システム制御 I

4学期
月 5, 6限　14:00-16:10
木 3, 4限　11:00-13:10
5号館 第15講義室 (システムコース）

担当:平田 健太郎

12/9 第3回

ラプラス変換 (2)

Schedule

1. 12/2 (today)
2. 12/5
3. 12/9
4. 12/12
5. 12/16
6. 12/19
7. 12/23
8. 1/6
9. 1/9 中間試験
10. 1/16
11. 1/20
12. 1/23
13. 1/27
14. 1/30
15. 2/3
16. 2/6 期末試験

前回のおさらい

ボール&ビームを初等的な力学の知識に基づいて安定化(?)してみた.
⇒これでいいのか？

制御工学の歴史:　ガバナー

ラプラス変換をどのように解釈すべきか？

ラプラス変換をどのように解釈すべきか？

フーリエ級数:　周期関数を正規直交基底の線形和で表現
係数は原関数と基底の内積 ⇒ $e^{-j\omega_k t}$ 登場. 複素共役（転置）

フーリエ変換: 離散的な周波数を連続に. 周期$T \to \infty$ の極限をとる.

ラプラス変換:　時間とともに増大する関数にも適用可能
⇒ システムの解析に威力を発揮する

ラプラス変換における変数 s は複素数であることに注意.

理工系学生に対する解析学の講義において, 複素関数論の割合は低下しており, 十分でない.

ラプラス変換（順方向）では, 積分変数 t は実数であるため, 形式的には s が複素数であることに留意しなくても, 大きな問題は生じないように見える.

$$h(s) = \int_0^\infty h(t) e^{-st}\, dt$$

これに対して, 逆ラプラス変換は純然たる「複素積分」であるので問題が生じるが, 実際上はラプラス変換表の逆引きで対応することがほとんどなので, 表面化しない. (いわゆる微分方程式の記号的解法では単なるシンボルと見なしても齟齬は生じない).

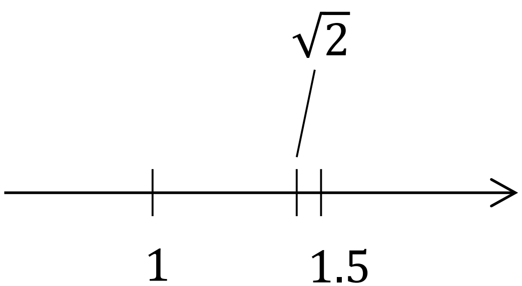
$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} h(s)e^{st}\,ds,$$

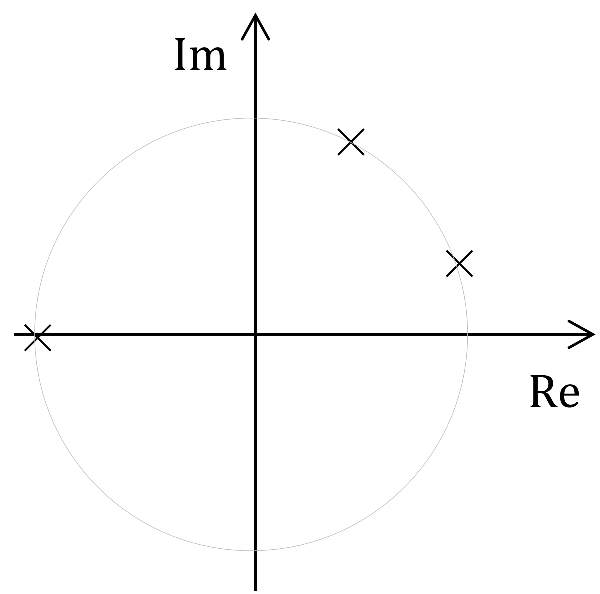
しかし, 制御工学では s が複素数であることを正しく理解しないと,
安定性，周波数応答の議論で途方に暮れることになる.

制御工学では虚数単位として $j\ (:= \sqrt{-1})$ を用いることが多いので, 本講義でもこれを踏襲する.

断りなく大小を比較できるのは実数に限る(数直線上に並べられるから).

複素数はそのままでは大小比較できない. 複素数の絶対値, 実部, 虚部は実数なので比較できる.





（実数値をとる）数列 a_n は任意の n に対して

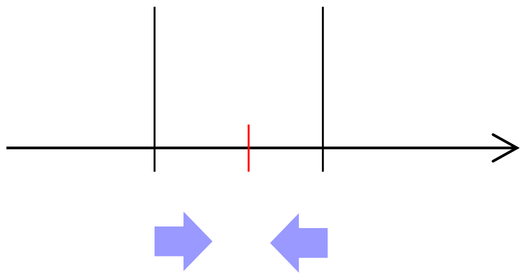
$$\frac{n^2-2n-4}{n^2} < a_n < \frac{n^2+3n+7}{n^2}$$

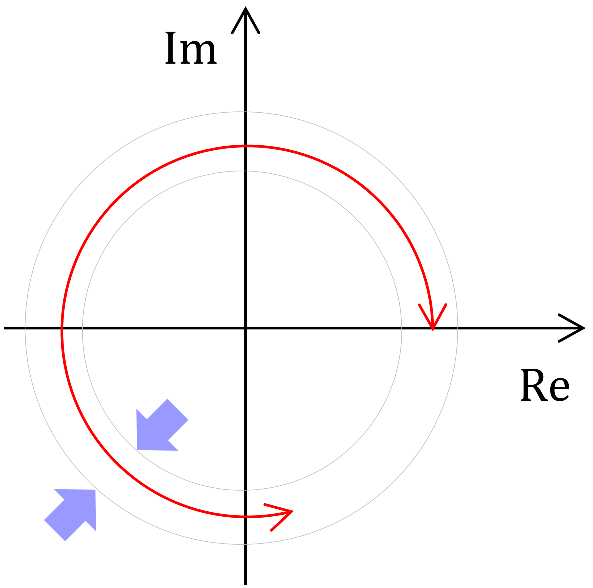
を満たすとする． $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-4}{n^2}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+7}{n^2}=1 \text{ より}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \text{（はさみうちの原理）}$$

ということは, はさみうちの原理等で直接, 収束性を判定することはできない.
ラプラス変換の収束に関しては, 注意が必要.

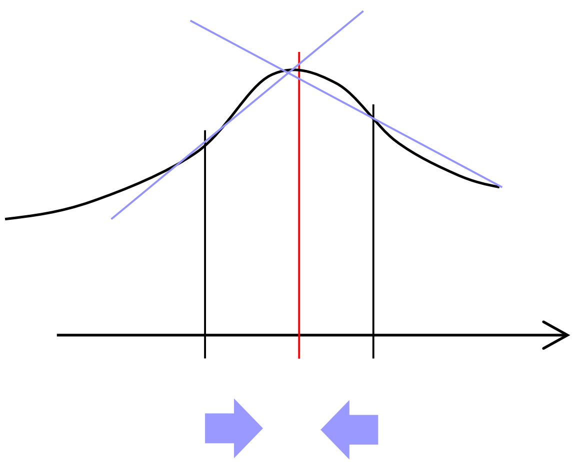


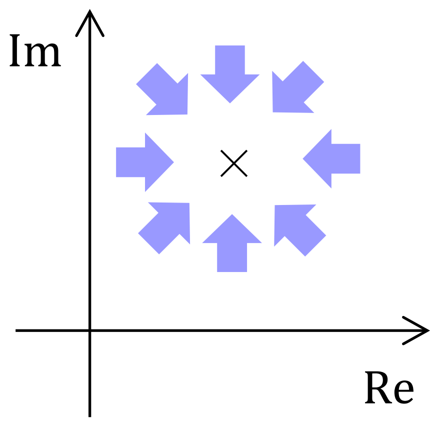


近づく方向が左右だけでないということは, 微分可能性にも影響する.

微分可能 $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ が存在する

$\Longleftrightarrow$ 右極限と左極限が存在して, 一致する





すべての方向から近づく極限が存在して一致
しなければ微分可能にならない（解析性/正則性）

積分に際しても, 上下端だけでなく積分経路が重要となるが, 正則関数については驚くべき性質が成り立つ.

関数 $f(s)$ がある領域 K で正則で, 単純な閉曲線 C とその内部もすべて K に属するとき

$$\int_C f(s)\, ds = 0$$

【Cauchyの積分公式】 関数 $f(s)$ が閉曲線 C の内部および周上で正則で, a が C の内部の任意の点ならば

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(s)}{s-a}\, ds$$

複素関数論の簡潔なまとめについては, **教科書巻末付録A**を参照.

複素指数関数のラプラス変換

$e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t}\, dt = \frac{1}{\alpha - s}\left[e^{(\alpha - s)t}\right]_0^\infty$$

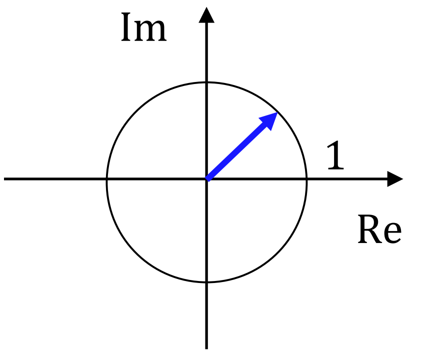
$\lim_{T\to\infty} e^{(\alpha - s)T} = 0$ となるか？

複素数としての収束を判定しなければならないので, 絶対値を評価.

$$e^{(\alpha - s)T} = e^{\mathrm{Re}[(\alpha - s)]T} e^{j\,\mathrm{Im}[(\alpha - s)]T}$$

$$\Rightarrow \quad \left|e^{(\alpha - s)T}\right| = e^{\mathrm{Re}[(\alpha - s)]T}$$

$\mathrm{Re}[\alpha - s] < 0$ のとき, $\lim_{T\to\infty} e^{(\alpha - s)T} = 0$（収束）



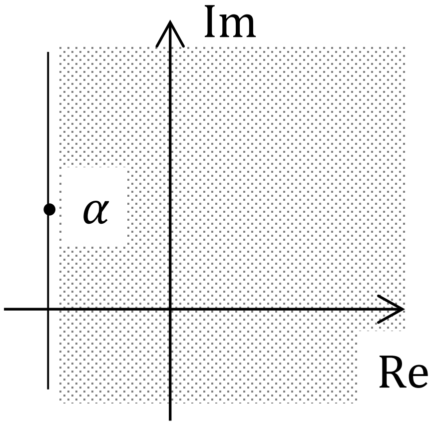
複素指数関数のラプラス変換

$e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}\, dt = \frac{1}{\alpha - s}\left[e^{(\alpha-s)t}\right]_0^\infty$$

➡ $\mathrm{Re}[\alpha - s] < 0$ のとき, $\lim_{T\to\infty} e^{(\alpha-s)T} = 0$（収束）

⬌ $\mathrm{Re}[s] > \mathrm{Re}[\alpha]$ 収束領域



$$\boxed{\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s - \alpha}}$$

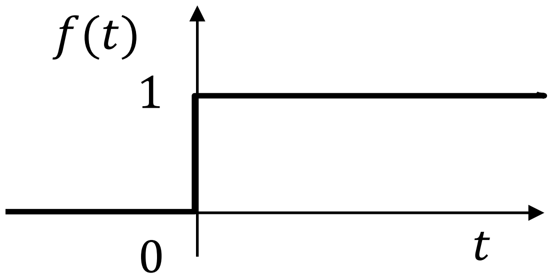
複素指数関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}$$

収束領域 $\mathrm{Re}[s] > \mathrm{Re}[\alpha]$

以降, ラプラス変換の定義(積分)に基づく計算以外の部分で収束領域を明示することはない. 詳細は割愛するが, 解析接続の原理によって, 複素平面全体で関数が定められているとしてよいからである. ここでも, 上記の関数が $s=\alpha$ 以外の領域で正則(解析的)であることが重要な役割を果たしている.

$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ を単位ステップ関数といい, 記号 $1(t)$ で表す.



$\alpha = 0$ のとき, $e^{\alpha t} = 1$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j}\mathcal{L}\left[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

ラプラス変換の線形性を利用している

部分積分を2回施して, 自身の定数倍に戻る性質から

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \int_0^\infty \cos\omega t\, e^{-st}\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\cos\omega t\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\omega\sin\omega t\ dt$$

$$= \frac{1}{s} + \left[\frac{e^{-st}}{s^2}\omega\sin\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s^2}\omega^2\cos\omega t\ dt$$

$$\therefore \left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

と答える学生が多い. 間違いではないが, 式変形に終始している感がある.

実部と虚部の対応から

$$\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\right] = \mathcal{L}[\cos\omega t + j\sin\omega t] = \frac{1}{s-j\omega} = \frac{s+j\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + j\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

とするのは, よくない.

ラプラス変換の性質

（**L1**）線形性　$\mathcal{L}[f(t)] = F(s),\ \mathcal{L}[g(t)] = G(s), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

（**L2**）t 領域推移 (時間遅れ, 時間進み）　$\mathcal{L}[f(t \pm a)] = ?$

（**L3**）s 領域推移　$\mathcal{L}^{-1}[F(s + a)] = ?$

（**L4**）導関数/高階導関数　$\mathcal{L}[f'(t)] = ?$　$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = ?$

（**L5**）時間積分　$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = ?$

（**L6**）合成積　$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = ?$

演習問題 2.2（を先にやるとよい）

ラプラス変換の性質　（**L2**）(a) t 領域推移 (時間遅れ)

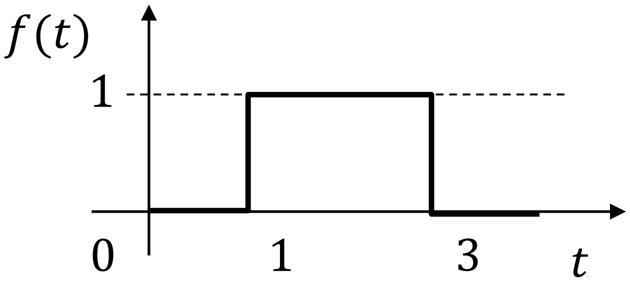
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ であるとき } \quad \mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-Ts}F(s)$$

導出：(板書)

$$\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(t-nT)\right] = \underbrace{(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots)}_{\text{等比級数}} F(s)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-Ts}} F(s)$$

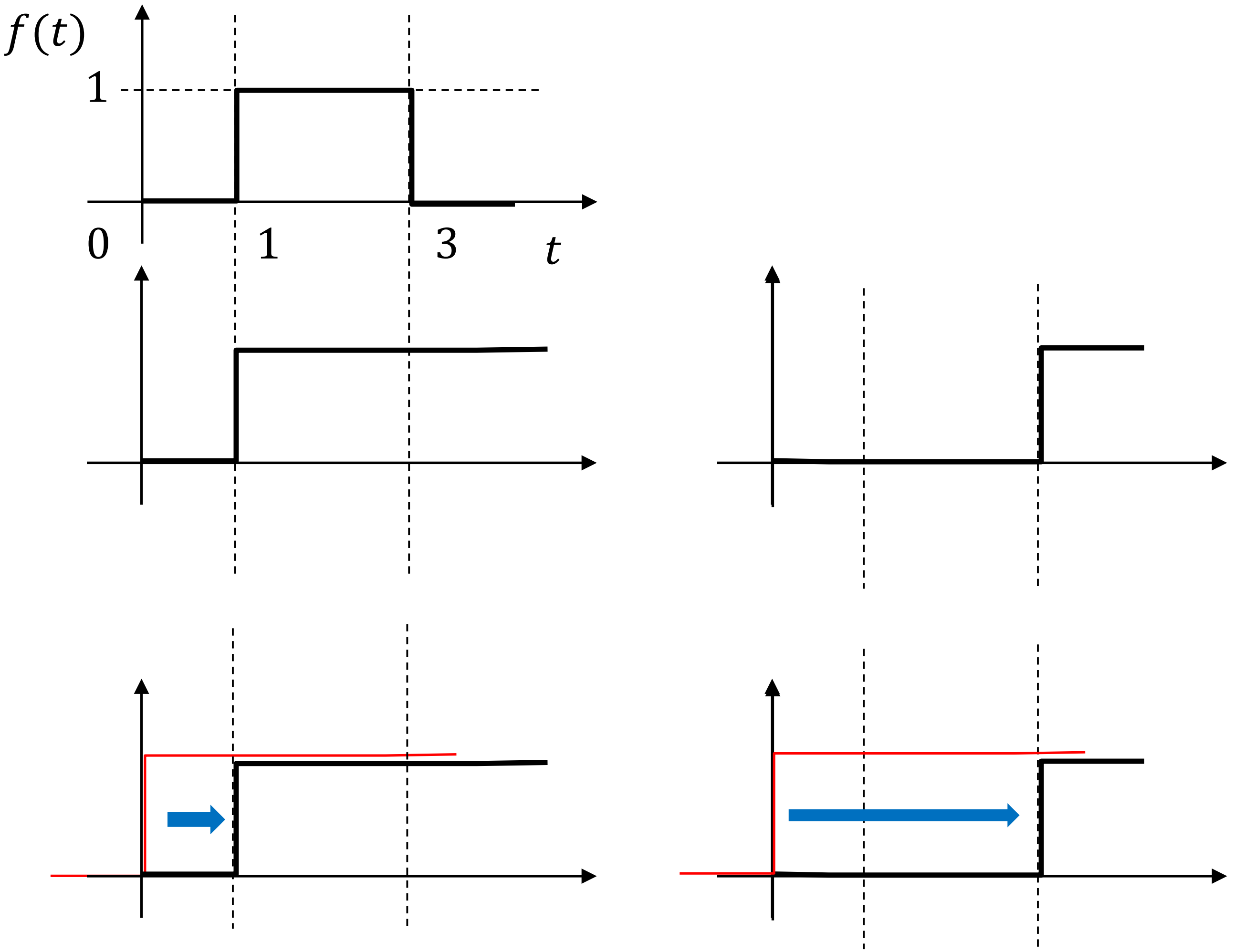
演習問題 2.1 (a)



定義どおりに計算すると…

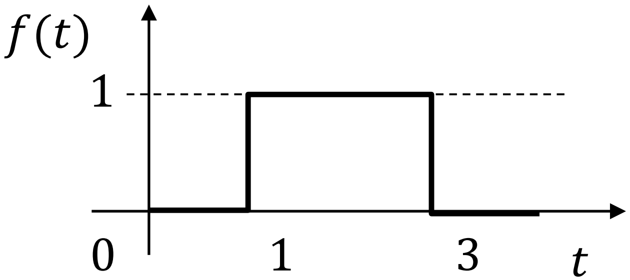
$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_1^3 e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}[e^{-st}]_1^3 = \frac{e^{-s} - e^{-3s}}{s}$$

ちょっとおしゃれに解いてみる



$f(t)$ は左のステップ状信号の差

それぞれのステップ状信号は $t = 0$ で立ち上がるステップ信号をシフトしたもの



$1(t)$: 単位ステップ関数

$$f(t) = 1(t-1) - 1(t-3)$$

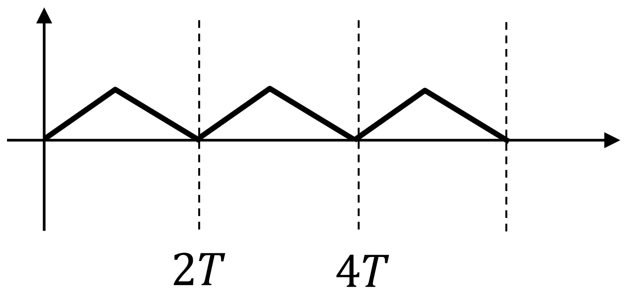
$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1(t-1)] - \mathcal{L}[1(t-3)]$$

$$\mathcal{L}[1(t-1)] = \mathcal{L}[1(t)]e^{-s} = \frac{e^{-s}}{s}$$

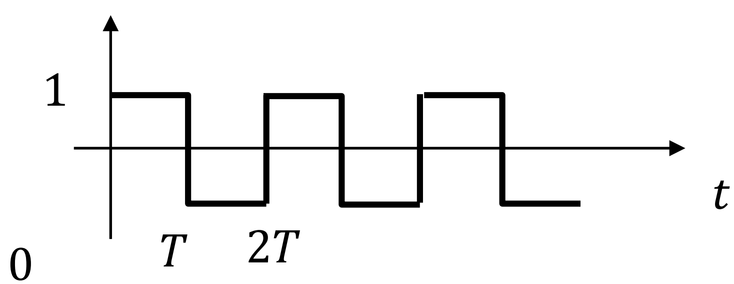
$$\mathcal{L}[1(t-3)] = \mathcal{L}[1(t)]e^{-3s} = \frac{e^{-3s}}{s}$$

$$\therefore\ \mathcal{L}[f(t)] = \frac{e^{-s} - e^{-3s}}{s}$$

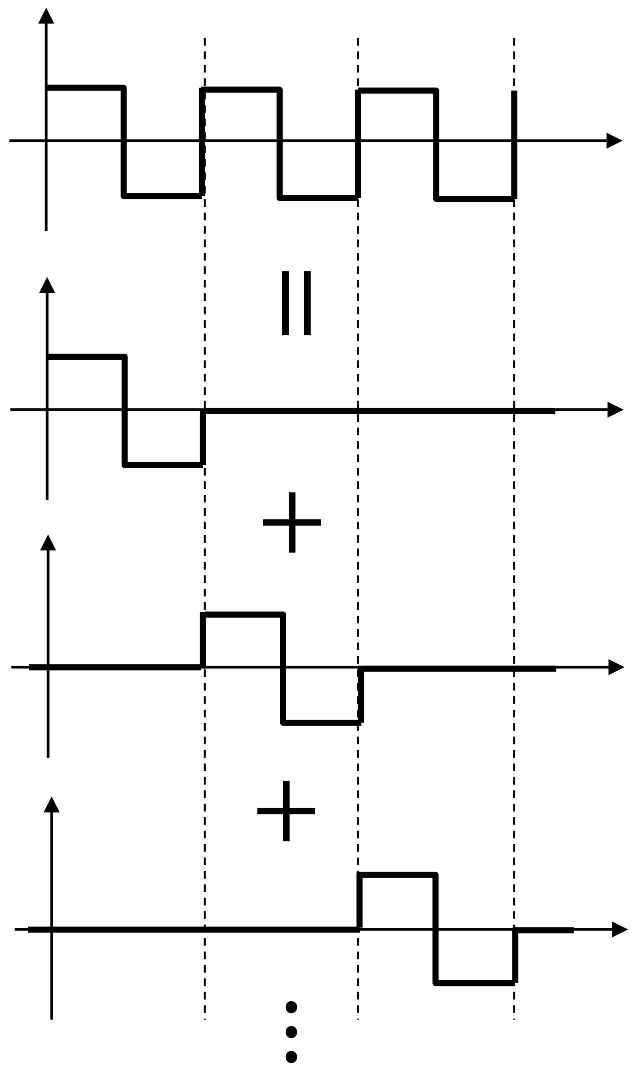
演習問題 2.1 (b)



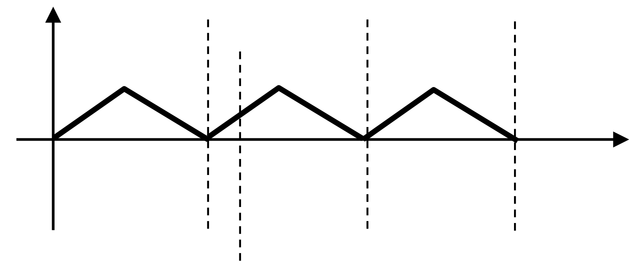
演習問題 2.1 (c)



演習問題 2.1 (b), (c)



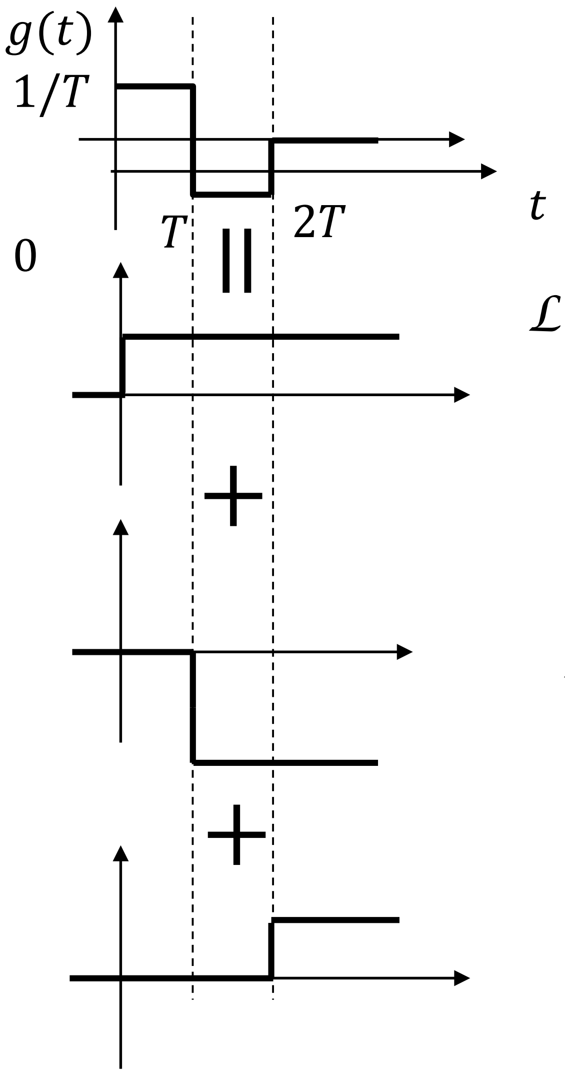
積分



ラプラス変換の性質（**L5**）

同一波形の繰返し ⇒ 先の結果を使う

演習問題 2.1 (b), (c)



まず $g(t)$ を単位ステップ関数を時間シフトしたものの和で表現

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{\mathcal{L}[1(t)]}{T}(1 - 2e^{-Ts} + e^{-2Ts}) = \frac{1}{Ts}(1 - e^{-Ts})^2$$

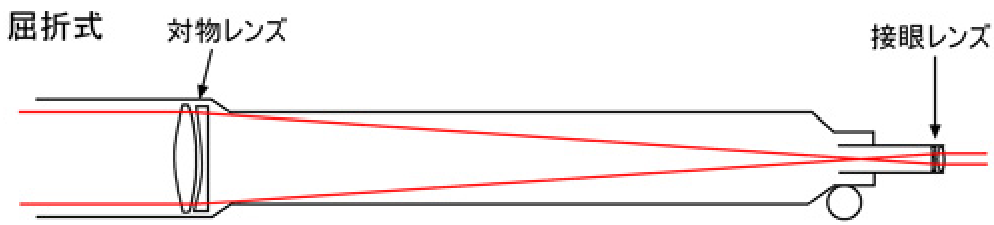
$g(t)$ を積分して周期 $2T$ で繰り返す

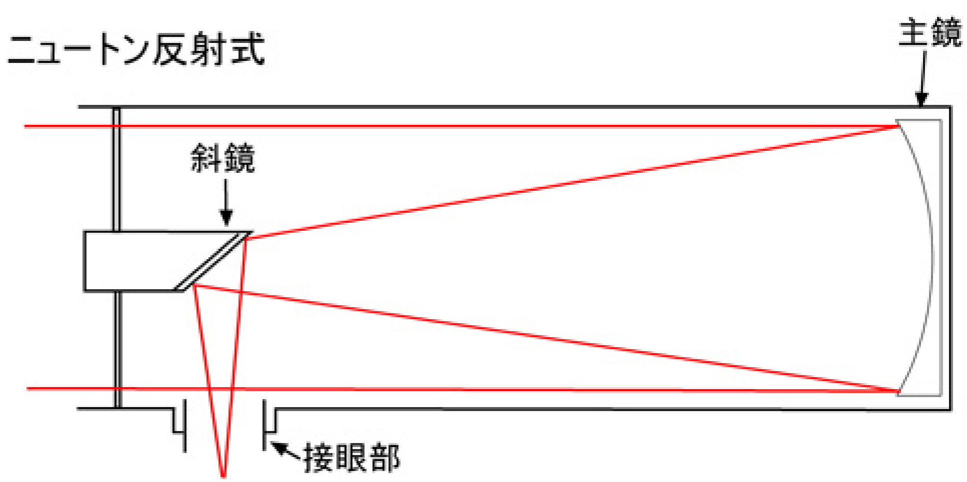
$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\mathcal{L}[g(t)]}{s}\frac{1}{1 - e^{-2Ts}} = \frac{1}{Ts^2}\frac{(1 - e^{-Ts})^2}{(1 - e^{-Ts})(1 + e^{-Ts})}$$

$$= \frac{1}{Ts^2}\frac{1 - e^{-Ts}}{1 + e^{-Ts}}$$

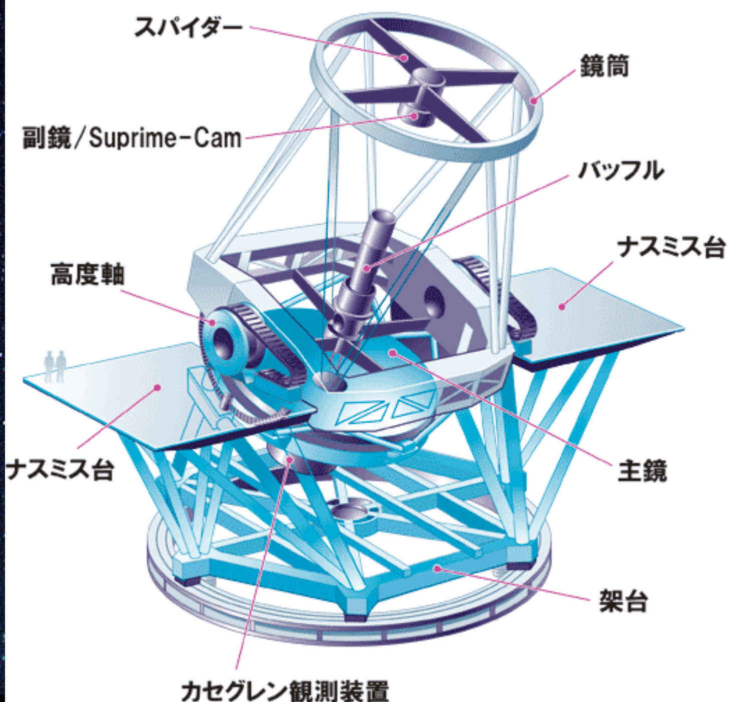
積分せず, 高さを $1/T$ に調節しなければ (c) になる.

Active Optics （能動光学）



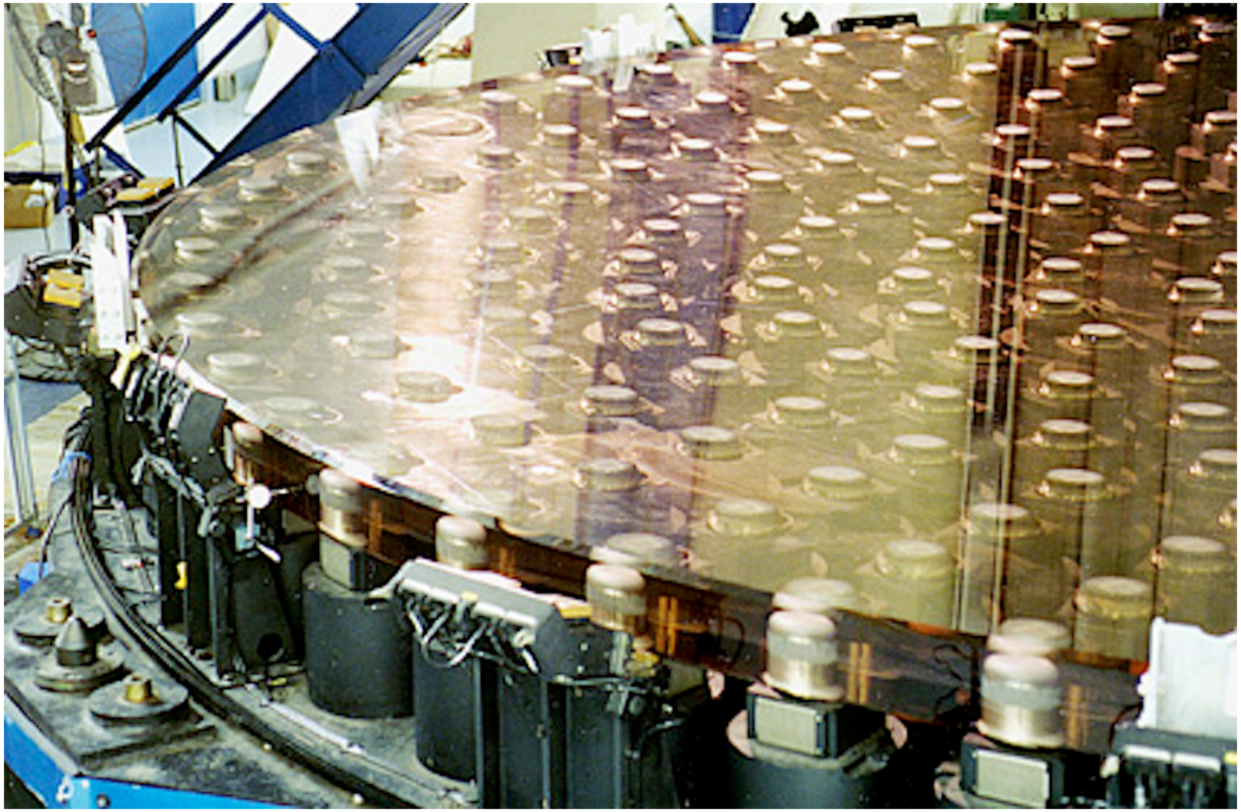


Active Optics

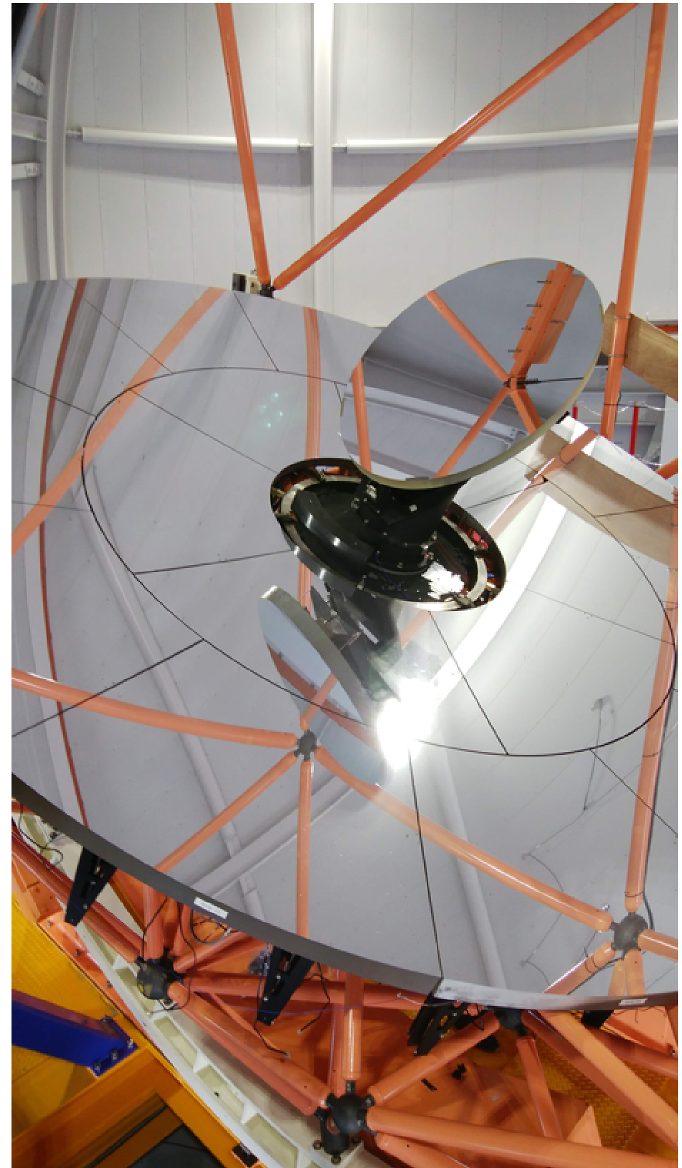


遠藤孝悦・画　日経サイエンス1996年2月号より
Illustration by Takaetsu Endo, taken from Nikkei Science 1996

Active Optics



Active Optics



ラプラス変換の性質

（**L2**）(a) t 領域推移 (時間遅れ)

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ であるとき　$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-Ts}F(s)$

（**L3**）s 領域推移　$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)] =?$

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ であるとき

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = \int_0^\infty f(t)e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)\,e^{-(s+a)t}\,dt = F(s+a)$$

ラプラス変換の性質

（**L4**）導関数のラプラス変換

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \qquad F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

$$\frac{d}{dt} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} ?$$

Use integral by parts（部分積分）

$$\frac{d}{dt}\{f(t)g(t)\} = \left(\frac{d}{dt} f(t)\right) g(t) + f(t) \left(\frac{d}{dt} g(t)\right)$$

$$f(t)g(t) = \int \frac{d}{dt}\{f(t)g(t)\}dt = \int \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)g(t)\,dt + \int f(t)\left(\frac{d}{dt}g(t)\right)dt$$

Let $g(t) = e^{-st}$

$$\int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)e^{-st}\,dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty - (-s)\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt - f(0) = sF(s) - f(0)$$

When $f(0) = 0$,

$$\boxed{\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt = sF(s)}$$

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt = sF(s) - f(0)$$

繰返し適用すると

$$\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}\,dt = s\mathcal{L}\left[f^{(n-1)}(t)\right] - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s\left(s\mathcal{L}\left[\, f^{(n-2)}(t)\right] - f^{(n-2)}(0)\right) \, - f^{(n-1)}(0)$$

$$\vdots$$

$$= s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f^{(0)}(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0)\cdots - f^{(n-1)}(0)$$

ラプラス変換の性質　（**L4**）高階導関数

ラプラス変換の性質　（**L5**）時間積分

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt = sF(s) - f(0)$$

Let　$g(t) := \int_0^t f(\tau)\,d\tau \,,\, g(0) = 0$

$$\int_0^\infty g'(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \;= F(s) = sG(s) - g(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\right)e^{-st}dt = G(s) = \frac{1}{s}F(s)}$$

演習問題 2.3

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathcal{L}[te^{\alpha t}] = \int_0^\infty te^{\alpha t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty te^{(\alpha-s)t}\,dt$$

$\alpha = 0$: ランプ関数
$f(t) = t, t > 0,$
$f(t) = 0, t < 0.$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{te^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\right\} = \frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s} + te^{(\alpha-s)t}$$

（部分積分）

$$\therefore\ \mathcal{L}[te^{\alpha t}] = \left[\frac{te^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\right]_0^\infty - \mathcal{L}\left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha - s}\right] = \frac{1}{s-\alpha}\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$$

（2重根）

cf. $\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \dfrac{1}{s-\alpha}$ （単根）

繰返し適用すると

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{t^n e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\right\} = \frac{nt^{n-1}e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s} + t^n e^{(\alpha-s)t}$$

$$\therefore \ \mathcal{L}[t^n e^{\alpha t}] = \left[\frac{t^n e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s}\right]_0^\infty - \mathcal{L}\left[\frac{nt^{n-1}e^{\alpha t}}{\alpha - s}\right]$$

$$= \frac{n}{s-\alpha}\mathcal{L}[t^{n-1}e^{\alpha t}] = \frac{n(n-1)}{(s-\alpha)^2}\mathcal{L}[t^{n-2}e^{\alpha t}]$$

$$= \cdots = \frac{n!}{(s-\alpha)^n}\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

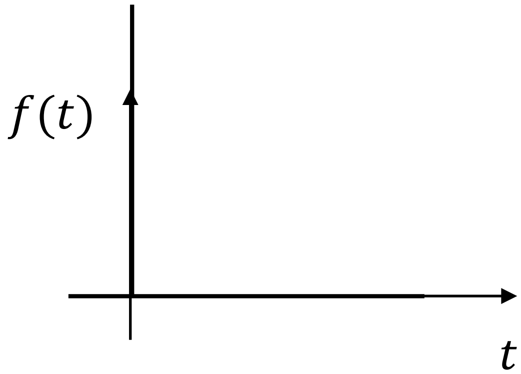
（$n+1$重根）

p.16 ラプラス変換表はほぼコンプリート

$$f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s)$$

ラプラス変換

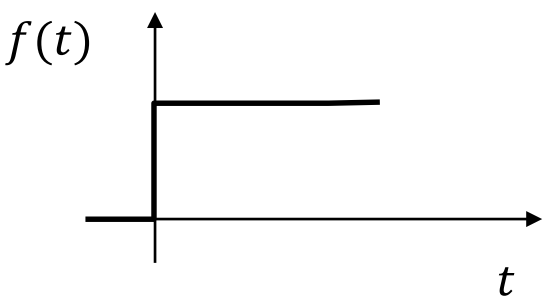
逆ラプラス変換



インパルス(impulse)関数

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

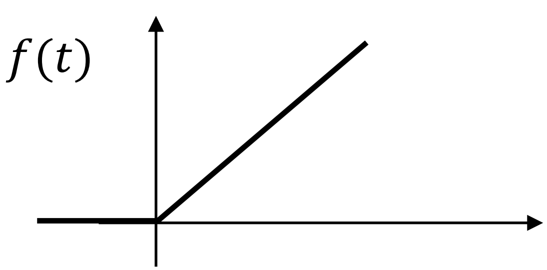
微分 ↑↓ 積分 $\qquad \times s$ ↑↓ $\times 1/s$



単位ステップ(step)関数

$$1(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

微分 ↑↓ 積分 $\qquad \times s$ ↑↓ $\times 1/s$



ランプ(ramp)関数

$$f(t) = \begin{cases} t, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}$$

ラプラス変換の最終値定理　Final Value Theorem

$f(t)$: 区間$[0, T]$で可積分, $f(\infty)$ が存在するとき,

$$\lim_{s \to 0} sF(s) = f(\infty), s \in \mathbb{R}$$

が成り立つ.

直観的には

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt = sF(s) - f(0)$$

より, $s \to 0$ とすると左辺は

$$\int_0^\infty f'(t)\,dt = f(\infty) - f(0)$$

なので

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty), s \in \mathbb{R}$$

が成り立ちそうである. (実際, 精密な議論を経ても, そうなる)

Advanced

$g(t) = \big(f(t) - f(\infty)\big)1(t)$ $1(t)$: Step Function

$$sG(s) = s\left(F(s) - \frac{f(\infty)}{s}\right) = s\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$

$$= s\int_0^T g(t)e^{-st}dt + s\int_T^\infty g(t)e^{-st}dt$$

区間を有限区間と
無限区間に分ける

$g(t) \to 0$ なので t を大きくすれば$|g(t)|$をいくらでも小さくできる

$\forall\epsilon > 0, \exists T, \mathrm{s.t.}\ |g(t)| < \epsilon, t > T$

$s > 0$

$$\left|s\int_T^\infty g(t)e^{-st}dt\right| < \epsilon\int_T^\infty se^{-st}dt = \epsilon e^{-sT} \to 0, (s \to 0)$$

Advanced

$g(t) \to 0$ なので t を大きくすれば$|g(t)|$をいくらでも小さくできる

$\forall \epsilon > 0, \exists T, \mathrm{s.t.}\ |g(t)| < \epsilon,\ t > T$
$s > 0$

∀: for all, 任意の〇〇に対して

∃: exists, 〇〇が存在して

$\mathrm{s.t.}$: such that, 〇〇となるような

任意の正の数 ϵ に対して, $t > T$ において常に $|g(t)| < \epsilon$ となるような時刻 T が存在するので, $s > 0$ に対して次式が成り立つ.

$$\left| s \int_T^{\infty} g(t) e^{-st} dt \right| < \epsilon \int_T^{\infty} s e^{-st} dt = \epsilon e^{-sT} \to 0, (s \to 0)$$

Advanced

$$s > 0, \quad 0 < e^{-st} \le 1 \qquad\qquad g(t) = \big(f(t) - f(\infty)\big)1(t)$$

$$\left| s\int_0^T g(t)e^{-st}dt \right| \le s\int_0^T |g(t)|e^{-st}dt$$

$$\le s\int_0^T (|f(t)| + |f(\infty)|)dt \to 0, (s \to 0)$$

$$sG(s) \quad = s\int_0^T g(t)e^{-st}dt + s\int_T^\infty g(t)e^{-st}dt \to 0, (s \to 0)$$

$$sG(s) = s\left(F(s) - \frac{f(\infty)}{s}\right) \to 0$$

$$\boxed{sF(s) \to f(\infty), (s \to 0)}$$

(前回スライドより)

ラプラス変換は何の役にたつの？

➡ もちろん制御理論で．他にも微分方程式の解法として習った「演算子法」の理論的裏付けを与えます．

演算子法（記号的解法）

微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0, y(0) = c_1, \frac{dy}{dt}(0) = c_2$

が与えられたとき?

演算子法（記号的解法）

微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y + 2\left(\frac{d}{dt}\right)y - 3y = 0, y(0) = c_1, \frac{dy}{dt}(0) = c_2$

が与えられたとき,

1) 微分演算子を Δ とおけ.
2) 与式は $(\Delta^2 + 2\Delta - 3)y = 0$ であるので, $\Delta^2 + 2\Delta - 3 = 0$ を Δ について解け.
3) $\Delta^2 + 2\Delta - 3 = (\Delta + 3)(\Delta - 1)$ より $\Delta = -3, 1.$
4) 解を $y(\mathrm{t}) = \alpha_1 e^{-3t} + \alpha_2 e^t$ とおき, 定数を初期条件より定めよ.

理由は聞いてはいけません

I do not refuse my dinner simply because I do not understand the process of digestion.

Oliver Heaviside

To Do (今回)

1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする.)
2) 復習
3) 教科書 3.1～3.3 を読む.
4) 演習問題2.7, 2.8を解いてくる. 答えだけはNG.当てられたときに説明ができるように.