

システム制御 I

4学期

月 5, 6限 14:00-16:10

木 3, 4限 11:00-13:10

5号館 第15講義室 (システムコース)

担当: 平田 健太郎

12/12 第4回

システムモデルと伝達関数 (1)

ラプラス変換は何の役にたつの？

→ もちろん制御理論で. 他にも微分方程式の解法として習った「演算子法」の理論的裏付けを与えます.

演算子法 (記号的解法)

微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0, y(0) = c_1, \frac{dy}{dt}(0) = c_2$

が与えられたとき?

微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0, y(0) = c_1, \frac{dy}{dt}(0) = c_2$

が与えられたとき,

- 1) 微分演算子を Δ とおけ.
- 2) 与式は $(\Delta^2 + 2\Delta - 3)y = 0$ であるので, $\Delta^2 + 2\Delta - 3 = 0$ を Δ について解け.
- 3) $\Delta^2 + 2\Delta - 3 = (\Delta + 3)(\Delta - 1)$ より $\Delta = -3, 1$.
- 4) 解を $y(t) = \alpha_1 e^{-3t} + \alpha_2 e^t$ とおき, 定数を初期条件より定めよ.

決して, 理由は聞いてはならない...



I do not refuse my dinner simply because I do not understand the process of digestion.

Oliver Heaviside

ラプラス変換による解法

Carson (1917)

微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0$



?

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}y(t)\right] = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right] = s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}y(t)\right] - \frac{dy}{dt}(0) = s^2Y(s) - sy(0) - \frac{dy}{dt}(0)$$

ラプラス変換による解法

微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0$

↓ \mathcal{L}

$$s^2Y(s) - sy(0) - \frac{dy}{dt}(0) + 2\{sY(s) - y(0)\} - 3Y(s) = 0$$

$$\{s^2 + 2s - 3\}Y(s) = sy(0) + \frac{dy}{dt}(0) + 2y(0) =: as + b$$

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 2s - 3} = \frac{as + b}{(s + 3)(s - 1)} = \frac{\alpha_1}{s + 3} + \frac{\alpha_2}{s - 1}$$

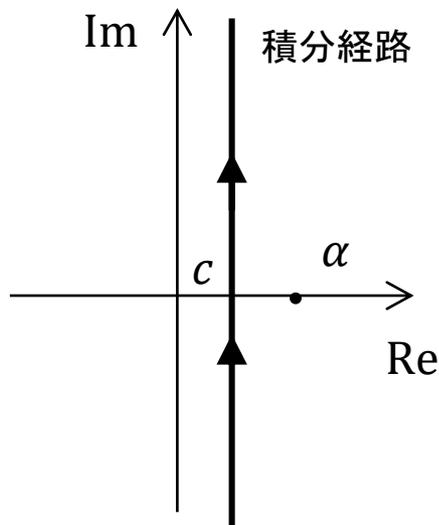
↓ \mathcal{L}^{-1}

$$y(t) = \alpha_1 e^{-3t} + \alpha_2 e^t$$

部分分数展開
Partial fractional expansion

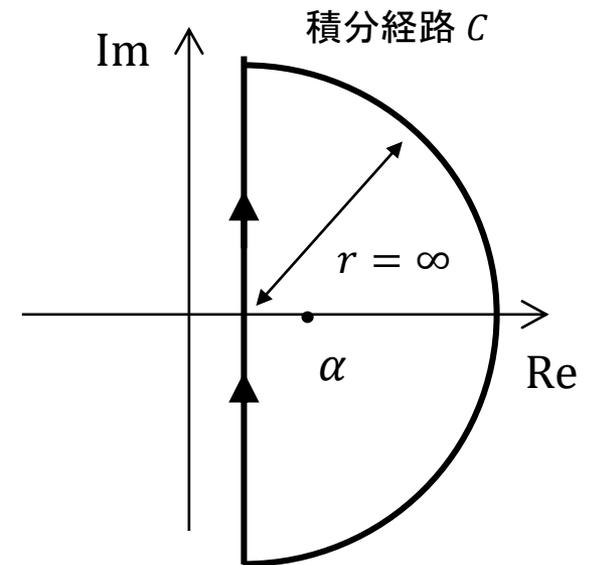
逆ラプラス変換を複素積分(留数)から行なうと

例: $h(s) = \frac{1}{s - \alpha}$ $h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} h(s)e^{st} ds$



$c < \text{Re } \alpha$ となるように虚軸に
平行な積分経路をとる

$h(s) \rightarrow 0$ ($|s| \rightarrow \infty$) なので
積分値は右の閉曲線 C における
積分と同じ



e^{st} は C の周上および内部で正則(微分可能)なので

Cauchyの積分公式 $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(s)}{s - \alpha} ds$ において $f(s) = e^{st}$ とすれば

➡ $h(t) = f(\alpha) = e^{\alpha t}$

毎度複素積分をするのは現実的でない。通常、ラプラス変換表を逆引きして使う。

部分分数展開は展開係数を適当において、係数一致の計算をしてもよいが、ヘビサイドの展開定理を使うこともできる。

ヘビサイドの展開定理

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, n > m$$

$N(s), D(s)$ は互いに素

$N(s) = 0$ となる点: 零点

$D(s) = 0$ となる点: 極

(a) $D(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_m), s_i \neq s_j (i \neq j)$ と因数分解できるとき ($F(s)$ の極が互いに異なるとき)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n \frac{N(s_i)}{D'(s_i)} e^{s_i t}, t > 0$$

ヘビサイドの展開定理

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, n > m$$

(b) $s = s_i$ が $F(s)$ の n_i 位の極, すなわち $D(s) = (s - s_1)^{n_1} \dots (s - s_r)^{n_r}$, $n_1 + \dots + n_r = n$ であるとき

$$f(t) = \left(C_{11} + C_{12}t + \dots + \frac{C_{1n_1}}{(n_1 - 1)!} t^{n_1-1} \right) e^{s_1 t} + \dots \\ + \left(C_{r1} + C_{r2}t + \dots + \frac{C_{rn_r}}{(n_r - 1)!} t^{n_r-1} \right) e^{s_r t}, t > 0$$

$$C_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \left\{ \left(\frac{d}{ds} \right)^{n_i - k} [(s - s_i)^{n_i} F(s)] \right\}$$

証明 (極が相異なる場合)

$$F(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \dots + \frac{C_i}{s - s_i} + \dots + \frac{C_n}{s - s_n} \quad \text{と部分分数展開できる.}$$

両辺に $s - s_i$ をかけて, $s \rightarrow s_i$ とすると

$$(s - s_i) F(s) = \frac{C_1(s - s_i)}{s - s_1} + \dots + C_i + \dots + \frac{C_n(s - s_i)}{s - s_n}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 0 \quad 0$

$$\therefore C_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) F(s) = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) \frac{N(s)}{D(s)} = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{N(s) + (s - s_i)N'(s)}{D'(s)} = \frac{N(s_i)}{D'(s_i)}$$

ロピタルの定理

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n \frac{N(s_i)}{D'(s_i)} e^{s_i t}, t > 0$$

ラプラス変換の性質

(L6) 合成積

2つの時間信号 $f(t), g(t)$ 間の演算

$$\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

を合成積 (Convolution) といい, $f * g$ で表す. (たたみ込み積分ともいう)

$\xi = t - \tau$ とすれば

$$\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_t^0 f(\xi)g(t - \xi) (-d\xi) = \int_0^t f(\xi)g(t - \xi) d\xi$$

$$f(t) = g(t) = 0, t < 0.$$

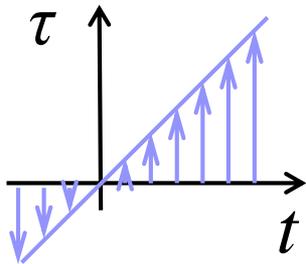
Laplace Transform of $f * g$

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right] e^{-st} dt$$

$$\tau \in [0, t], t < 0 \rightarrow \tau \geq t \rightarrow t - \tau \leq 0 \rightarrow f(t - \tau) = 0$$

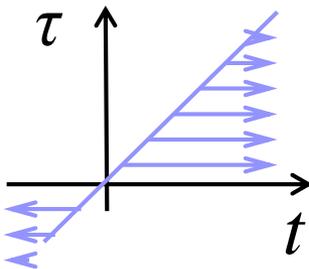
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right] e^{-st} dt$$

積分区間を拡げて, 教科書より一般的な説明をしている.
(フーリエ変換の場合の同種の証明にも使える.)



先に τ について 0 から t まで積分
後に t について $-\infty$ から ∞ まで積分

||



先に t について τ から $\pm\infty$ まで積分
後に τ について $-\infty$ から ∞ まで積分

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right] e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 \int_0^t * d\tau dt + \int_0^{\infty} \int_0^t * d\tau dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 \int_{\tau}^{-\infty} * dt d\tau + \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} * dt d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau} \left[\int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)} dt \right] d\tau$$

➡ $\mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s)$

 = 0, Since $g(\tau) = 0$ when $\tau \leq 0$.

演習問題 2.7 (a)

部分分数展開はしない

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + b^2)^2} \right] =$$

$$\frac{s}{(s^2 + b^2)^2} = \frac{s}{s^2 + b^2} \cdot \frac{1}{b} \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}^{-1} \\ \swarrow \\ \cos bt =: f(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}^{-1} \\ \swarrow \\ \frac{1}{b} \sin bt =: g(t) \end{array}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + b^2)^2} \right] = f * g = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \dots$$

演習問題 2.7 (b)

$$\frac{1}{s^2(s+a)} = \frac{\alpha}{s^2} + \frac{\beta}{s+a}$$

とりあえず部分分数展開

$$= \frac{\alpha(s+a) + \beta s^2}{s^2(s+a)}$$

α, β を選んで、分子を1にできない



自由度が不足

演習問題 2.7 (b)

$$\frac{1}{s^2(s+a)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2} + \frac{\gamma}{s+a} = \frac{(\alpha s + \beta)(s+a) + \gamma s^2}{s^2(s+a)}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + a\alpha = 0 \\ \beta a = 1 \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{1}{a^2}, \beta = \frac{1}{a}, \gamma = \frac{1}{a^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{a^2} \frac{1}{s} + \frac{1}{a} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{a^2} \frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{a} \left(t + \frac{e^{-at} - 1}{a} \right)$$

演習問題 2.7 (c)

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta s + \gamma}{s^2 + 2s + 2} \quad \text{複素根}$$

$$s = -1 \pm j \quad \frac{a}{s + 1 - j} + \frac{\bar{a}}{s + 1 + j} \quad \text{を經由して合成するか}$$

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \quad \text{を經由して三角関数と } s \text{ 領域推移を考えるか}$$

- (d) 同様, (e) も展開係数を求める際に1次式とすることに注意,
(f) は時間遅れに注意

ラプラス変換による解法 (入力がある場合)

微分方程式 $\left(\frac{d}{dt}\right)y + ay = f(t)$ $y(0-) = c$



\mathcal{L}

$$sY(s) - y(0-) + aY(s) = F(s)$$

$$(s + a)Y(s) = c + F(s)$$

$$Y(s) = \frac{c}{s + a} + \frac{F(s)}{s + a}$$



\mathcal{L}^{-1}

$$f * g = \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]$$

$$y(t) = \underline{ce^{-at}} + \underline{\int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau}$$

初期値に対する応答

入力に対する応答

演習問題 2.8 (a)

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \sin t$$

$$y(0^-) = \dot{y}(0^-) = 0$$



$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{\alpha}{s + 2} + \frac{\beta}{s + 1} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + 1}$$

合成積によらない方法

$$\alpha(s + 1)(s^2 + 1) + \beta(s + 2)(s^2 + 1) + (\gamma s + \delta)(s + 1)(s + 2) = 1$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0, \\ \alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta = 0, \\ \alpha + 2\beta + 2\delta = 1 \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4次の連立方程式を
解くのが少し大変

$$y(t) = \frac{1}{10} (-2e^{-2t} + 5e^{-t} - 3 \cos t + \sin t)$$

別解

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)(s + j)(s - j)}$$
$$= \frac{a}{s + 1} + \frac{b}{s + 2} + \frac{c}{s + j} + \frac{d}{s - j}$$

ヘビサイドの展開定理より

$$a = \left[\frac{1}{(s + 2)(s + j)(s - j)} \right]_{s=-1} = \frac{1}{1(-1 + j)(-1 - j)} = \frac{1}{2}$$

$$b = \left[\frac{1}{(s + 1)(s + j)(s - j)} \right]_{s=-2} = \frac{1}{-1(-2 + j)(-2 - j)} = -\frac{1}{5}$$

$$c = \left[\frac{1}{(s + 1)(s + 2)(s - j)} \right]_{s=-j} = \frac{1}{-2j(1 - j)(2 - j)} = \dots = \frac{-6 + 2j}{40}$$

$$d = \bar{c} = \frac{-6 - 2j}{40}$$

$$ce^{-jt} + \bar{c}e^{jt} = c(\cos t - j \sin t) + \bar{c}(\cos t + j \sin t) = (c + \bar{c}) \cos t - j(c - \bar{c}) \sin t$$
$$= 2\operatorname{Re}[c] \cos t - j^2 2\operatorname{Im}[c] \sin t = -\frac{6}{20} \cos t + \frac{1}{10} \sin t$$

別解2

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)(s + j)(s - j)}$$
$$= \frac{a}{s + 1} + \frac{b}{s + 2} + (\text{the rest})$$

ヘビサイドの展開定理より

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{5}$$

$$(\text{the rest}) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1/2}{s + 1} + \frac{1/5}{s + 2}$$

$$= \frac{1}{10} \frac{10 - 5(s + 2)(s^2 + 1) + 2(s + 1)(s^2 + 1)}{(s + 1)(s + 2)(s^2 + 1)}$$

$$\boxed{} = 10 - 5(s^3 + 2s^2 + s + 2) + 2(s^3 + s^2 + s + 1)$$

$$= -3s^3 - 8s^2 - 3s + 2 = (s + 1)(-3s^2 - 5s + 2) = (s + 1)(s + 2)(-3s + 1)$$

$$(\text{the rest}) = \frac{-3s + 1}{10(s^2 + 1)}$$

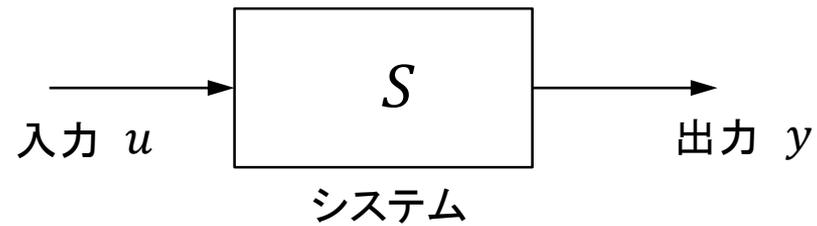
3. システムモデルと伝達関数

制御システムの解析・設計には, ほとんどの場合
モデルが必要

動的システムの振る舞いを, まず微分方程式に
よって記述する

そこから, 伝達関数を導入する

時間領域の伝達関数の意味を考える



システムの概念図

物理法則に基づく基礎方程式から、システムの入出力間を具体的に記述する

常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \\ = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t), n \geq m \end{aligned}$$

初期条件

$$\left. \frac{d^i y(t)}{dt^i} \right|_{t=0-} = y_0^{(i)}, i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \left. \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right|_{t=0-} = u_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m-1$$

パラメータ ($a_1 \sim a_n, b_0 \sim b_m$) が入出力変数 u, y とそれらの導関数に依存しない

⇒ 線形システム

線形な Linear
線形性 Linearity

パラメータが時間的に変化しない ⇒ 時不変システム

時不変な Time-Invariant
時不変性 Time-Invariance

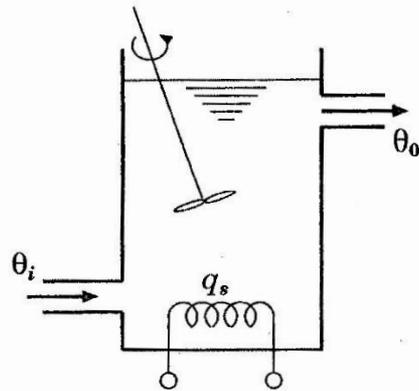
常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \\ = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t), n \geq m \end{aligned}$$

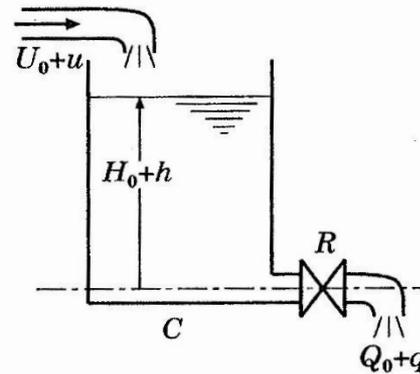
$$n = 1, m = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = b_0 u(t)$$

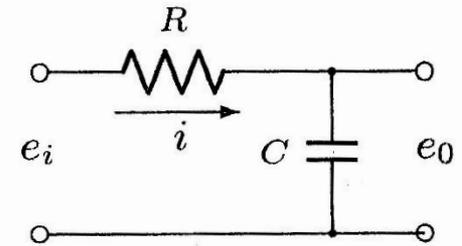
$$\Rightarrow T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t), \quad T = \frac{1}{a_1}, K = \frac{b_0}{a_1}$$



(a) 熱プロセス



(b) 水位プロセス



(c) RC 回路

図 3.2 簡単なシステム

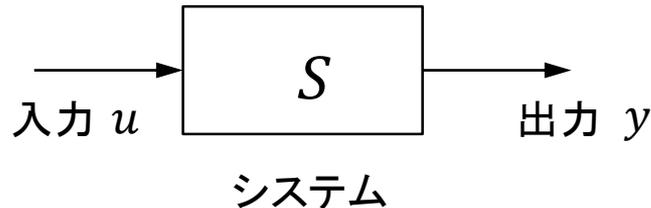
それぞれの導出は教科書を参照. いずれのダイナミクスも

$$T \frac{dy}{dt} + y = Ku, y(0-) = y_0$$

という1次系で記述される.

初期条件が零 ($y(0^-) = 0$) であるとき,

$$T \frac{dy}{dt} + y = Ku \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad (Ts + 1)y(s) = Ku(s)$$
$$y(s) = \frac{K}{Ts + 1} u(s) =: G(s)u(s)$$



$G(s)$ は左図の S に相当

$G(s)$ を入力から出力までの
伝達関数という.

これは分かりやすい説明だが, 微分方程式を経由しないで, 線形性と時不変性から伝達関数を導入することもできる (後述)

「線形性とは？」

線形性 (Linearity)

次の写像を考える.

$$y = f(u)$$

ここで y, u, f はそれぞれ, 出力, 入力, システムを表す.

【定義】

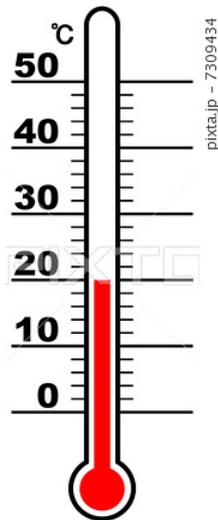
$y_1 = f(u_1), y_2 = f(u_2)$ であるとき, 任意のスカラー α, β に対して

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$$

となるとき, $f(\cdot)$ を線形であるという.

線形システムは「ありえないシステム」?

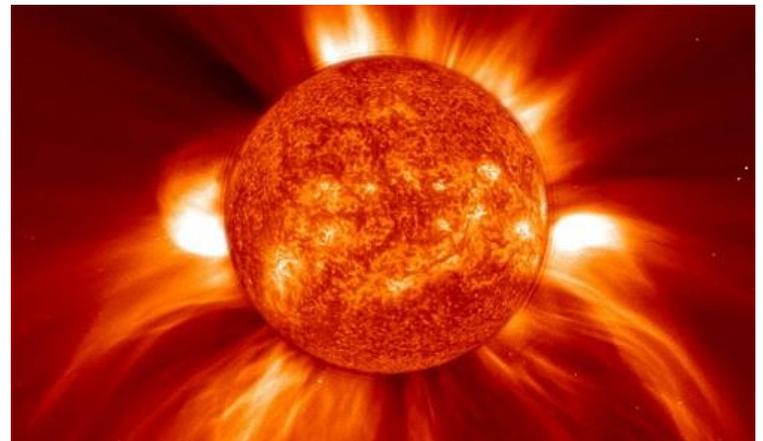
線形システムとは何か？



入力: u
出力: $+1^{\circ}\text{C}$

入力: $u \times 6,000$

出力: ???



「線形性」は理想化された概念である。

初学者の陥りやすい危険な視点



「実在するシステムは全て非線形なので
(線形でないので), 非線形制御理論が
必要である。」

理想的であればこそその美しさをもつ

と同時に線形システムは実用的でもある

To Do (今回)

- 1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする.)
- 2) 復習
- 3) 教科書教科書 3.4~3.7 を読む.
- 4) Youtubeの動画 "How a giant telescope works?"
を見て, 内容を日本語で要約 (active optics と
adaptive optics の部分. 3番目の interferometry
は除外).
レポートとして12/19講義開始時に提出.
どうしても聞き取れない部分はとばしてもよい.