

システム制御 I

4学期

月 5, 6限 14:00-16:10

木 3, 4限 11:00-13:10

5号館 第15講義室 (システムコース)

担当: 平田 健太郎

12/23 第7回

過渡応答と安定性 (1)

Schedule

- | | | |
|-----------------|----------|------|
| 1. 12/2 (today) | 9. 1/9 | 中間試験 |
| 2. 12/5 | 10. 1/16 | |
| 3. 12/9 | 11. 1/20 | |
| 4. 12/12 | 12. 1/23 | |
| 5. 12/16 | 13. 1/27 | |
| 6. 12/19 | 14. 1/30 | |
| 7. 12/23 | 15. 2/3 | |
| 8. 1/6 | 16. 2/6 | 期末試験 |

前回のおさらい

フィードバック増幅器

ブロック線図

基本要素, 結合, FF vs. FB, 簡単化

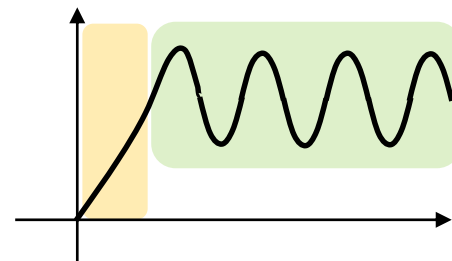
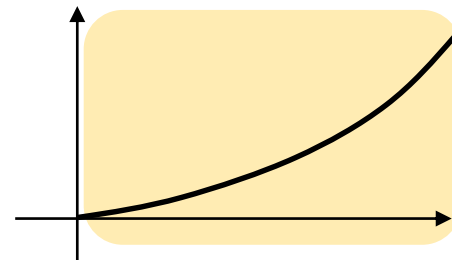
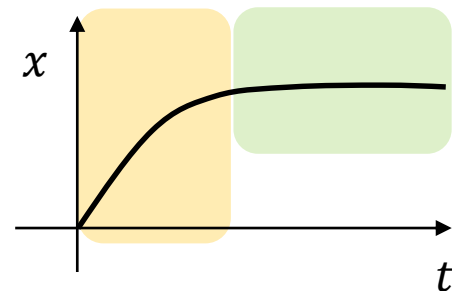
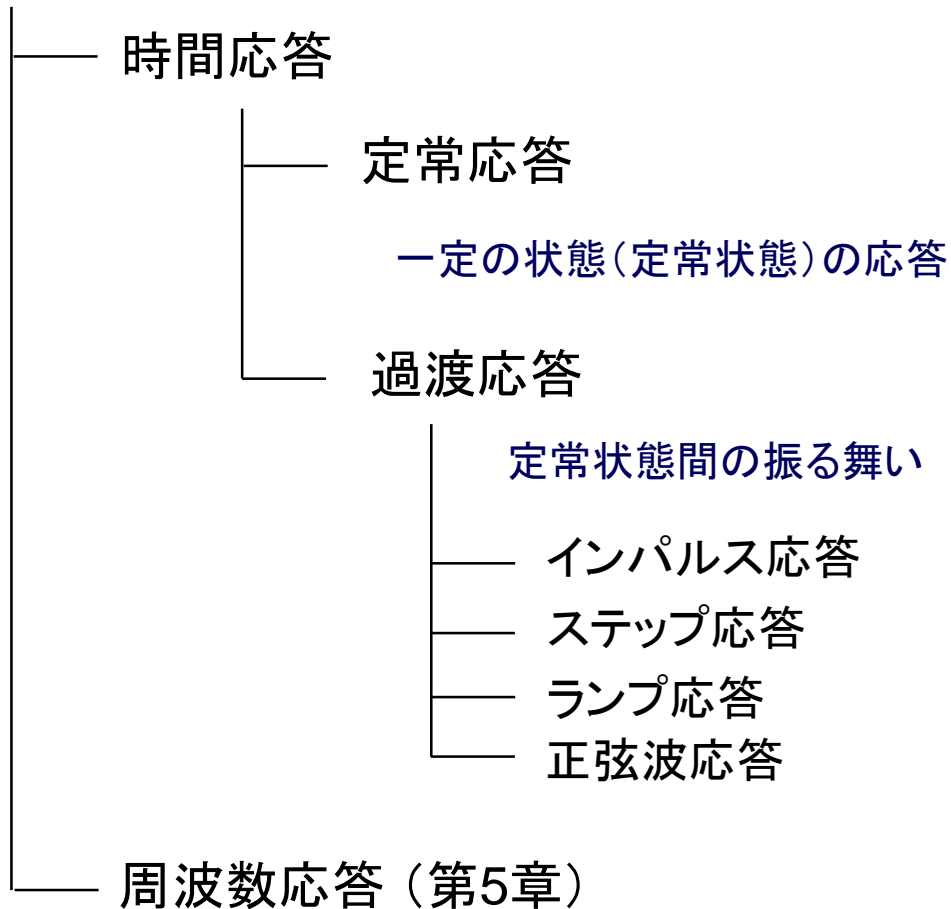
演習問題(1)の説明

To Do (前回)

- 1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする.)
 - 2) 復習
 - 3) 教科書 4.1～4.3 を読む.
 - 4) Webにアップロードする演習問題 (2)をやってくる.
-

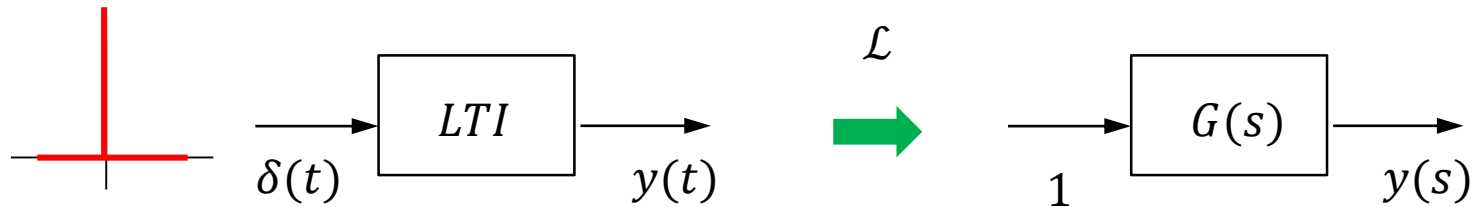
時間領域における応答

伝達関数の応答



■ 過渡状態
■ 定常状態

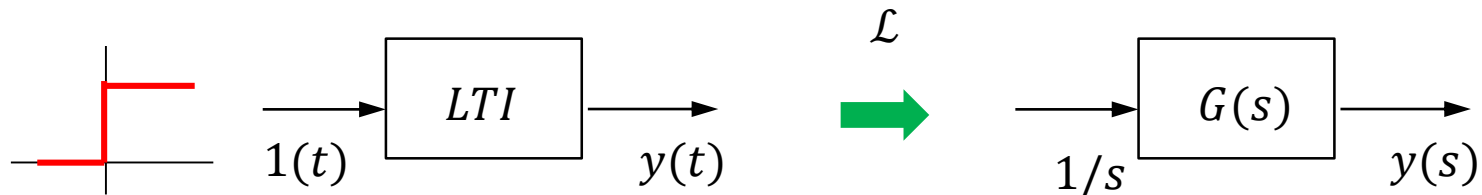
インパルス応答 (概念的に重要)



$$y(s) = G(s) \cdot 1 = G(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

ステップ応答 (実用上も重要)



$$y(s) = G(s) \cdot 1/s = G(s)/s$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s] = \int_0^t g(\xi) d\xi$$

インパルス応答

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

p_k : 極, 特性根

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}, n > m$$

$p_i \neq p_j, (i \neq j)$ と仮定

$$= \frac{A_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n}$$

$$A_k = \lim_{s \rightarrow p_k} [(s - p_k)G(s)]$$

Heavisideの展開定理

$$\therefore g(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, t > 0$$

$e^{p_k t}$: モード

$D(s)$ が $(s - p_k)^2$ 等の因子をもつ場合(重根), $e^{p_k t}, te^{p_k t}$ がモードに含まれる.

p_k は実係数多項式 $D(s)$ の零点 ($D(s) = 0$ の根)なので, 一般に $p_k \in \mathbb{C}$

$$p_k = \sigma + j\omega \rightarrow e^{p_k t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

$|e^{j\omega t}| = 1, \forall t$ なので, モード $e^{p_k t}$ は

任意の t に対して
あるいは
すべての t に対して

- $\sigma = \text{Re}[p_k] < 0$ ならば, $t \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束
- $\sigma = \text{Re}[p_k] > 0$ ならば, $t \rightarrow \infty$ のとき発散
- $\sigma = \text{Re}[p_k] = 0$ ならば, $t \rightarrow \infty$ のとき ± 1 間を振動し続ける



$\text{Re}[p_k] < 0, \forall k$ ならば, $t \rightarrow \infty$ のとき $g(t) \rightarrow 0$

$\lambda > 0$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-\lambda t} \rightarrow 0$?

$te^{-\lambda t} = \frac{t}{e^{\lambda t}}$ なので、分母・分子の増加のしかたを評価すればよい

テーラー(マクローリン)展開

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{1}{2}(\lambda t)^2 + \frac{1}{6}(\lambda t)^3 + \dots$$

$t > 0$ のとき、右辺の各項は正であるから

$$e^{\lambda t} > 1 + \lambda t + \frac{1}{2}(\lambda t)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad |e^{\lambda t}| > \left| 1 + \lambda t + \frac{1}{2}(\lambda t)^2 \right|$$

$$0 < |te^{-\lambda t}| = \frac{|t|}{|e^{\lambda t}|} < \frac{|t|}{\left| 1 + \lambda t + \frac{1}{2}(\lambda t)^2 \right|} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

$\therefore te^{-\lambda t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$ モード $t^n e^{p_k t}$ を含んでも結論は同じ

$Re[p_k] < 0, \forall k$ ならば、 $t \rightarrow \infty$ のとき $g(t) \rightarrow 0$

複素根の場合

$s \in \mathbb{C}$ の共役複素数 \bar{s} は

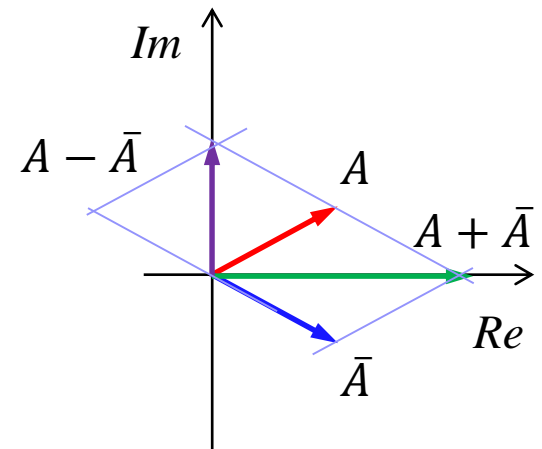
$s = \sigma + j\omega$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ に対して $\bar{s} = \sigma - j\omega$ で定められる.

実係数多項式 $D(s)$ の零点 ($D(s) = 0$ の根) が複素根をもつとき、必ず、その共役複素数も根となる.

さらに、ある複素モードが $Ae^{(\sigma+j\omega)t}$ として現れるとき、対になるモードは $\bar{A}e^{(\sigma-j\omega)t}$ となる.

$$\begin{aligned} Ae^{(\sigma+j\omega)t} + \bar{A}e^{(\sigma-j\omega)t} &= e^{\sigma t}(Ae^{j\omega t} + \bar{A}e^{-j\omega t}) \\ &= e^{\sigma t}\{A(\cos \omega t + j \sin \omega t) + \bar{A}(\cos \omega t - j \sin \omega t)\} \\ &= e^{\sigma t}\{(A + \bar{A}) \cos \omega t + j(A - \bar{A}) \sin \omega t\} \end{aligned}$$

よって両モードの和は実数成分だけを有する.



ステップ応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s]$$

$$G(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n}$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{b_0(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{s(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = \frac{B_0}{s} + \frac{B_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{B_n}{s - p_n}$$

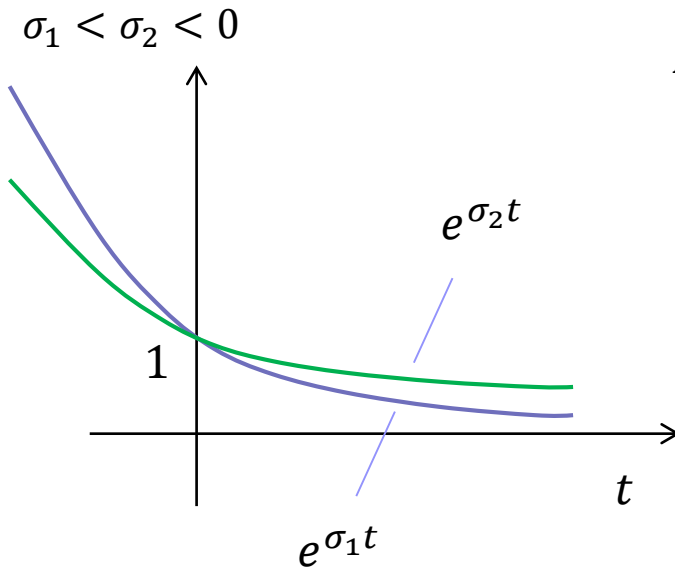
$$B_0 = G(0) = - \sum_k \frac{A_k}{p_k}, \quad B_k = \lim_{s \rightarrow p_k} \left[\frac{s - p_k}{s} G(s) \right], \quad k = 1, \dots, n$$

$$\therefore y(t) = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k e^{p_k t}, \quad t > 0$$

ステップ応答

$$y(t) = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k e^{p_k t}, t > 0$$

➡ $Re[p_k] < 0, \forall k$ ならば, $t \rightarrow \infty$ のとき $y(t) \rightarrow B_0$ (一定値)



$Re[p_k]$ の絶対値が大きいほど収束が速い.

➡ いちばん遅いモードが支配的:
対応する根を代表特性根という

代表特性根 $p_r: r = \arg \min\{|Re[p_k]|\}$

括弧内を最小にする引数 k

$$y(t) \simeq B_0 + B_r e^{p_r t} \quad \text{or} \quad B_0 + B_r e^{p_r t} + \bar{B}_r e^{\bar{p}_r t}$$

零点の影響

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} \quad \text{に入力 } e^{z_k t} \text{ を加えると?}$$

$$y(s) = G(s)u(s), \quad u(s) = \frac{1}{s - z_k} \quad \text{であるから, 因子 } s - z_k \text{ は}$$

約分され, $y(s)$ の分母に現れない. したがって部分分数展開ののち, $y(t)$ を求めても, 出力はモード $e^{z_k t}$ を含まない.



入力が伝達関数の零点によって遮断(ブロック)された.

零点はモードには直接影響を与えないが, 係数 B_k を通して応答に影響を及ぼす. とくに零点が右半平面にある場合, ステップ応答には逆応答が生じる.

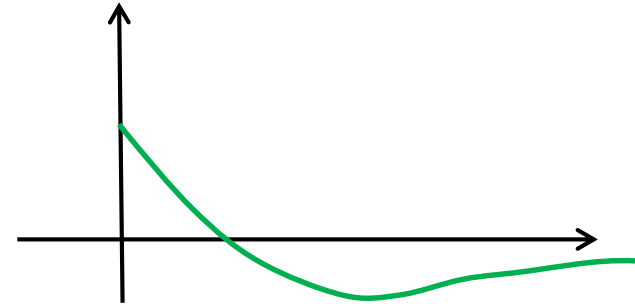
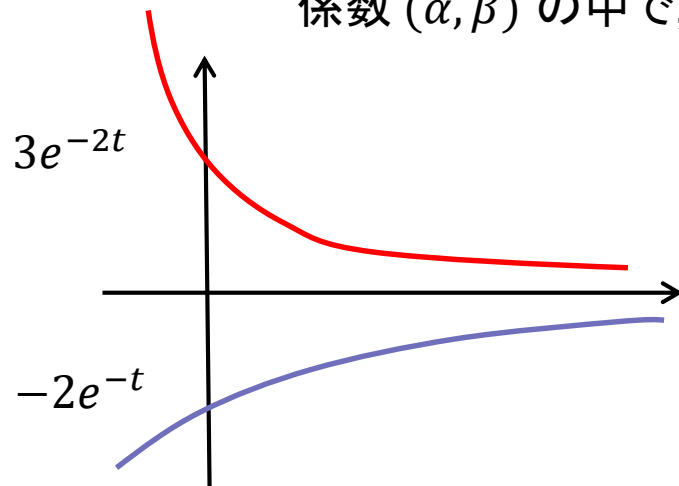
$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\beta}{s+2}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad (\alpha, \beta) = (-2, 3)$$

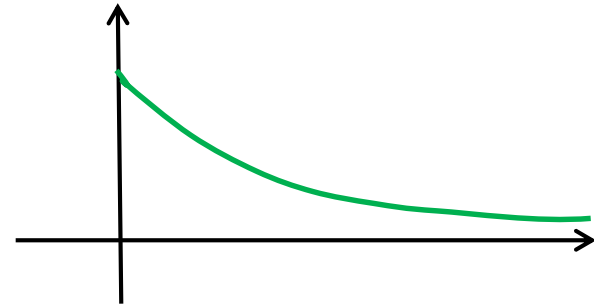
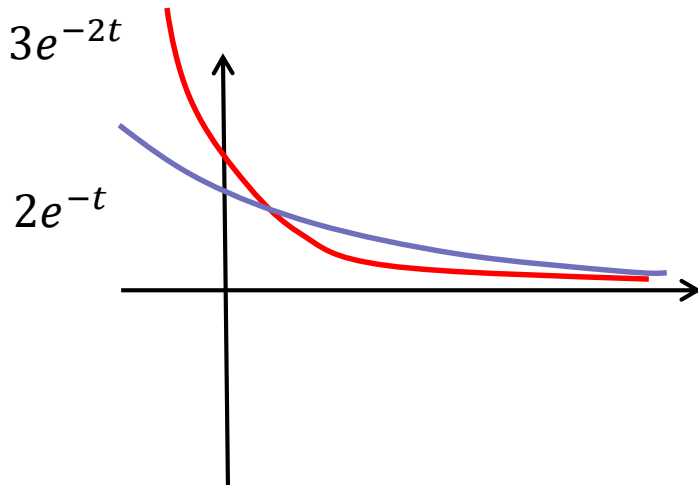
零点が右半平面にある ($s = +1$) から負になる



係数 (α, β) の中で, 負となるものがある

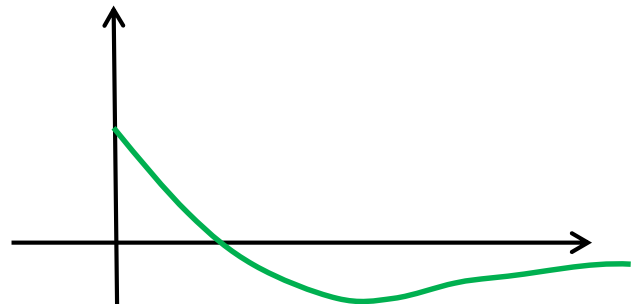
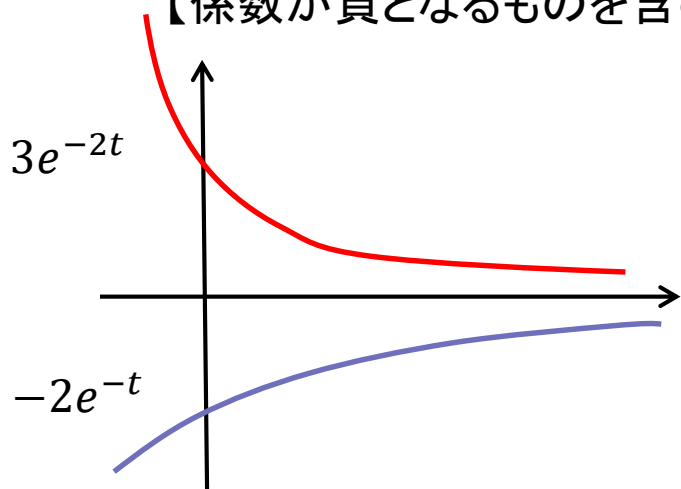


【係数が正のみ】

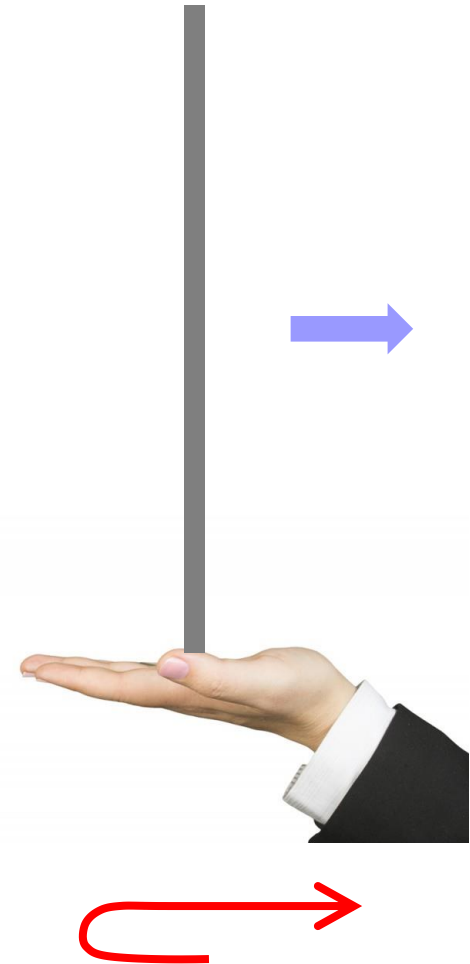
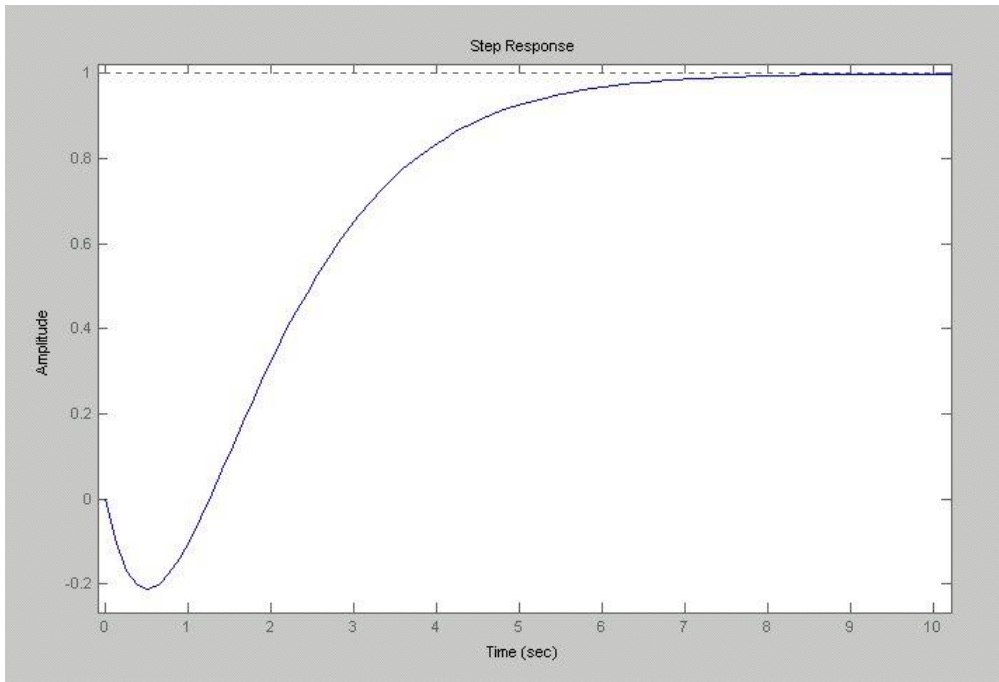


応答は正から単調に0に近づく

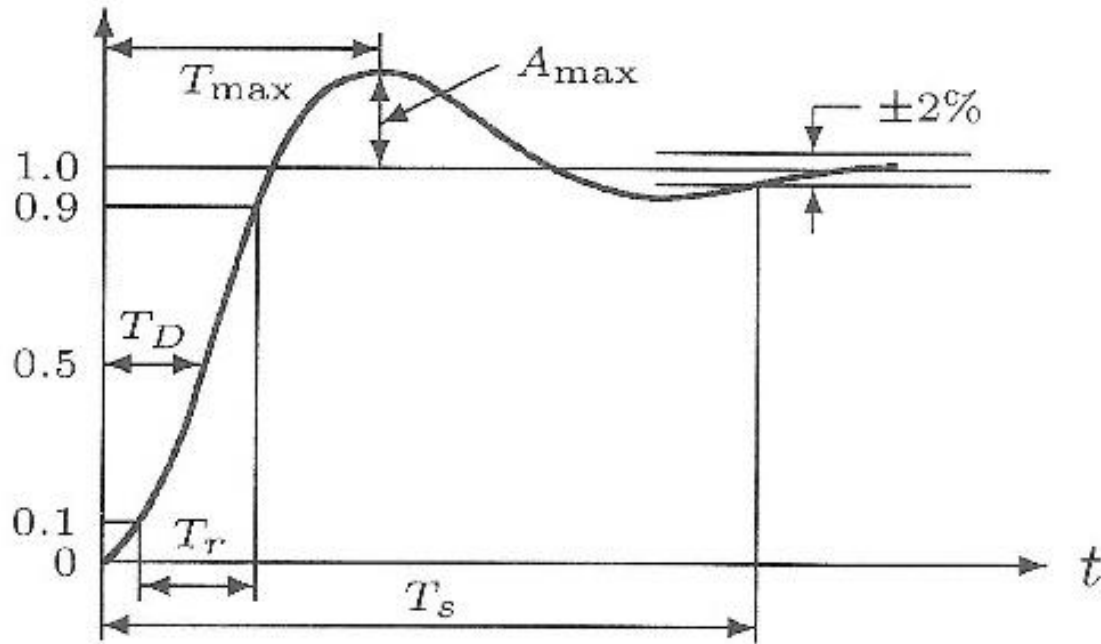
【係数が負となるものを含む】



応答は正から単調に0に近づかず
いったん負になってから0へ(逆応答)



グラフから見るステップ応答特性



T_r : 立上り時間 (rise time) 応答が定常値の10%から90%に達するまでの時間

T_D : 遅延時間 (delay time) 応答が最終値の50%に達するまでの時間

A_{max} : 最大オーバーシュート (maximum overshoot) 最終値からの最大行き過ぎ量

T_{max} : 行き過ぎ時間 (peak time) 最大オーバーシュートに達する時間

T_s : 整定時間 (settling time) 応答が最終値の $\pm 2\%$ の範囲に落ち着くまでの時間





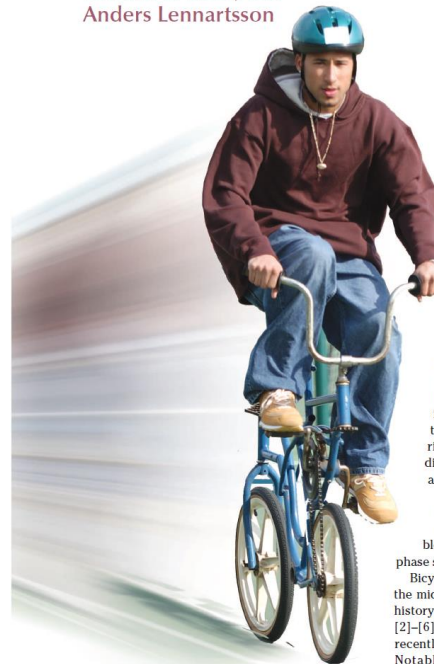
■ Bicycle Dynamics and Control

FEATURE

Bicycle Dynamics and Control

By Karl J. Åström,
Richard E. Klein, and
Anders Lennartsson

Adapted bicycles for
education and research



This article analyzes the dynamics of bicycles from the perspective of control. Models of different complexity are presented, starting with simple ones and ending with more realistic models generated from multibody software. We consider models that capture essential behavior such as self-stabilization as well as models that demonstrate difficulties with rear wheel steering. We relate our experiences using bicycles in control education along with suggestions for fun and thought-provoking experiments with proven student attraction. Finally, we describe bicycles and clinical programs designed for children with disabilities.

The Bicycle

Bicycles are used everywhere—for transportation, exercise, and recreation. The bicycle's evolution over time has been a product of necessity, ingenuity, materials, and industrialization. While efficient and highly maneuverable, the bicycle represents a tantalizing enigma. Learning to ride a bicycle is an acquired skill, often obtained with some difficulty; once mastered, the skill becomes subconscious and second nature, literally just "as easy as riding a bike."

Bicycles display interesting dynamic behavior. For example, bicycles are statically unstable like the inverted pendulum, but can, under certain conditions, be stable in forward motion. Bicycles also exhibit nonminimum phase steering behavior.

Bicycles have intrigued scientists ever since they appeared in the middle of the 19th century. A thorough presentation of the history of the bicycle is given in the recent book [1]. The papers [2]–[6] and the classic book by Sharp from 1896, which has recently been reprinted [7], are good sources for early work. Notable contributions include Whipple [4] and Carvallo [5], [6], who derived equations of motion, linearized around the

LOUIS MCCLELLAN/THOMPSON-MCCLELLAN PHOTOGRAPHY

1066-033X/05/820.00©2005IEEE
IEEE Control Systems Magazine

August 2005

26



■ Bicycle Dynamics and Control

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt} &= V\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{V}{b}\delta.\end{aligned}$$

The transfer function from steer angle δ to path deviation η is thus

$$G_{\eta\delta}(s) = \frac{V^2}{bs^2}.$$

Combining $G_{\eta\delta}(s)$ with (20) gives the transfer function from steer torque T to η , which has the form

$$G_{\eta T}(s) = \frac{k_1(V)V^2}{b} \frac{s^2 - \frac{mgh}{J}}{s^2 \left(s^2 + \frac{k_2(V)VD}{bJ}s + \frac{mgh}{J} \left(\frac{V^2}{V_c^2} - 1 \right) \right)} \quad (21)$$

By using both steer torque and rider lean, the zero in the transfer function (21) can be eliminated. In fact, skilled riders frequently use variations in forward speed as an additional control variable, since centrifugal forces can be altered to some extent.

When the tilt dynamics of the bicycle is stabilized by the front fork, the maneuvering dynamics have a zero in the right-half plane at $s = \sqrt{mgh/J}$, which imposes limitations on the maneuverability.

Figure 5 shows the path of a bicycle when a positive torque-step input is applied to the handlebars. Notice that the path deviation η is initially positive but later becomes negative. This inverse response behavior, which is typical for a system with a right-half-plane zero, can be explained as follows. When a positive steer torque is applied, the bicycle's contact points with the ground initially track in the direction of the applied torque. This motion generates a reaction force that tilts the bicycle around the positive x axis. In turn, this tilt generates a

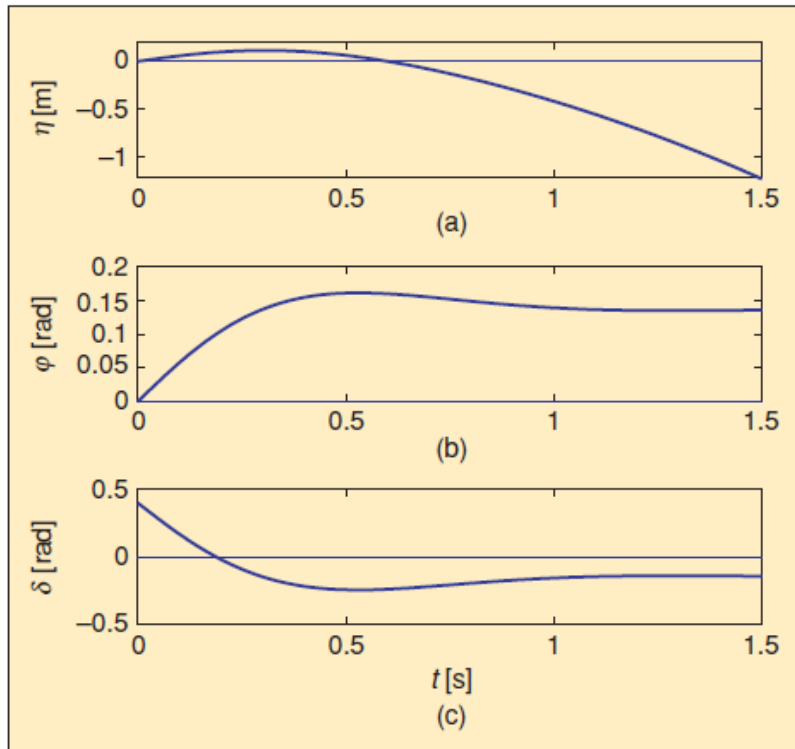


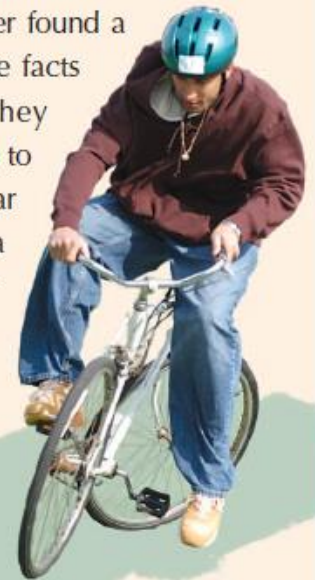
Figure 5. Simulation of the bicycle with a constant positive steer torque. The plots show the time histories of (a) the path deviation η , (b) the tilt angle φ , and (c) the steer angle δ . Notice the reverse response in the path η .

Wilbur Wright on Counter-Steering

Wilbur Wright owned a bicycle shop with his brother Orville. Wilbur had an amazing ability to intuitively understand complex, technical problems, as illustrated by the following:

I have asked dozens of bicycle riders how they turn to the left. I have never found a single person who stated all the facts correctly when first asked. They almost invariably said that to turn to the left, they turned the handlebar to the left and as a result made a turn to the left. But on further questioning them, some would agree that they first turned the handlebar a little to the right, and then as the machine inclined to the left they turned the handlebar to the left, and as a result made the circle inclining inwardly. [79, p. 170]

Wilbur's understanding of dynamics contributed strongly to the Wright brothers' success in making the first airplane flight.



1. 以下の問いに答えよ. なおラプラス変換 $\mathcal{L}[\cdot]$ は, 片側ラプラス変換を指すものとする.
- (1) ステップ関数 $1(t)$ のラプラス変換と収束領域を求めよ(要証明).
 - (2) $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ であるとき, $f(t - T)$ ($T > 0$: 定数) のラプラス変換を求めよ(要証明).
 - (3) $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ であるとき, $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$ を求めよ(要証明).

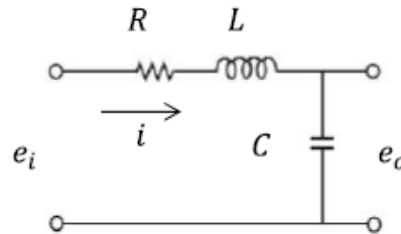
ヒント: 次式を用いる.

$$\frac{d}{dt}\{f(t)g(t)\} = \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)g(t) + f(t)\left(\frac{d}{dt}g(t)\right)$$

- (4) 問(3)の結果より $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\xi)d\xi\right]$ を求めよ(要証明).

2. 下図の RLC 回路を考える. ただし, e_i : 入力電圧[V], i : 電流[A], e_o : コンデンサの端子電圧[V], R : 抵抗[Ω], L : 自己インダクタンス[H], C : 静電容量[F]とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 入力電圧 e_i からコンデンサの端子電圧 e_o までの伝達関数 $G(s)$ を求めよ.

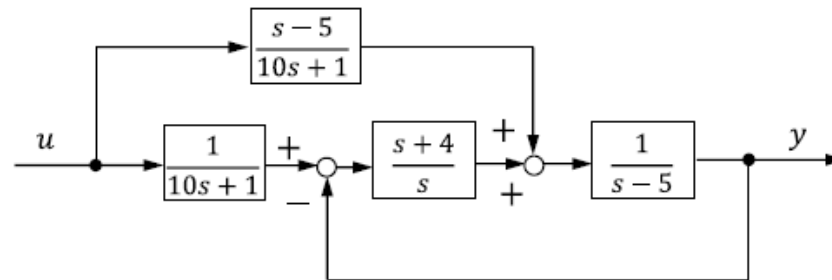


(2) $R = 3$, $L = 2$, $C = 1$ のとき, 伝達関数 $G(s)$ の極を求めよ.

(3) 同回路(電気系)とマス・バネ・ダンパー系(機械系)のアナロジーを考える. 力と電圧, 速度と電流の組み合わせで対応付けたとき, (a)抵抗, (b)コンデンサ, (c)コイルに対応するものはそれぞれ何か. 以下の中から選べ.

マス, バネ, ダンパー

3. 以下のブロック線図を簡単化し, u から y までの伝達関数を求めよ.



4. 以下の文章の空欄を埋めて適切な文章を完成させよ.

伝達関数を $G(s) = n(s)/d(s)$ ($n(s), d(s)$ は多項式)で表したとき, $n(s) = 0$ となる s を $G(s)$ の (a), $d(s) = 0$ となる s を $G(s)$ の (b)という. 同多項式の次数を $m_n = \deg(n(s))$, $m_d = \deg(d(s))$ とおいたとき, (c)の関係式を満たす $G(s)$ は非プロパーである. 逆に, (d)であるとき, $G(s)$ はプロパーである. また, プロパーな伝達関数をさらに分類すると, (e)であるとき厳密にプロパー, (f)であるときバイプロパーな伝達関数とよばれる. 問2の(1)で求めた伝達関数 $G(s)$ は, 非プロパー, バイプロパー, 厳密にプロパーのうち (g)に分類される.

To Do (今回)

- 1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする)
- 2) 復習
- 3) 教科書 4.4～4.8 を読む.
- 4) Webにアップロードされている演習問題(3)をやってくる.