

システム制御 I

4学期

月 5, 6限 14:00-16:10

木 3, 4限 11:00-13:10

5号館 第15講義室 (システムコース)

担当: 平田 健太郎

12/9 第3回

ラプラス変換 (2)

ラプラス変換をどのように解釈すべきか？

フーリエ級数： 周期関数を正規直交基底の線形和で表現
係数は原関数と基底の内積 $\Rightarrow e^{-j\omega_k t}$ 登場. 複素共役(転置)

フーリエ変換： 離散的な周波数を連続に. 周期 $T \rightarrow \infty$ の極限をとる.

ラプラス変換： 時間とともに増大する関数にも適用可能
 \Rightarrow システムの解析に威力を発揮する

ラプラス変換における変数 s は複素数であることに注意.

理工系学生に対する解析学の講義において, 複素関数論の割合は低下しており, 十分でない.

ラプラス変換(順方向)では, 積分変数 t は実数であるため, 形式的には s が複素数であることに留意しなくても, 大きな問題は生じないように見える.

$$h(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

これに対して, 逆ラプラス変換は純然たる「複素積分」であるので問題が生じるが, 実際上はラプラス変換表の逆引きで対応することがほとんどなので, 表面化しない. (いわゆる微分方程式の記号的解法では単なるシンボルと見なしても齟齬は生じない).

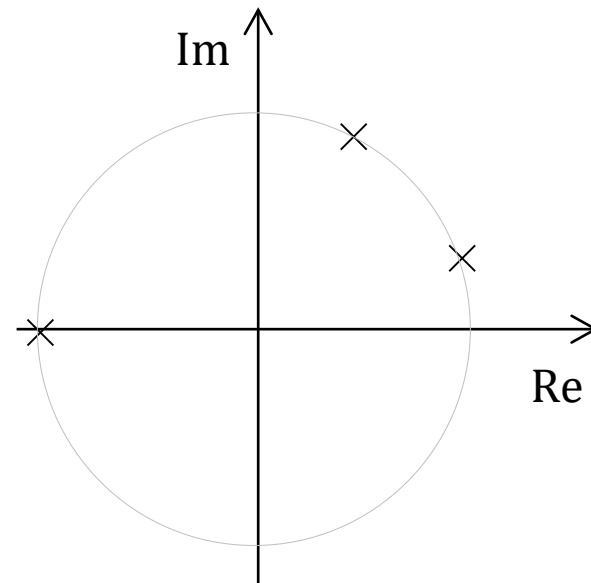
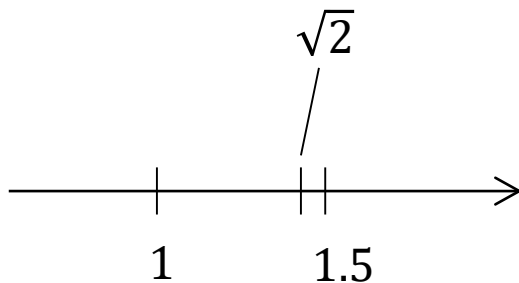
$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} h(s)e^{st} ds,$$

しかし, 制御工学では s が複素数であることを正しく理解しないと, 安定性, 周波数応答の議論で途方に暮れることになる.

制御工学では虚数単位として j ($:= \sqrt{-1}$) を用いることが多いので, 本講義でもこれを踏襲する.

断りなく大小を比較できるのは実数に限る(数直線上に並べられるから).

複素数はそのままでは大小比較できない. 複素数の絶対値, 実部, 虚部は実数なので比較できる.

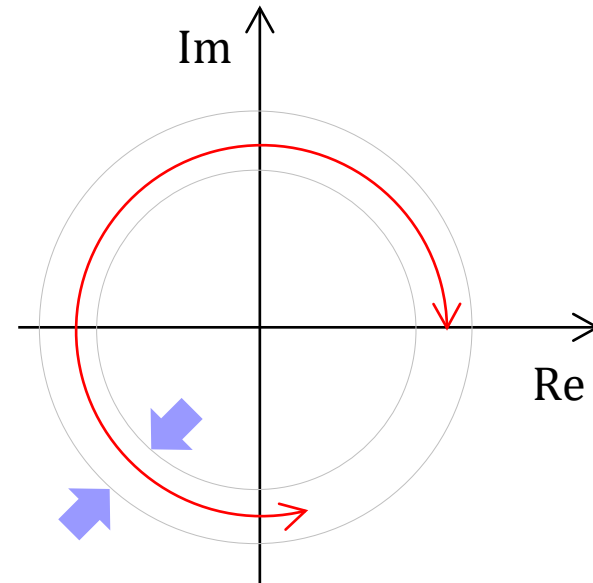
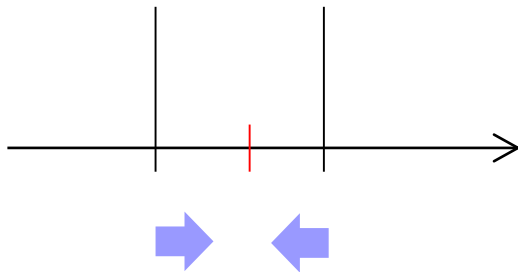


(実数値をとる) 数列 a_n は任意の n に対して

$$\frac{n^2 - 2n - 4}{n^2} < a_n < \frac{n^2 + 3n + 7}{n^2}$$

を満たすとする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

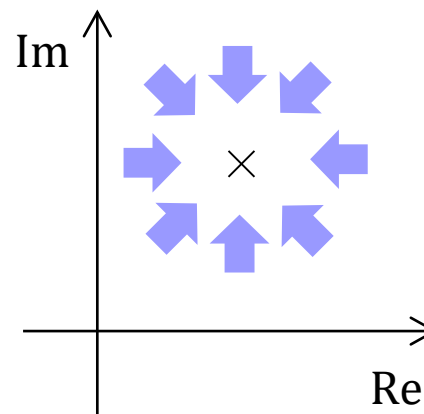
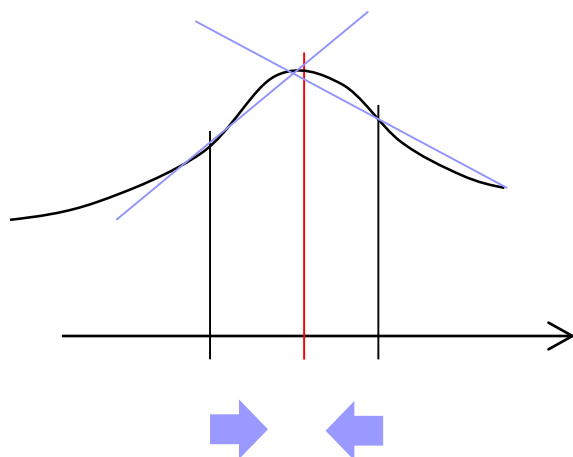
ということは、はさみうちの原理等で直接、収束性を判定することはできない。
ラプラス変換の収束に関しては、注意が必要。



近づく方向が左右だけでないということは、微分可能性にも影響する。

微分可能 \longleftrightarrow $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ が存在する

\longleftrightarrow 右極限と左極限が存在して、一致する



すべての方向から近づく極限が存在して一致しなければ微分可能にならない(解析性/正則性)

積分に際しても、上下端だけでなく積分経路が重要となる。

関数 $f(s)$ がある領域 K で正則で、単純な閉曲線 C とその内部もすべて K に属するとき

$$\int_C f(s) ds = 0$$

【Cauchyの積分公式】 関数 $f(s)$ が閉曲線 C の内部および周上で正則で、 a が C の内部の任意の点ならば

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(s)}{s-a} ds$$

複素関数論の簡潔なまとめについては、教科書巻末付録Aを参照。

複素指数関数のラプラス変換

$$e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{C}$$

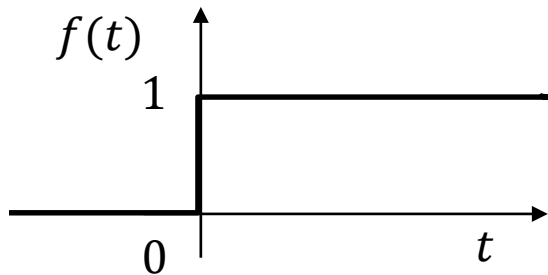
$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = ?$$

複素指数関数のラプラス変換

$$e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = ?$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \text{ を単位ステップ関数といい, 記号 } 1(t) \text{ で表す.}$$



$\alpha = 0$ のとき, $e^{\alpha t} = 1$

→ $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] =$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \mathcal{L}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] =$$

ラプラス変換の線形性を利用している

部分積分を2回施して, 自身の定数倍に戻る性質から

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos \omega t] &= \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \cos \omega t \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} \omega \sin \omega t dt \\ &= \frac{1}{s} + \left[\frac{e^{-st}}{s^2} \omega \sin \omega t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s^2} \omega^2 \cos \omega t dt\end{aligned}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2} \right) \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{s} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

と答える学生が多い. 間違いではないが, 式変形に終始している感がある.


実部と虚部の対応から

$$\mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \mathcal{L}[\cos \omega t + j \sin \omega t] = \frac{1}{s - j\omega} = \frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

とするのは, よくない.

ラプラス変換の性質

(L1) 線形性 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \mathcal{L}[g(t)] = G(s), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

 $\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$

(L2) t 領域推移 (時間遅れ, 時間進み) $\mathcal{L}[f(t \pm a)] = ?$

(L3) s 領域推移 $\mathcal{L}^{-1}[F(s + a)] = ?$

(L4) 導関数/高階導関数 $\mathcal{L}[f'(t)] = ?$ $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = ?$

(L5) 時間積分 $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = ?$

(L6) 合成積 $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = ?$

To Do (前回)

- 1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする.)
- 2) 復習
- 3) 教科書 2.4~2.7 を読む.
- 4) 演習問題2.1, 2.2, 2.3を解いてくる. 答えだけはNG. 当てられたときに説明ができるように.

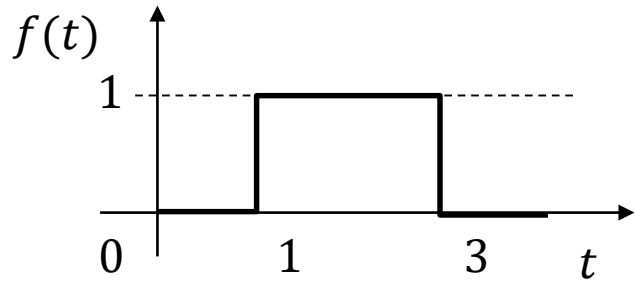
演習問題 2.2 (を先にやるとよい)

ラプラス変換の性質 (L2) (a) t 領域推移 (時間遅れ)

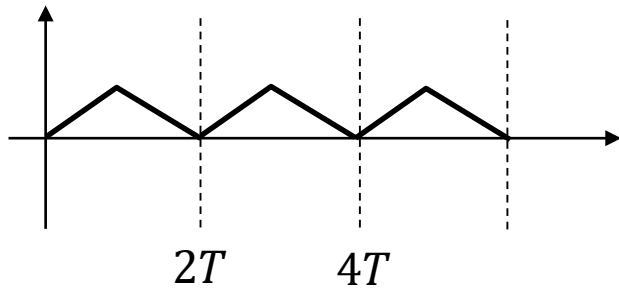
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ であるとき } \quad \mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-Ts}F(s)$$

導出: (板書)

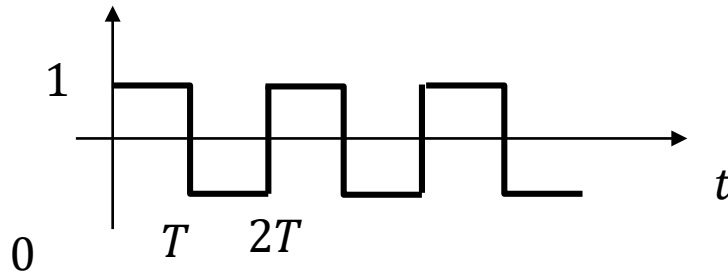
演習問題 2.1 (a)



演習問題 2.1 (b)



演習問題 2.1 (c)



ラプラス変換の性質

(L2) (a) t 領域推移 (時間遅れ)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ であるとき} \quad \mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-Ts} F(s)$$

(L3) s 領域推移 $\mathcal{L}^{-1}[F(s + a)] = ?$

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ であるとき

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+a)t} dt = F(s + a)$$

ラプラス変換の性質

(L4) 導関数のラプラス変換

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \qquad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\frac{d}{dt} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} ?$$

Hint: Use integral by parts

ラプラス変換の性質

(L4) 導関数のラプラス変換

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\frac{d}{dt} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} ?$$

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

繰返し適用すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f^{(n)}(t)e^{-st} dt &= s\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)] - f^{(n-1)}(0) \\ &= s(s\mathcal{L}[f^{(n-2)}(t)] - f^{(n-2)}(0)) - f^{(n-1)}(0) \\ &\quad \vdots \\ &= s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f^{(0)}(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) \dots - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

ラプラス変換の性質 (L4) 高階導関数

ラプラス変換の性質 (L5) 時間積分

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

Let $g(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau, g(0) = 0$

$$\int_0^{\infty} g'(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) =$$



$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^t f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \right) e^{-st} dt =$$

演習問題 2.3

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathcal{L}[te^{\alpha t}] = \int_0^{\infty} te^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{(\alpha-s)t} dt$$

$\alpha = 0$: ランプ関数
 $f(t) = t, t > 0,$
 $f(t) = 0, t < 0.$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{te^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s} \right\} = \frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s} + te^{(\alpha-s)t} \quad (\text{部分積分})$$

$$\therefore \mathcal{L}[te^{\alpha t}] = \left[\frac{te^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s} \right]_0^{\infty} - \mathcal{L} \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha-s} \right] = \frac{1}{s-\alpha} \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{(s-\alpha)^2} \quad (\text{2重根})$$

$$\text{cf. } \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha} \quad (\text{単根})$$

繰返し適用すると

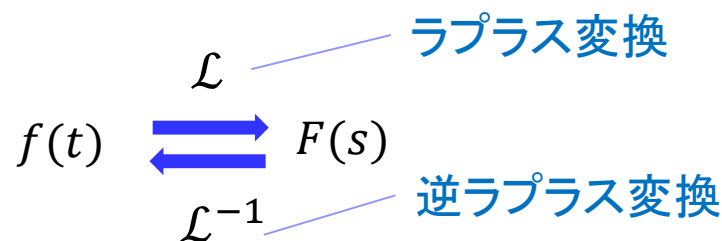
$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{t^n e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s} \right\} = \frac{nt^{n-1} e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s} + t^n e^{(\alpha-s)t}$$

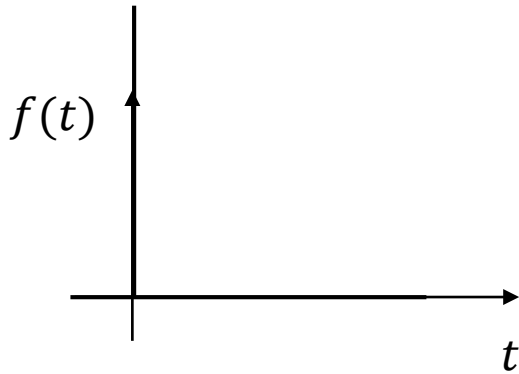
$$\therefore \mathcal{L}[t^n e^{at}] = \left[\frac{t^n e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s} \right]_0^\infty - \mathcal{L} \left[\frac{nt^{n-1} e^{at}}{\alpha-s} \right]$$

$$= \frac{n}{s-\alpha} \mathcal{L}[t^{n-1} e^{at}] = \frac{n(n-1)}{(s-\alpha)^2} \mathcal{L}[t^{n-2} e^{at}]$$

$$= \dots = \frac{n!}{(s-\alpha)^n} \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \quad (n+1 \text{重根})$$

p.16 ラプラス変換表はほぼコンプリート





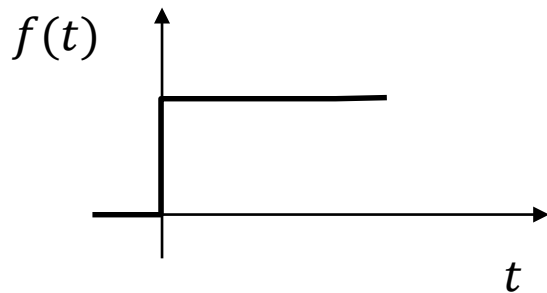
インパルス(impulse)関数

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

微分 \updownarrow 積分

$$\times s \quad \updownarrow \quad \times 1/s$$



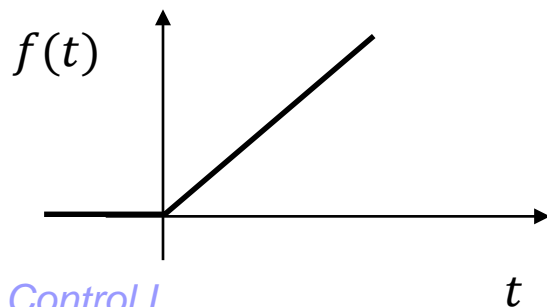
単位ステップ(step)関数

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

微分 \updownarrow 積分

$$\times s \quad \updownarrow \quad \times 1/s$$



ランプ(ramp)関数

$$f(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}$$

ラプラス変換の最終値定理 Final Value Theorem

$f(t)$: 区間 $[0, T]$ で可積分, $f(\infty)$ が存在するとき,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(\infty), s \in \mathbb{R}$$

が成り立つ.

直観的には

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

より, $s \rightarrow 0$ とすると左辺は

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = f(\infty) - f(0)$$

なので

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(\infty), s \in \mathbb{R}$$

が成り立ちそうである。(実際, 精密な議論を経ても, そうなる)

$$g(t) = (f(t) - f(\infty))1(t)$$

$1(t)$: Step Function

$$sG(s) = s \left(F(s) - \frac{f(\infty)}{s} \right) = s \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt$$

$$= s \int_0^T g(t) e^{-st} dt + s \int_T^{\infty} g(t) e^{-st} dt$$

区間を有限区間と
無限区間に分ける

$g(t) \rightarrow 0$ なので t を大きくすれば $|g(t)|$ をいくらでも小さくできる

$$\forall \epsilon > 0, \exists T, \text{ s.t. } |g(t)| < \epsilon, t > T$$

$$s > 0$$

$$\left| s \int_T^{\infty} g(t) e^{-st} dt \right| < \epsilon \int_T^{\infty} s e^{-st} dt = \epsilon e^{-sT} \rightarrow 0, (s \rightarrow \infty)$$

$g(t) \rightarrow 0$ なので t を大きくすれば $|g(t)|$ をいくらでも小さくできる

$$\forall \epsilon > 0, \exists T, \text{ s.t. } |g(t)| < \epsilon, t > T$$

$$s > 0$$

\forall : for all, 任意の〇〇に対して

\exists : exists, 〇〇が存在して

s.t.: such that, 〇〇となるような

任意の正の数 ϵ に対して, $t > T$ において常に $|g(t)| < \epsilon$ となるような時刻 T が存在するので, $s > 0$ に対して次式が成り立つ.

$$\left| s \int_T^{\infty} g(t) e^{-st} dt \right| < \epsilon \int_T^{\infty} s e^{-st} dt = \epsilon e^{-sT} \rightarrow 0, (s \rightarrow 0)$$

$$s > 0, \quad 0 < e^{-st} \leq 1$$

$$g(t) = (f(t) - f(\infty))1(t)$$

$$\begin{aligned} \left| s \int_0^T g(t) e^{-st} dt \right| &\leq s \int_0^T |g(t)| e^{-st} dt \\ &\leq s \int_0^T (|f(t)| + |f(\infty)|) dt \rightarrow 0, (s \rightarrow 0) \end{aligned}$$

$$sG(s) = s \int_0^T g(t) e^{-st} dt + s \int_T^\infty g(t) e^{-st} dt \rightarrow 0, (s \rightarrow 0)$$

$$sG(s) = s \left(F(s) - \frac{f(\infty)}{s} \right) \rightarrow 0 \quad \longrightarrow \quad sF(s) \rightarrow f(\infty), (s \rightarrow 0)$$

ラプラス変換は何の役にたつの？

→ もちろん制御理論で. 他にも微分方程式の解法として習った「演算子法」の理論的裏付けを与えます.

演算子法 (記号的解法)

微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0, y(0) = c_1, \frac{dy}{dt}(0) = c_2$

が与えられたとき?

演算子法（記号的解法）

微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0, y(0) = c_1, \frac{dy}{dt}(0) = c_2$

が与えられたとき,

- 1) 微分演算子を Δ とおけ.
- 2) 与式は $(\Delta^2 + 2\Delta - 3)y = 0$ であるので, $\Delta^2 + 2\Delta - 3 = 0$ を Δ について解け.
- 3) $\Delta^2 + 2\Delta - 3 = (\Delta + 3)(\Delta - 1)$ より $\Delta = -3, 1$.
- 4) 解を $y(t) = \alpha_1 e^{-3t} + \alpha_2 e^t$ とおき, 定数を初期条件より定めよ.

To Do (今回)

- 1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする.)
- 2) 復習
- 3) 教科書 3.1~3.3 を読む.
- 4) 演習問題2.7, 2.8を解いてくる. 答えだけはNG.当てられたときに説明ができるように.