システム制御 I

4学期
月 5, 6限　14:00-16:10
木 3, 4限　11:00-13:10
5号館 第15講義室 (システムコース）

担当:平田 健太郎

12/12 第4回

システムモデルと伝達関数 (1)

(前回スライドより)

ラプラス変換は何の役にたつの？

➡ もちろん制御理論で．他にも微分方程式の解法として習った「演算子法」の理論的裏付けを与えます．

演算子法（記号的解法）

微分方程式 $$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0, y(0) = c_1, \frac{dy}{dt}(0) = c_2$$

が与えられたとき?

演算子法（記号的解法）　Heaviside (1875)

微分方程式　$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0, y(0) = c_1, \frac{dy}{dt}(0) = c_2$

が与えられたとき,

1) 微分演算子を Δ とおけ.
2) 与式は $(\Delta^2 + 2\Delta - 3)y = 0$ であるので, $\Delta^2 + 2\Delta - 3 = 0$ を Δ について解け.
3) $\Delta^2 + 2\Delta - 3 = (\Delta + 3)(\Delta - 1)$ より $\Delta = -3, 1$.
4) 解を $y(\mathrm{t}) = \alpha_1 e^{-3t} + \alpha_2 e^{t}$ とおき, 定数を初期条件より定めよ.

ラプラス変換による解法　　Carson (1917)

微分方程式　$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

?

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}y(t)\right] = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right] = s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}y(t)\right] - \frac{dy}{dt}(0) = s^2Y(s) - sy(0) - \frac{dy}{dt}(0)$$

ラプラス変換による解法

微分方程式 $$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0$$

$$\Big\downarrow \ \mathcal{L}$$

$Y(s) =$

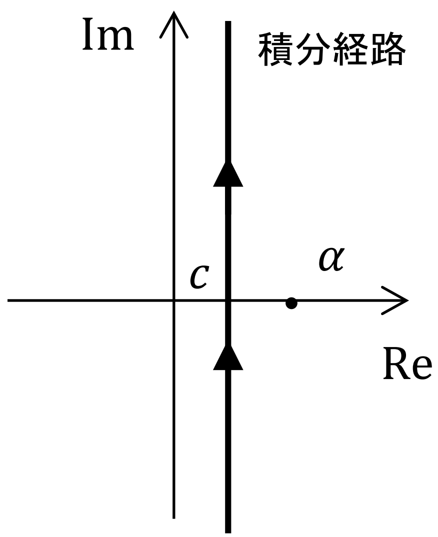
$$\Big\downarrow \ \mathcal{L}^{-1}$$

部分分数展開
Partial fractional expansion

$y(t) =$

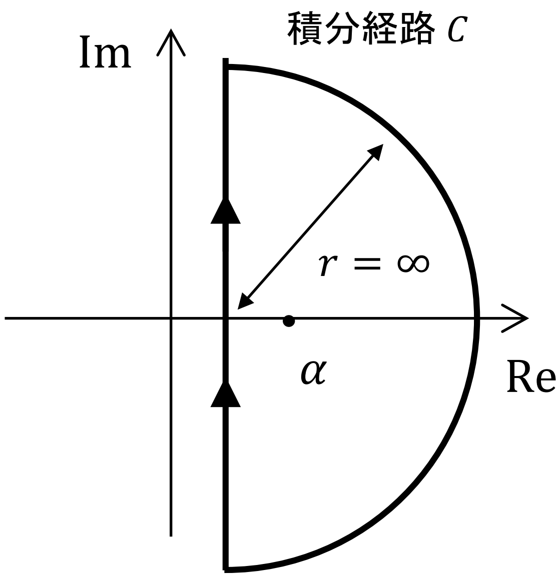
逆ラプラス変換を複素積分(留数)から行なうと

例: $h(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$ 　　$h(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} h(s)e^{st}\,ds$



$c < \mathrm{Re}\,\alpha$ となるように虚軸に平行な積分経路をとる

$h(s) \to 0$ ($|s| \to \infty$) なので積分値は右の閉曲線 C における積分と同じ



e^{st} は C の周上および内部で正則(微分可能)なので

Cauchyの積分公式 　$f(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_C \dfrac{f(s)}{s-\alpha}ds$ 　において $f(s) = e^{st}$ とすれば

$\Rightarrow$ $h(t) = f(\alpha) = e^{\alpha t}$

毎度複素積分をするのは面倒なので, ラプラス変換表を逆引きして使う.

部分分数展開は展開係数を適当において, 係数一致の計算をしても
よいが, ヘビサイドの展開定理を使うこともできる.

ヘビサイドの展開定理

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}, n > m$$

$N(s), D(s)$は互いに素

$N(s) = 0$ となる点: 零点
$D(s) = 0$ となる点: 極

(a) $D(s) = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_m), s_i \neq s_j \ (i \neq j)$ と因数分解できるとき ($F(s)$の極が互いに異なるとき)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{N(s_i)}{D'(s_i)} e^{s_i t}, t > 0$$

ヘビサイドの展開定理

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n},n>m$$

(b) $s=s_i$が$F(s)$のn位の極, すなわち $D(s)=(s-s_1)^{n_1}\cdots(s-s_r)^{n_r}$, $n_1+\cdots+n_r=n$ であるとき

$$f(t)=\left(C_{11}+C_{12}t+\cdots+\frac{C_{1n_1}}{(n_1-1)!}t^{n_1-1}\right)e^{s_1t}+\cdots$$
$$+\left(C_{r1}+C_{r2}t+\cdots+\frac{C_{1n_r}}{(n_r-1)!}t^{n_r-1}\right)e^{s_rt},\ t>0$$

$$C_{ik}=\frac{1}{(n_i-k)!}\lim_{s\to s_i}\left\{\left(\frac{d}{ds}\right)^{n_i-k}[(s-s_i)^{n_i}F(s)]\right\}$$

証明　(極が相異なる場合)

$$F(s)=\frac{C_1}{s-s_1}+\cdots+\frac{C_i}{s-s_i}+\cdots+\frac{C_n}{s-s_n}$$

と部分分数展開できる.

両辺に $s-s_i$ をかけて, $s\to s_i$ とすると

$$(s-s_i)\,F(s)=\underbrace{\frac{C_1(s-s_i)}{s-s_1}}_{\to 0}+\underbrace{\cdots}_{\to 0}+C_i+\cdots+\underbrace{\frac{C_n(s-s_i)}{s-s_n}}_{\to 0}$$

$$\therefore\ C_i=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)\,F(s)=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)\frac{N(s)}{D(s)}=\lim_{s\to s_i}\frac{N(s)+(s-s_i)N'(s)}{D'(s)}=\frac{N(s_i)}{D'(s_i)}$$

ロピタルの定理

$$\boxed{f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{N(s_i)}{D'(s_i)}e^{s_i t},t>0}$$

ラプラス変換の性質

（**L6**）合成積

2つの時間信号 $f(t), g(t)$ 間の演算

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

を合成積 (Convolution) といい, $f * g$ で表す. (たたみ込み積分ともいう）

$\xi = t - \tau$ とすれば

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_t^0 f(\xi)g(t-\xi)\,(-d\xi) = \int_0^t f(\xi)g(t-\xi)\,d\xi$$

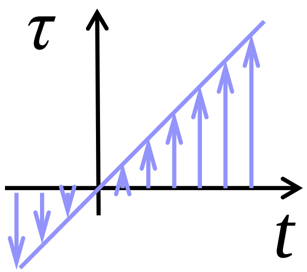
$$f(t) = g(t) = 0, t < 0.$$

Laplace Transform of $f * g$

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

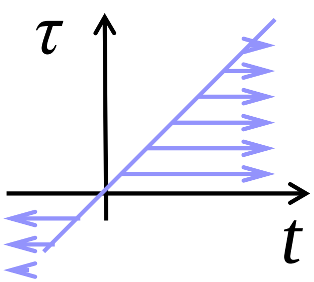
$$\tau \in [0, t], t < 0 \rightarrow \tau \geq t \rightarrow t - \tau \leq 0 \rightarrow f(t-\tau) = 0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$



先に τ について 0 から t まで積分
後に t について$-\infty$から ∞ まで積分

||



先に t について τ から$\pm\infty$まで積分
後に τ について$-\infty$から ∞ まで積分

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_0^t * \, d\tau dt + \int_0^{\infty}\int_0^t * \, d\tau dt$$

$$= \underline{\int_{-\infty}^{0}\int_\tau^{-\infty} * \, dt d\tau} + \int_0^{\infty}\int_\tau^{\infty} * \, dt d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}\left[\int_\tau^{\infty} f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\right]d\tau$$

$$\mathcal{L}[f*g] = F(s)G(s)$$

$= 0$, Since $g(\tau) = 0$ when $\tau \le 0$.

演習問題 2.7 (a)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+b^2)^2}\right] =$$

演習問題 2.7 (b)

$$\frac{1}{s^2(s+a)} = \frac{\boxed{}}{s^2} + \frac{\boxed{}}{s+a}$$

演習問題 2.7 (c)

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{\boxed{}}{s} + \frac{\boxed{}}{s^2+2s+2}$$

複素根

$s = -1 \pm j$ $\qquad \dfrac{a}{s+1-j} + \dfrac{\bar{a}}{s+1+j}$ を経由して合成するか

$\dfrac{1}{s^2+2s+2} = \dfrac{1}{(s+1)^2+1}$ を経由して三角関数と s 領域推移を考えるか

(d) 同様, (e) も展開係数を求める際に1次式とすることに注意,
(f) は時間遅れに注意

Adaptive Optics

ラプラス変換による解法（入力がある場合）

微分方程式 $\left(\frac{d}{dt}\right)y + ay = f(t)$ $\qquad y(0-) = c$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$sY(s) - y(0-) + aY(s) = F(s)$$

$$(s+a)Y(s) = c + F(s)$$

$$Y(s) = \frac{c}{s+a} + \frac{F(s)}{s+a}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1} \qquad f * g = \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]$$

$$y(t) = \underline{ce^{-at}} + \underline{\int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau}$$

初期値に対する応答　　入力に対する応答

演習問題 2.8 (a)

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \sin t \qquad y(0-) = \dot{y}(0-) = 0$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

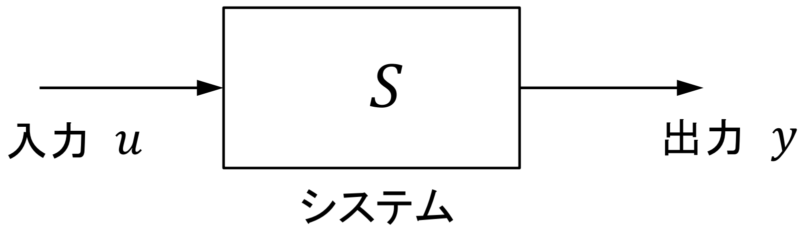
3. システムモデルと伝達関数

制御システムの解析･設計には, ほとんどの場合モデルが必要

動的システムの振る舞いを, まず微分方程式によって記述する

そこから, 伝達関数を導入する

時間領域の伝達関数の意味を考える



システムの概念図

物理法則に基づく基礎方程式から, システムの入出力間の関係を具体的に記述する

常微分方程式

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t)$$
$$= b_0 \frac{d^n u(t)}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t), n \geq m$$

初期条件

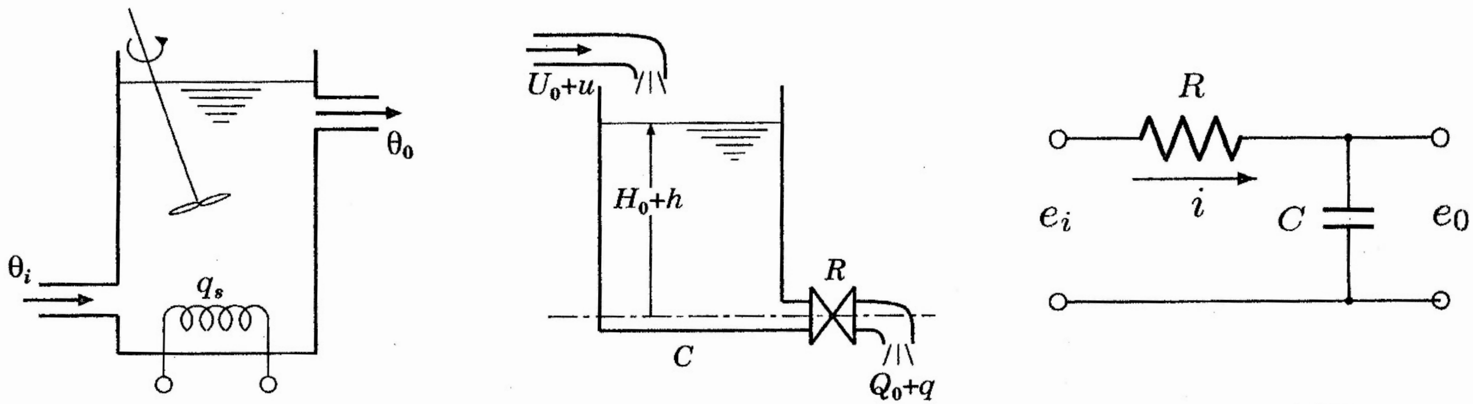
$$\left.\frac{d^i y(t)}{dt^i}\right|_{t=0-} = y_0^{(i)}, i = 0,1,\cdots,n-1 \qquad \left.\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right|_{t=0-} = u_0^{(k)}, k = 0,1,\cdots,m-1$$

パラメータ $(a_1 \sim a_n, b_0 \sim b_m)$ が入出力変数 u, y と
それらの導関数に依存しない ⇒ 線形システム

線形な Linear
線形性 Linearity

パラメータが時間的に変化しない ⇒ 時不変システム

時不変な Time-Invariant
時不変性 Time-Invariance



(a) 熱プロセス　(b) 水位プロセス　(c) RC 回路

図 3.2　簡単なシステム

それぞれの導出は教科書を参照. いずれのダイナミクスも

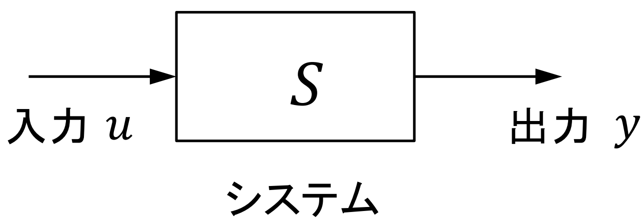
$$T\frac{dy}{dt}+y=Ku, y(0-)=y_0$$

という1次系で記述される.

初期条件が零 ($y(0-)=0$)であるとき,

$$T\frac{dy}{dt}+y=Ku \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad (Ts+1)y(s)=Ku(s)$$

$$y(s)=\frac{K}{Ts+1}u(s)=:G(s)u(s)$$



$G(s)$ は左図の S に相当

$G(s)$ を入力から出力までの伝達関数という.

これは分かりやすい説明だが, 微分方程式を経由しないで, 線形性と時不変性から伝達関数を導入することもできる（後述）

「線形性とは？」

線形性（Linearity）

次の写像を考える.

$$y = f(u)$$

ここで y, u, f はそれぞれ, 出力, 入力, システムを表す.

「線形性」の（数学的な）定義を述べよ. (板書)

線形システムは「ありえないシステム」?