と零点の組をダイポールという.

零点が不安定 ($z_1 > 0$) の場合, 逆応答を生じる (承前).

3次系の応答（詳細は教科書を読んでおく）

線形システムの安定性

伝達関数(インパルス応答)のモード展開

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}, n > m$$

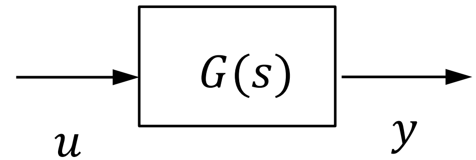
$$= \frac{A_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n}$$

$$\therefore \quad g(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}, t > 0$$

$Re[p_k] < 0, \forall k$ ならば, $t \to \infty$ のとき $g(t) \to 0$

入出力システム $y(s) = G(s)u(s)$ としての安定性?

定義（安定性）



任意の有界な入力 $u(t)$ に対して,（初期値を零としたときの）応答 $y(t)$ が常に有界となるとき, システムは入出力安定という.

Bounded Input Bounded Output (BIBO) stable
以下では単に安定という.

$|u(t)| \leq N_1, t > 0$ であれば,　$N_2 > 0$ が存在して, $|y(t)| \leq N_2, t > 0$ となる.

定理

$G(s)$ が安定であるための必要十分条件は, そのインパルス応答 $g(t)$ が絶対可積分であること, すなわち $M > 0$ が存在して

$$\int_0^\infty |g(t)|dt \le M < \infty$$

が成立することである.

証明

(十分性)

$|u(t)| \leq N, t > 0$ とする.

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

より

$$|y(t)| \leq \int_0^t |g(\tau)||u(t-\tau)|d\tau \leq N \int_0^t |g(\tau)|d\tau \leq NM < \infty$$

よって出力 $y(t)$ は有界.

関数 $f(t)$ が $t \to \infty$ のとき値 a に収束する.

⇕

任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある t_0 が存在し, $t > t_0$ ならば$|f(t) - a| < \epsilon$ が成り立つ.

関数 $f(t)$ が $t \to \infty$ のとき発散する.

⇕

任意の$M > 0$ に対して (どんなに大きな$M > 0$ に対しても) , $|f(t_1)| \geq M$ となるような, (有限の) t_1 が必ず存在する.

(必要性)

積分 $\int_0^\infty |g(t)|dt$ が発散すれば, 出力が発散するような, 有界な入力が存在することを示そう. 仮定より任意に大きな $M_k > 0$ に対して

$$\int_0^{t_k} |g(t)|dt \geq M_k$$

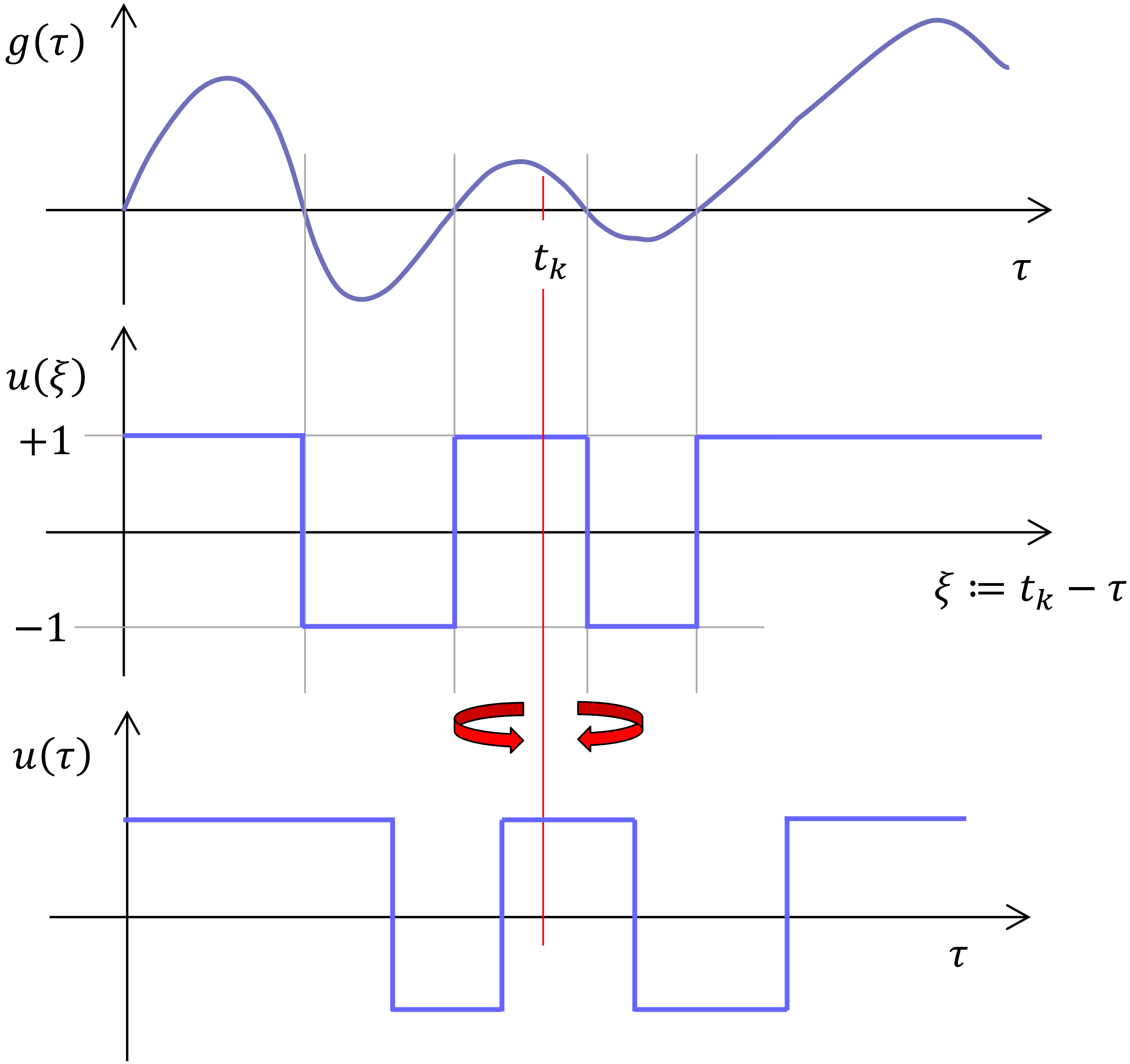
となるような $t_k > 0$ が必ず存在. ここで入力 $\tilde{u}$ を

$$\tilde{u}(t_k - \tau) = \begin{cases} 1, & g(\tau) > 0 \\ -1, & g(\tau) < 0 \end{cases}$$

とすると, $\tilde{u}(\tau), 0 \leq \tau \leq t_k$ は有界. このとき

$$y(t_k) = \int_0^{t_k} g(\tau)\tilde{u}(t_k - \tau)d\tau = \int_0^{t_k} |g(\tau)|d\tau \geq M_k$$

M_k は任意であったので, 出力 $y(t)$ は発散する.



$g(\tau)$
t_k
τ
$u(\xi)$
$+1$
-1
$\xi := t_k - \tau$
$u(\tau)$
τ

$G(s)$ が有理関数の場合

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}, n\geq m \text{ (プロパー)}$$

定理

$G(s)$ が安定であるための必要十分条件は, $G(s)$ のすべての極（特性根）の実部が負となることである.

証明

$n>m$ のとき,

$$g(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}C_{ik}t^{k-1}e^{p_i t}, t>0$$

$\sigma_i = Re[p_i] < 0, i = 1, \cdots, r$ のとき, $g(t)$ の各項について

$$\int_0^\infty \left| t^{k-1} e^{p_i t} \right| dt \quad = \int_0^\infty \left| t^{k-1} \right| \left| e^{p_i t} \right| dt = \int_0^\infty t^{k-1} e^{\sigma_i t} dt$$

$$= \left[\frac{t^{k-1} e^{\sigma_i t}}{\sigma_i} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^{k-2} e^{\sigma_i t}}{\sigma_i (k-1)} dt$$

前述のとおり $e^{-\sigma_i t}$ の発散度合いはどんな多項式よりも強い→第1項は0

第2項はべき乗数が1減っているので, 繰り返せば $e^{\sigma_i t}$ の積分に帰着される
→絶対可積分

したがって$g(t)$ は絶対可積分. よって先の定理より, $G(s)$は安定.

$n = m$ のとき, $G(s)$はデルタ関数$\delta(t)$を含むが, $\int_{0-}^\infty |\delta(t)| dt = 1$.

逆に少なくともひとつの σ_i が 0 または正とする．いま $\sigma_1 \geq 0,$
$\sigma_i < 0, i = 2, \cdots, r$ とする.

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

より

$$g(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} C_{ik} t^{k-1} e^{p_i t}, t > 0$$

$$\Downarrow$$

$$|g(t)| \geq \sum_{k=1}^{n_i} |C_{1k}|\, t^{k-1} e^{\sigma_1 t} - \sum_{i=2}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} |C_{ik}|\, t^{k-1} e^{\sigma_i t}$$

第2項は可積分だが, 第1項の積分は発散. $g(t)$ は絶対可積分でないので, $G(s)$は安定でない.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$D(s) = 0$ の根（特性根, 伝達関数の極）を計算して, 実部の符号を調べればよい. （実係数多項式）

1次系:　明らか （実根）
2次系:　解の公式
3次系:　実根＋2次系
4次系:　2次系×2次系で表現できる

5次系以上 ???

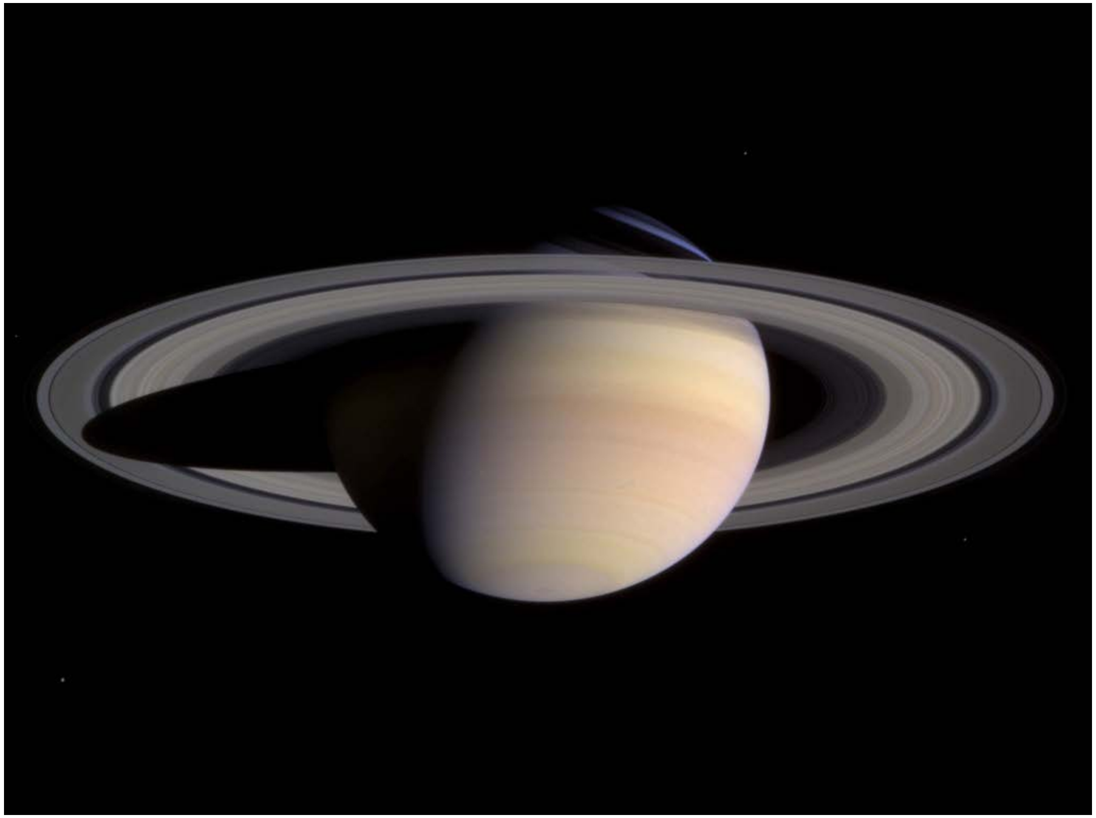
Maxwell は On Governors で5次のモデルを導いたが, 安定条件を明らかにすることはできなかった.

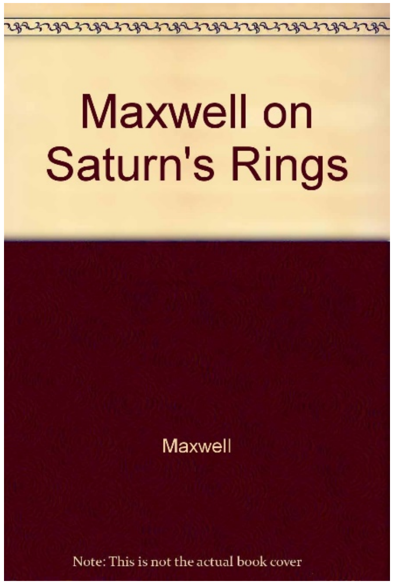
実係数多項式の零点がすべて複素左半平面にあるか否かを, 個々の零点の値を求めることなく, 係数から判定する方法が求められる.

⬇

ラウス-フルビッツ (Routh-Hurwitz) の安定判別法

The next subject of research





To Do (今回)

1） (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする)
2） 試験勉強
3） 復習
4） 教科書 4.4～4.8 を読む.

中間試験実施要領:

日時: 1/9 11:30–12:30　　11:15 集合
開始後30分以降退出可

場所: 2年生　09430xxx　第15講義室
再履修生　　　　　第4講義室（工学部1号館）

試験範囲: 12/23の講義内容まで
(ただし演習(3)は含む)

備考:　持ち込み (教科書, 参考書, プリントアウト, ノート等) なし