

# システム制御 I

4学期

月 5, 6限 14:00-16:10

木 3, 4限 11:00-13:10

5号館 第15講義室 (システムコース)

担当: 平田 健太郎

12/16 第5回

システムモデルと伝達関数 (2)

# Schedule

- |                 |          |      |
|-----------------|----------|------|
| 1. 12/2 (today) | 9. 1/9   | 中間試験 |
| 2. 12/5         | 10. 1/16 |      |
| 3. 12/9         | 11. 1/20 |      |
| 4. 12/12        | 12. 1/23 |      |
| 5. 12/16        | 13. 1/27 |      |
| 6. 12/19        | 14. 1/30 |      |
| 7. 12/23        | 15. 2/3  |      |
| 8. 1/6          | 16. 2/6  | 期末試験 |

前回のおさらい

微分方程式をラプラス変換によって解く

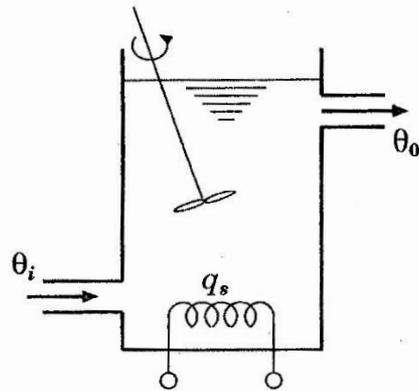
ヘビサイドの展開定理

ラプラス変換の性質      合成積

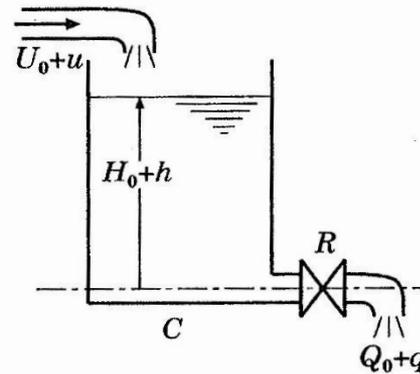
動的システムのモデル（線形性, 時不変性）

伝達関数

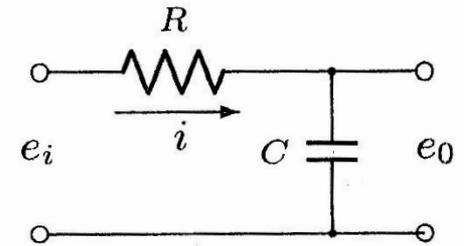
# システムのモデルと伝達関数(一次系)



(a) 熱プロセス



(b) 水位プロセス



(c) RC 回路

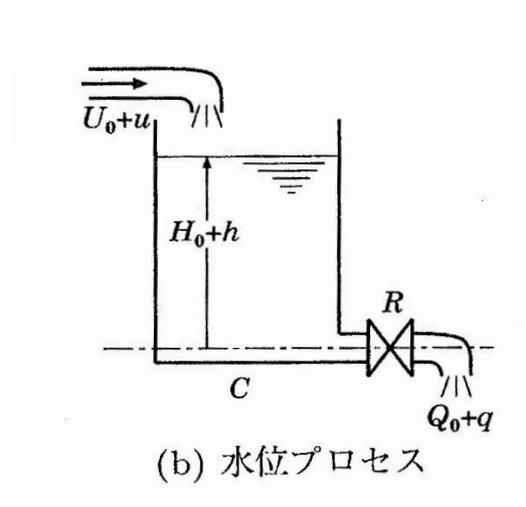
図 3.2 簡単なシステム

いずれのダイナミクスも

$$T \frac{dy}{dt} + y = Ku, y(0-) = y_0$$

という1次系で記述される.

ひとつだけ解説しておこう.



ベルヌーイの定理: 一様重力のもとでの非粘性・非圧縮流体の定常な流れ

ベルヌーイの定理: 一様重力のもとでの非粘性・非圧縮流体の定常な流れに対して流線上で次式が成り立つ.

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constant}$$

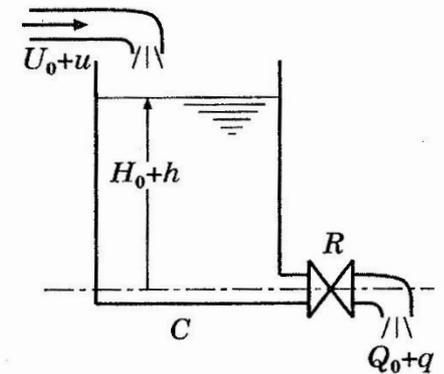
$v$ : 速さ,  $p$ : 圧力,  $\rho$ : 密度,  $g$ : 重力加速度,  $z$ : 鉛直方向座標

上水面:  $v = 0, p = p_0$  (大気圧),  $z = h$        $\rho$  一定

流出口:  $p = p_0, z = 0$

$$\frac{1}{2}v^2 = gh, v = \sqrt{2gh}$$

流出量  $Q = Av, A$ : 等価流路面積



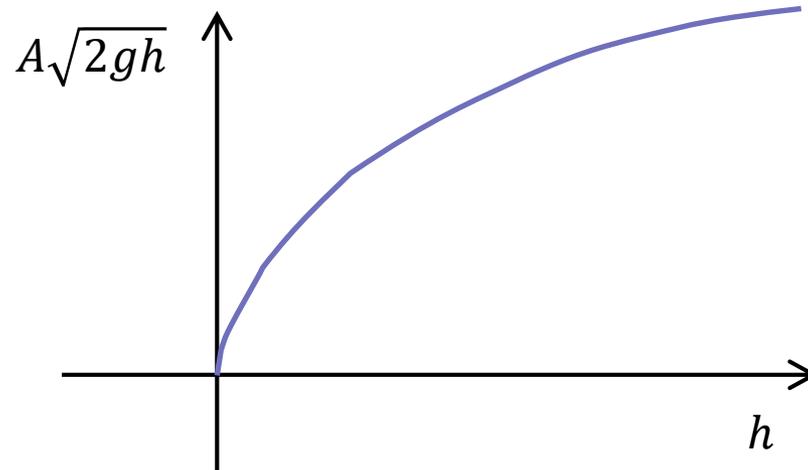
(b) 水位プロセス

流出量:  $Q = A\sqrt{2gh}$ , 流入量:  $U$ , 底面積:  $C$

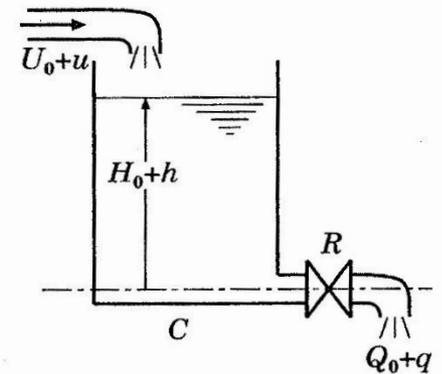
$$C \frac{d}{dt} h = U - Q = U - A\sqrt{2gh}$$

$C \frac{d}{dt} h$  は  $h$  に関する線形な演算 (微分して定数を掛ける)

$A\sqrt{2gh}$  は?



線形 (直線) ではない!

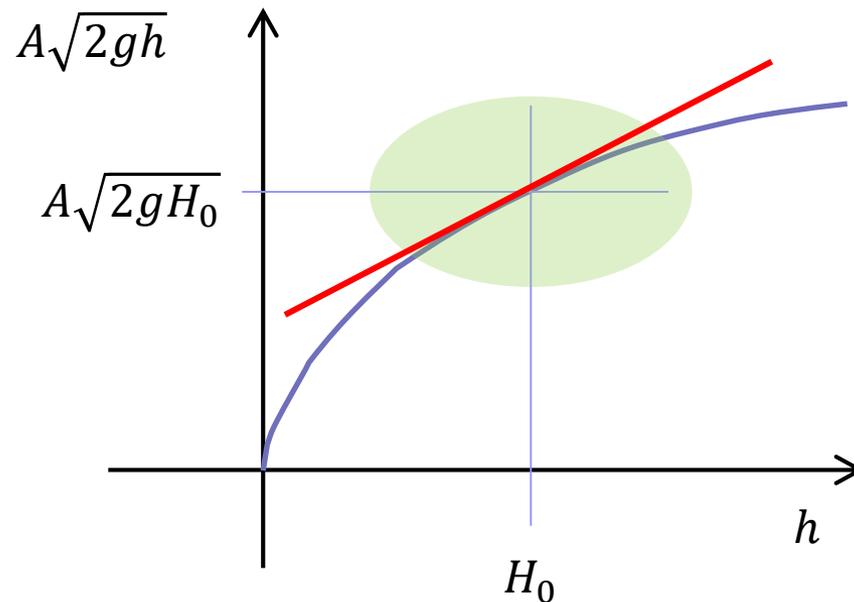


(b) 水位プロセス

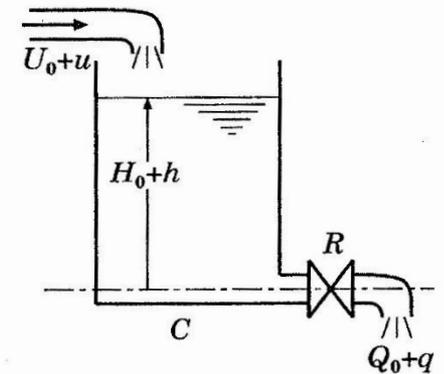
流出量:  $Q = A\sqrt{2gh}$ , 流入量:  $U$ , 底面積:  $C$

$$C \frac{d}{dt} h = U - Q = U - A\sqrt{2gh}$$

平衡状態:  $U = U_0, h = H_0$  では  $U_0 = A\sqrt{2gH_0}$



$h = H_0$  の近傍では  
直線近似してもよい



(b) 水位プロセス

テーラー展開とは何か？

# テーラー展開



流出量:  $Q = A\sqrt{2gh}$ , 流入量:  $U$ , 底面積:  $C$

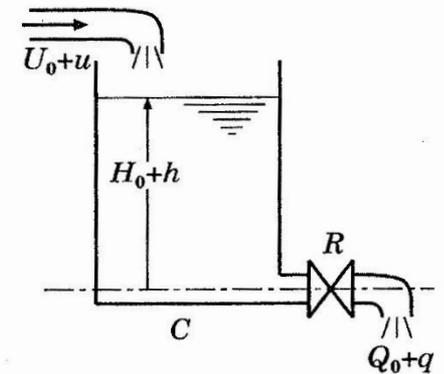
$$C \frac{d}{dt} h = U - Q = U - A\sqrt{2gh}$$

平衡状態:  $U = U_0, h = H_0$  では  $U_0 = A\sqrt{2gH_0}$

$f(h) = A\sqrt{2gh}$  を  $h = H_0$  でテーラー展開すると

$$f(H_0 + \Delta h) \simeq f(H_0) + f'(H_0)\Delta h \quad f'(h) = \frac{2gA}{2\sqrt{2gh}} \quad f'(H_0) = \frac{\sqrt{g}A}{\sqrt{2H_0}} =: 1/R$$

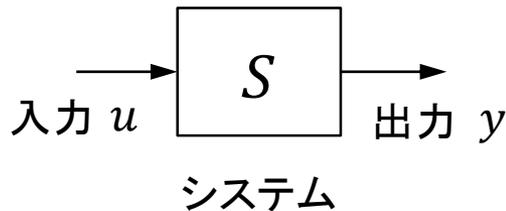
$$C \frac{d}{dt} (H_0 + \Delta h) = U_0 + \Delta u - \left( U_0 + \frac{\Delta h}{R} \right) \quad \longrightarrow \quad C \frac{d}{dt} \Delta h + \frac{\Delta h}{R} = \Delta u$$



(b) 水位プロセス

初期条件が零であるとき,

$$T \frac{dy}{dt} + y = Ku \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad y(s) = \frac{K}{Ts + 1} u(s) =: G(s)u(s)$$



$G(s)$  は左図の  $S$  に相当

$G(s)$  を入力から出力までの  
伝達関数という.

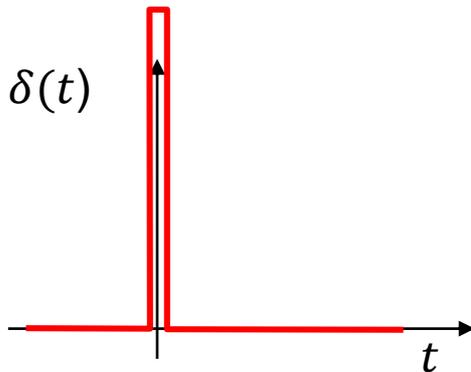
これは分かりやすい説明だが, いささか形式的である.

以下では, 微分方程式を経由しないで, 線形性と時不変性から  
伝達関数を導入する.

線形時不変系 = LTI system (Linear Time-Invariant system)

# 線形時不変系 (LTI System) としての入出力関係の特徴づけ

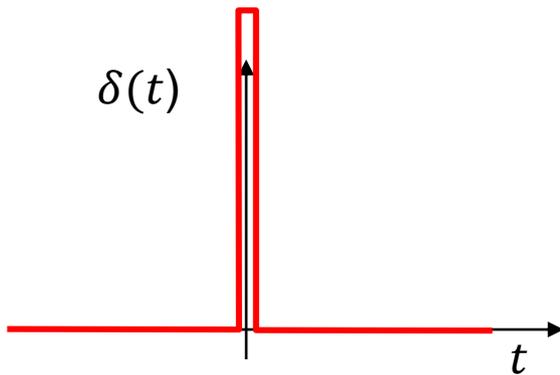
## ■ インパルス関数 (ディラックのデルタ関数)



$$f_{\epsilon}(t) := \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & (t \in [-\epsilon/2, \epsilon/2]) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_{\epsilon}(t)$$

## デルタ関数の性質



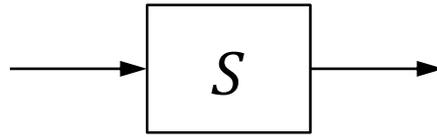
$t \neq 0$  のとき  $\delta(t) = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(a - t) dt$$

$$a \neq 0, f(t) = \delta(t)$$

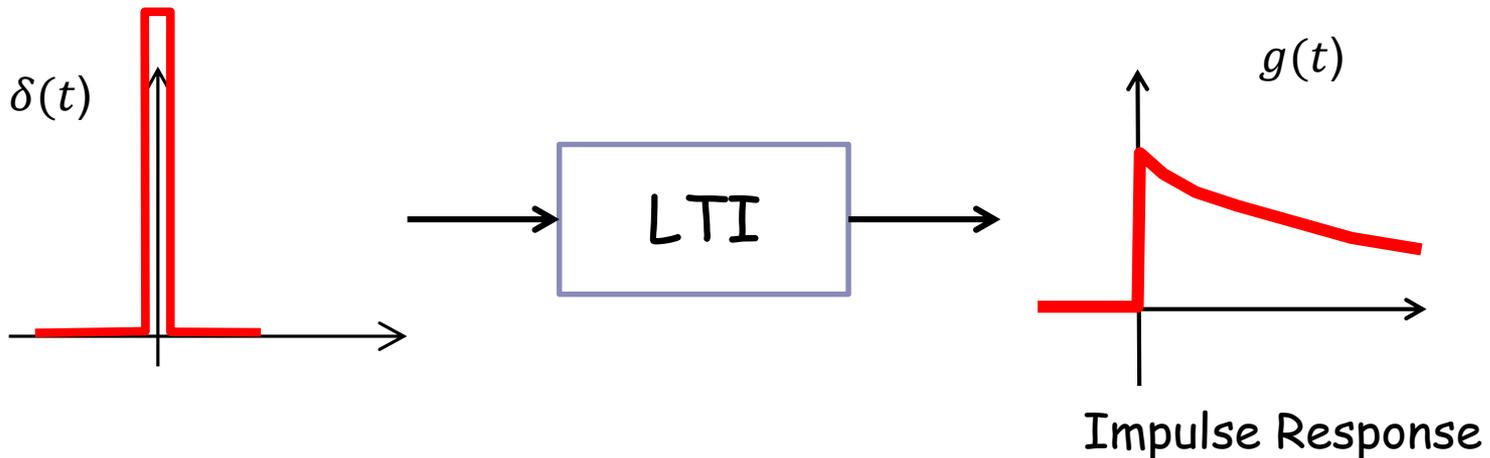
$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \delta(a - t) dt = \delta(a) = 0$$



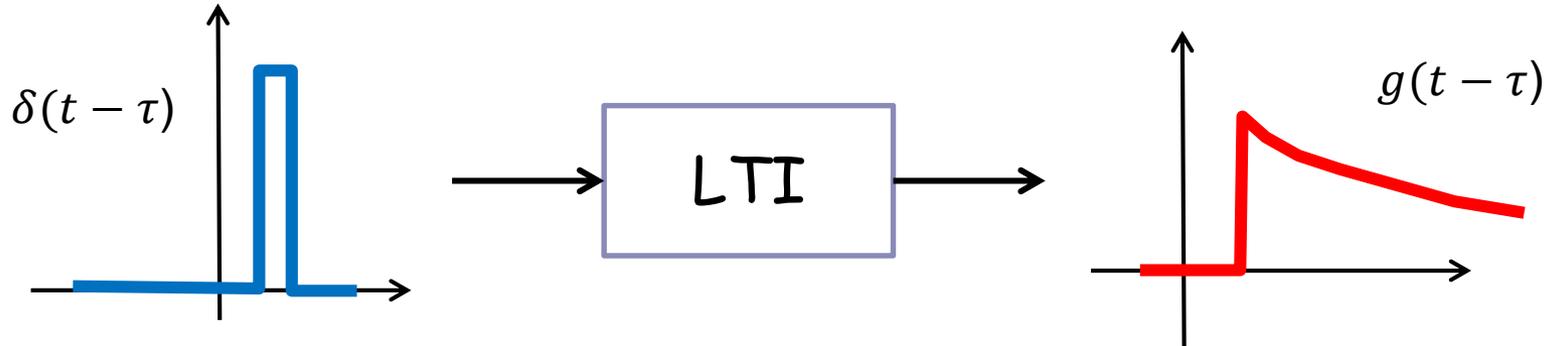
線形であるということは、「基本となる入出力パターンの重ねあわせで任意の応答が表現できる」ということである。



「基本となる入力」の候補として、インパルス入力を考えよう。



## Time-invariance

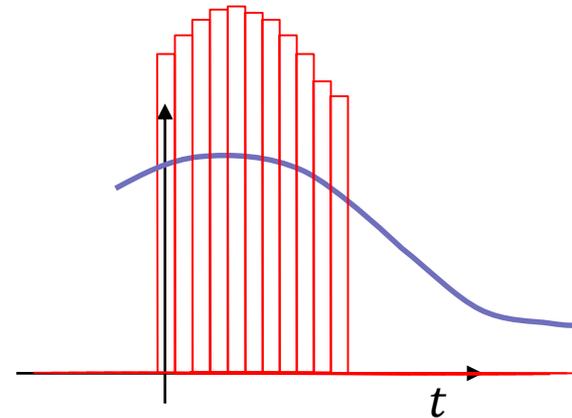


➡ 任意の入力をシフトしたインパルスの線形和(積分)として表現

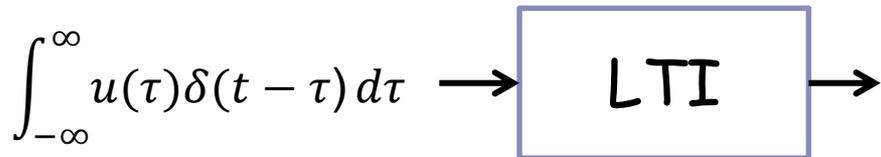
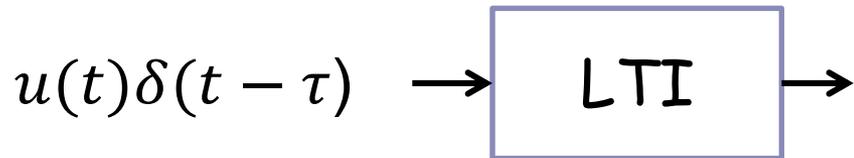
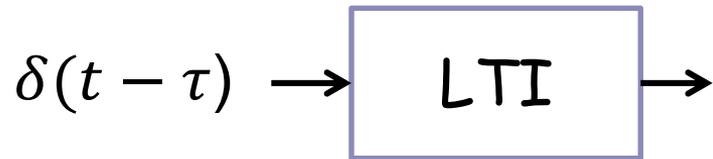
インパルス変調

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

強度(係数)      時間軸位置



$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$$





A block diagram showing an input signal  $u(t)$  entering a box labeled "LTI" from the left. An arrow points from the box to the right, leading to the output signal  $y(t)$ .

$$u(t) \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) g(t - \tau) d\tau$$
$$= \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

Since  $u(t) = g(t) = 0$ , when  $t < 0$ .

$$\therefore y = g * u$$

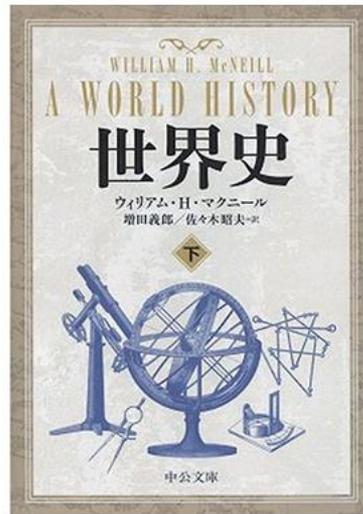
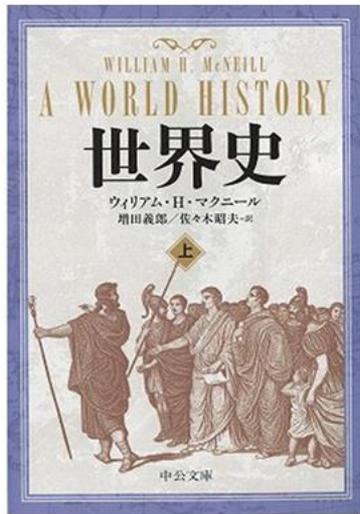


$$y(s) = G(s) u(s), \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

伝達関数はシステムのインパルス応答のラプラス変換として定義される。



# History of Inventions



## 伝達関数の分類

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

$n(s), d(s)$ : 分子多項式, 分母多項式

numerator, denominator

$\deg(p(s))$ : 多項式  $p(s)$  の次数

$$m_n = \deg(n(s)), m_d = \deg(d(s))$$

多項式の比 = 有理関数 rational function

Cf. 整数の比 = 有理数

$n(s) = 0$  となる  $s$ :  $G(s)$  の零点 zeros     $d(s) = 0$  となる  $s$ :  $G(s)$  の極 poles

## 伝達関数の分類

$m_d \geq m_n$  であるとき,  $G(s)$  はプロパー (proper)

$m_d > m_n$  であるとき,  $G(s)$  は厳密にプロパー (strictly proper)

$m_d = m_n$  であるとき,  $G(s)$  はバイプロパー (bi-proper)

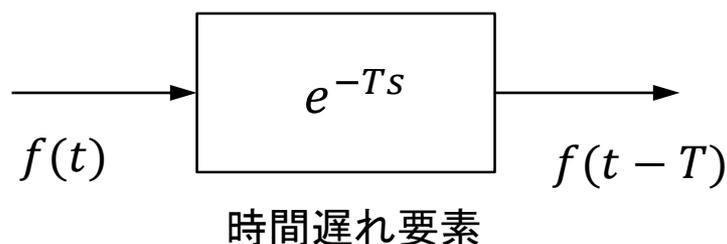
$m_d < m_n$  であるとき,  $G(s)$  は非プロパー (non-proper) という

物理システムは一般に非プロパーにならない。

## 有理関数以外の伝達関数

$t$  領域推移 (時間遅れ)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ であるとき} \quad \mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-Ts}F(s)$$



$e^{-Ts}$  は有理関数ではない.

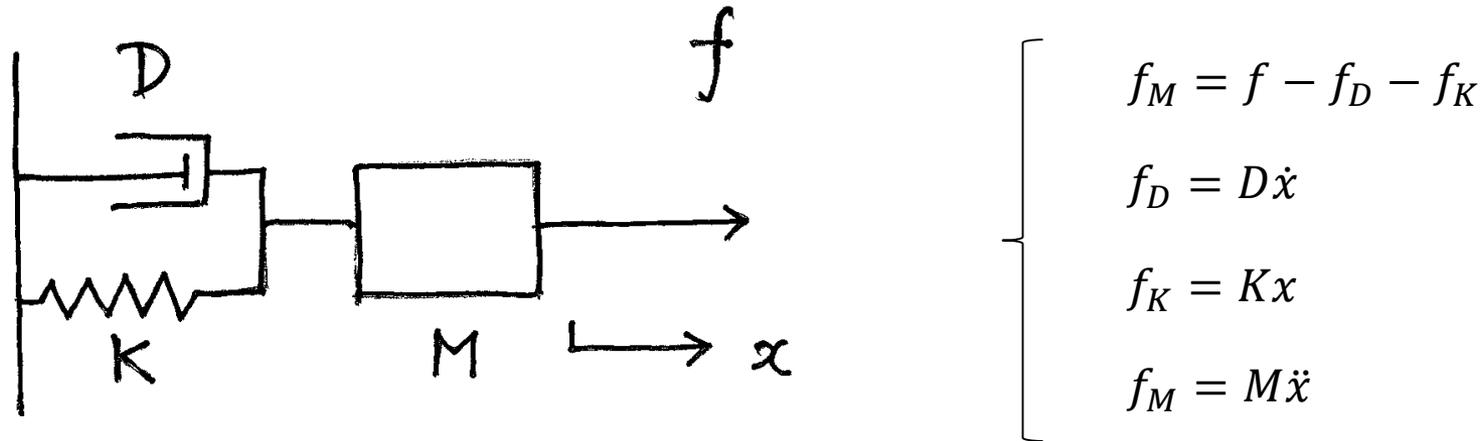
Pade近似:  $e^{-Ts}$  の有理関数による近似

$$e^{-Ts} \simeq \frac{1 - Ts/2}{1 + Ts/2} \quad e^{-Ts} \simeq \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{T^2s^2}{12}}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{T^2s^2}{12}}$$

## 二次系の例

## ■ 運動方程式の例: マス・バネ・ダンパー系

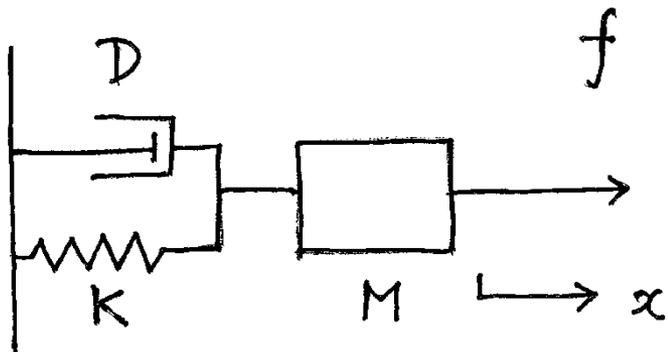
Equation of Motion (Mass-Spring-Damper System)



$f_M$ : マスを加速運動させる力     $f_D, f_K$ : ダンパ, バネがマスに与える力

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = f$$

略記     $\dot{x} := \frac{d}{dt}x(t)$      $\ddot{x} := \frac{d^2}{dt^2}x(t)$



$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = f$$

$\mathcal{L}$



$$(Ms^2 + Ds + K)x(s) = f(s)$$

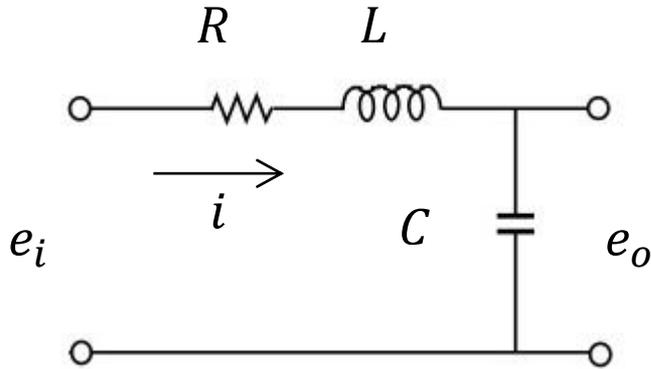
$$x(s) = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K} f(s)$$

Output

$f$  から  $x$  までの伝達関数

Input

# RLC回路



$$v_R = iR$$

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

$$Cv_C = \int_0^t i dt$$

$$e_i = v_R + v_L + v_C$$

$$e_o = v_C$$

$$e_i = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

$\mathcal{L}$  ↓

$$e_i(s) = \left( R + sL + \frac{1}{Cs} \right) C s e_o(s)$$

$$e_o(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} e_i(s)$$

## システムモデル間のアナロジー

	機械系	電気系
変数	力 $f$ 速度 $v$ 変位 $x$	電圧 $e$ 電流 $i$ 電荷 $q$
要素	ダンパー $f = Dv$ バネ $f = Kx$ マス $f = M\dot{v}$	抵抗 $e = Ri$ コンデンサ $e = \frac{1}{C}q$ コイル $e = L\frac{d}{dt}i$

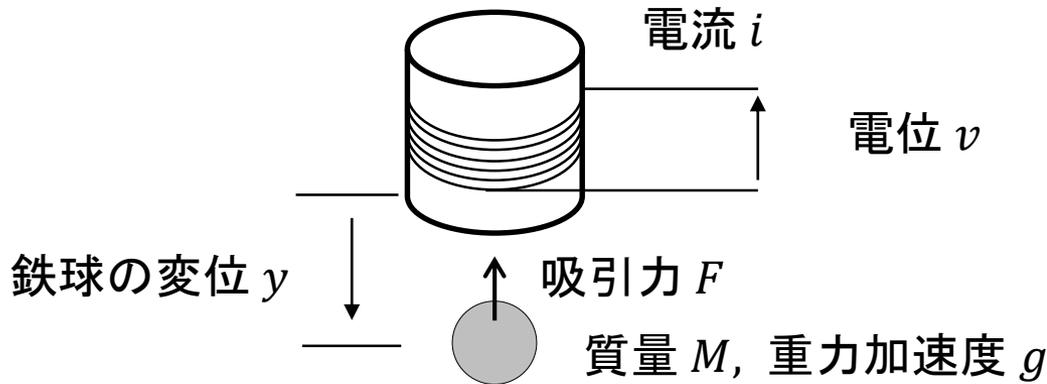
水位系, 熱系については p. 42 の表3.1 参照

# システムモデル間のアナロジー (別バージョン)

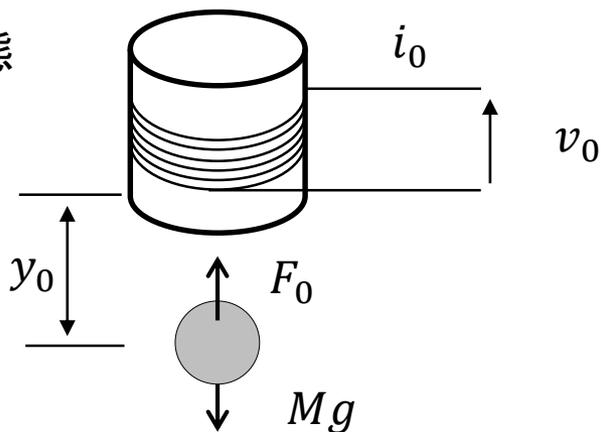
	機械系	電気系	
変数	力 $f$ 速度 $v$	電流 $i$ 電圧 $e$	計測には伝達を 切断しなければならない Through variable 並列に計測可 Across variable
要素	ダンパー $f = Dv$ バネ $f = K \int v dt$ ( $\dot{f} = Kv$ ) マス $f = M\dot{v}$	抵抗 $i = \frac{1}{R}e$ コイル $\frac{d}{dt}i = \frac{1}{L}e$ コンデンサ $\int idt = Ce$ ( $i = C\dot{e}$ )	

### 例3.6 磁気浮上システム

内部抵抗  $R$ , インダクタンス  $L$



つり合い状態



$$Ri_0 = v_0$$

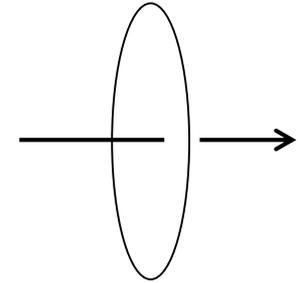
$$L \frac{d}{dt} (i_0 + \Delta i) = -R(i_0 + \Delta i) + v_0 + \Delta v$$

$$\rightarrow L \frac{d}{dt} \Delta i = -R\Delta i + \Delta v$$

$$\text{伝達関数 } \Delta i(s) = \frac{1}{Ls + R} \Delta v(s)$$

半径  $r$  のコイル中の中心磁場  $H$  は、電流  $i$ 、巻線数  $n$  とすると

$$H = n \frac{i}{2r}$$



磁気量  $m_1$  の磁極によってこの磁場が生じているとすれば  $m_1 \propto H$

磁極の近くに鉄片(強磁性体)があると磁化され、その強度  $m_2$  は  $H$  に比例

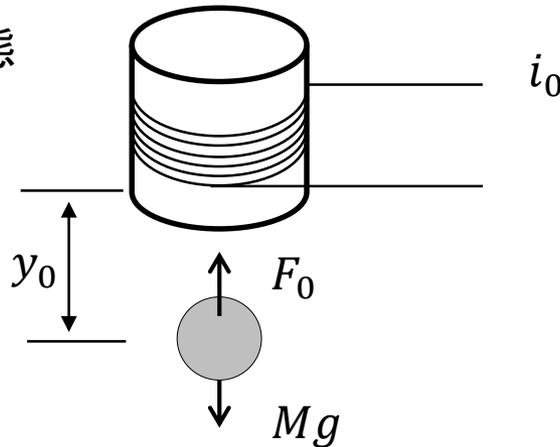


磁極間の距離を  $y$  とすると、働く電磁力(吸引力)は

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{y^2} \propto \frac{i^2}{y^2}$$

教科書の記述とは違う

つり合い状態



$$F_0 = k \frac{i_0^2}{y_0^2} = Mg$$

変化分を考慮

$$F = F_0 + \Delta F = k \frac{(i_0 + \Delta i)^2}{(y_0 + \Delta y)^2} \approx k \frac{i_0^2}{y_0^2} + \alpha \Delta i + \beta \Delta y$$

運動方程式

$$M \frac{d^2}{dt^2} y = Mg - F \quad \rightarrow \quad M \frac{d^2}{dt^2} (y_0 + \Delta y) = Mg - (F_0 + \Delta F)$$

$$\rightarrow \quad M \frac{d^2}{dt^2} \Delta y = -\alpha \Delta i - \beta \Delta y$$

伝達関数

$$\rightarrow \quad \Delta y(s) = \frac{-\alpha}{Ms^2 + \beta} \Delta i(s) \quad \rightarrow \quad \Delta y(s) = \frac{-\alpha}{(Ms^2 + \beta)(Ls + R)} \Delta v(s)$$

テーラー展開

$$\underline{k \frac{(i_0 + \Delta i)^2}{(y_0 + \Delta y)^2} \simeq k \frac{i_0^2}{y_0^2} + \alpha \Delta i + \beta \Delta y, k > 0}$$
$$=: f(\Delta i, \Delta y)$$

$$\beta = \left. \frac{\partial f}{\partial \Delta y} \right|_{(\Delta i, \Delta y) = (0, 0)} = -2k \left. \frac{(i_0 + \Delta i)^2}{(y_0 + \Delta y)^3} \right|_{(\Delta i, \Delta y) = (0, 0)} = -2k \frac{i_0^2}{y_0^3} < 0$$

$\gamma := -\beta > 0$  とおくと

$$\Delta y(s) = \frac{-\alpha}{(Ms^2 - \gamma)(Ls + R)} \Delta v(s) \quad M, L, R, \gamma > 0$$

不安定な三次系(辻褃は合う)