システム制御 I

4学期
月 5, 6限　14:00-16:10
木 3, 4限　11:00-13:10
5号館 第15講義室 (システムコース)

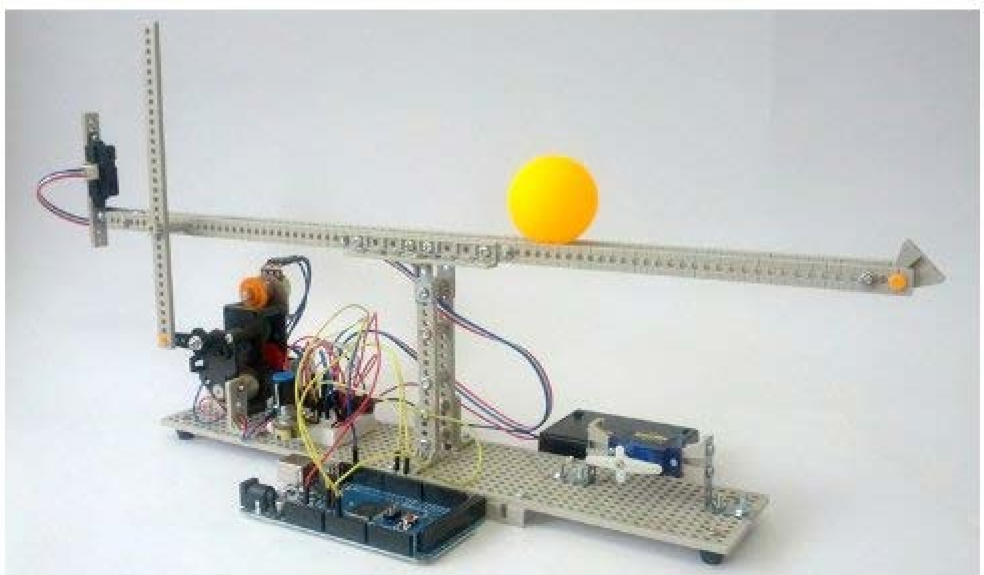
担当:平田 健太郎

12/5 第2回

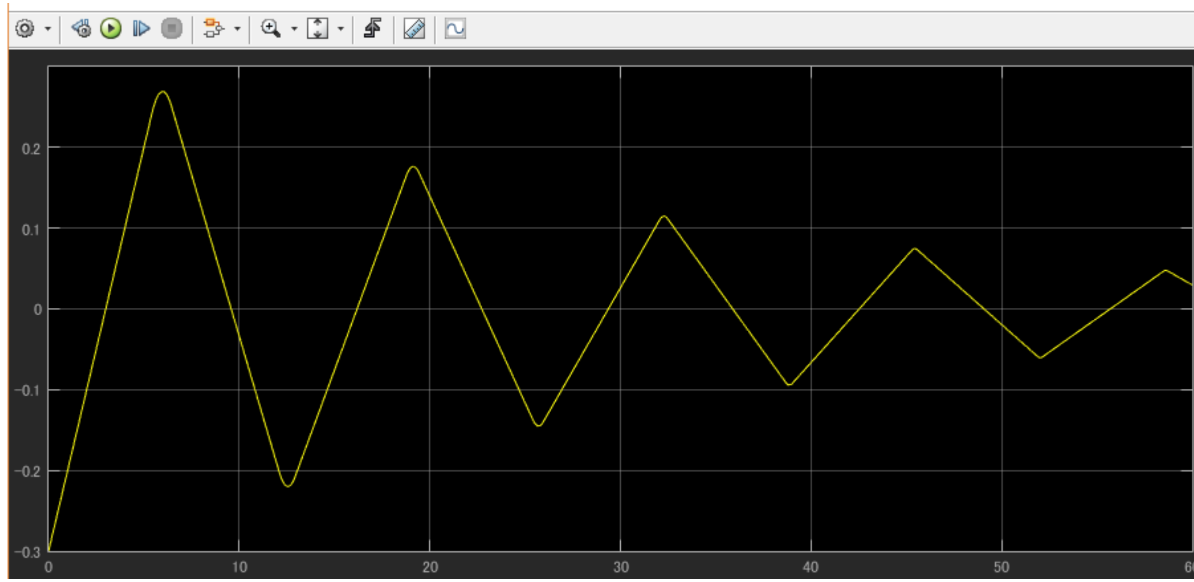
ラプラス変換 (1)

前回の続き

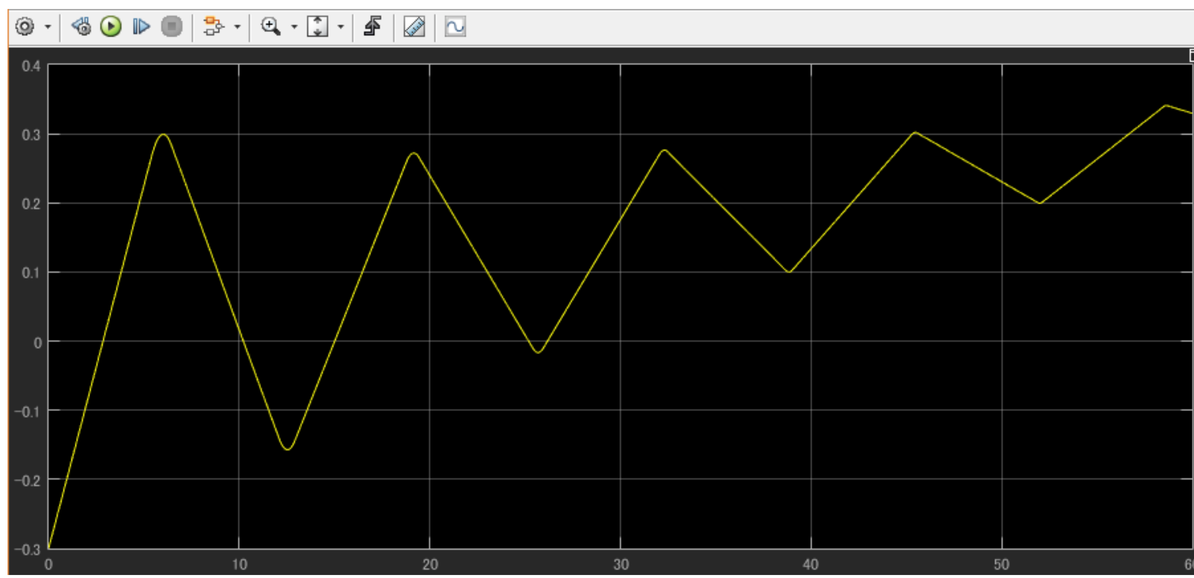
Ball & Beam で, ボールの軌道を予め計算し,
レールの傾け方を決定すると?



初期速度 v_1: 設定どおり



初期速度 v_1: 誤差+5%



被制御量 $x(t)$ (ボール位置)

手動で制御する場合, 我々はボールの位置･速度を
目視によって時々刻々, 観測しながら, 適切と思われる
対応をしており, 予めオフラインで求めた動作を
プレイバックしているのではない.

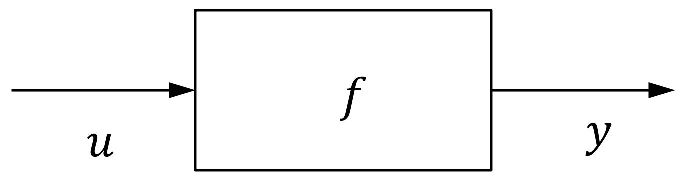
Feedback Control

演習問題

1.1　自動車を運転する場合の信号伝達のブロック線図を描き, 標準的フィードバック制御系との対応を示せ.

ブロック線図（Block Diagram）

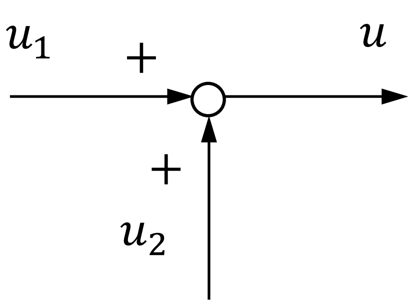
線は物理量・信号，矢印はその方向，四角 (Block) はそれらの信号等を処理するもの(システム)を表す.



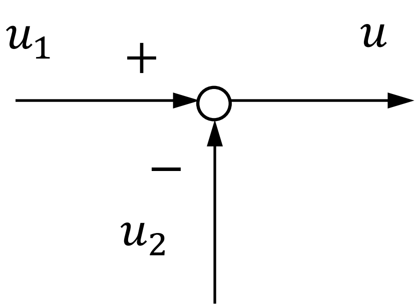
$$y = f(u)$$

$$y = fu$$

システムの入出力

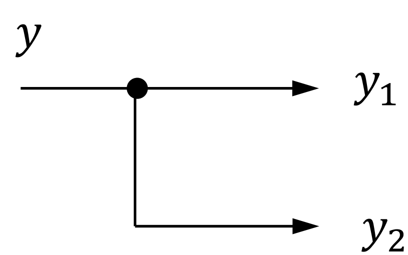


$$u = u_1 + u_2$$



$$u = u_1 - u_2$$

信号の加え合わせ (符号つき)



$$y = y_1 = y_2$$

信号の分岐

ラプラス変換 (1)

多くの学生にとっては,
「ラプラス変換を学ぶ」と
いうことは,「ラプラス変
換表を覚える」ことに尽
きると思われる.

したがってここでは「そこ
に至るまで」の話をしよう.

t関数　$f(t)$	s関数　$F(s)$	t関数　$f(t)$	s関数　$F(s)$
1, $u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
a	$\frac{a}{s}$　(aは定数)	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$　$(n=1,2,\cdots)$	$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
t^p	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$　$(p>0)$	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\sin(\omega t+\theta)$	$\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^n}$	$\cos(\omega t+\theta)$	$\frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$

フーリエ級数

⬆

フーリエ変換

⬆

ラプラス変換

Q. ある時間関数 $h(t)$ が与えられているとき,
そのラプラス変換はどう定義されますか？

A. $$h(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st}\,dt$$

これをどう解釈したらよいか？

ラプラス変換は実関数を複素関数に対応づける

$$h(s) = \int_0^\infty h(t) e^{-st}\, dt$$

$h(t)$: 実関数（引数 t も, その値も実数）, 時間関数

$h(s)$: 複素関数（引数 s も, その値も複素数）,（周波数関数）

$$s = \sigma + j\omega,\ s \in \mathbb{C},\ \sigma,\ \omega \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$: すべての実数 (real number) の集合

$\mathbb{C}$: すべての複素数 (complex number) の集合

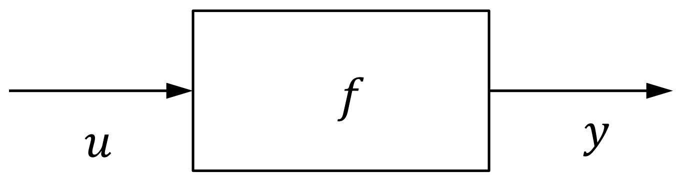
σ: 実部（real part)　ω: 虚部 (imaginary part)

j: 虚数単位 (imaginary unit) $j = \sqrt{-1}$

ラプラス変換は実関数を複素関数に対応づける

なぜ？

答：　信号を離れて,「システム」を表現したいから



微分方程式では「システム」と「入出力」の分離は困難

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), y(t) = x(t)$$

$x(0)$ と $f(t)$ を与えて, $y(t)$ を解く.

$$h(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st}\,dt$$

もう少し別の理解の仕方は？

➡ フーリエ級数, フーリエ変換に遡ると
よく分かります.

(今回)

何の役にたつの？

➡ もちろん制御理論で． 他にも微分方程式
の解法として習った(はず)の「演算子法」
の理論的裏付けを与えます.

(次回)

フーリエ変換

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\, dt \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega$$

時間 t の関数を周波数 ω の関数に対応づける

時間関数に含まれる周波数成分を取り出す

$$h(s) = \int_{*}^{\infty} h(t)e^{-st}\, dt$$

複素数 s は実部と虚部を持つ.

$$\Rightarrow \quad s = \sigma + j\omega,\ \ s \in \mathbb{C},\ \ \sigma,\ \ \omega \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-st} = e^{-(\sigma + j\omega)t} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad h(t)e^{-st} = e^{-\sigma t} h(t)\ e^{-j\omega t}$$

$\sigma = 0$ という特別な場合を考えると

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

フーリエ変換からラプラス変換へ

フーリエ変換

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

（片側）ラプラス変換

$$h(s) = \int_{0}^{\infty} h(t) e^{-st}\, dt \qquad h(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} h(s) e^{st}\, ds$$

“$e^{-j\omega t}$ が e^{-st} に変更されたものと見ることができる”

フーリエ変換からラプラス変換へ

Advanced

フーリエ変換 $\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt$

係数が有限でないといけないが, 無限区間の積分なので条件が課される.

$$\left|\hat{h}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t) e^{-j\omega t}\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt$$

$\left|h(t) e^{-j\omega t}\right| = |h(t)|$ を用いた.

関数 $h(t)$ in $[-\infty, \infty]$が $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ ならば $\hat{h}(\omega)$ は発散しない.

絶対可積分

フーリエ変換の前提条件として $h(t)$ の絶対可積分性が求められる.

時間的に増大する関数を扱えない.

Advanced

ラプラス変換

$$s = \sigma + j\omega$$

$$h(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st}\, dt$$

$$e^{-st} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$$

$$|h(t) e^{-st}| = e^{-\sigma t} |h(t)|$$

$t \to \infty$ のときに増大する関数でも減衰因子 $e^{-\sigma t}, \sigma > 0$ をつけることで可積分に.

$|h(t)| < M e^{at}, a\text{: const. } M > 0$ となるような関数ならば, ラプラス変換可能

（指数型関数）

↓

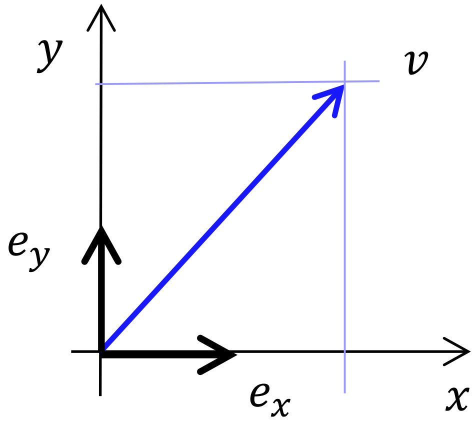
$e^{-j\omega t}$ が e^{-st} に変更されたことによって

時間とともに増大する関数にも適用可能に

フーリエ変換とフーリエ級数の関係

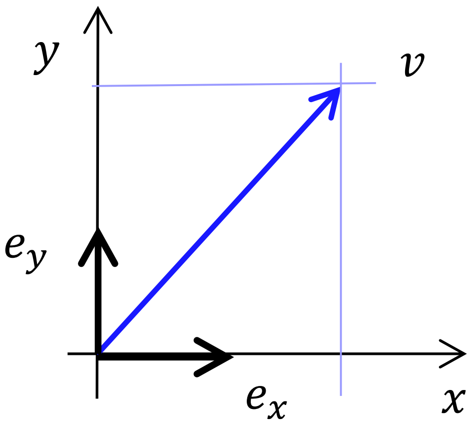
前回の説明から, フーリエ級数は周期関数を基本的な周期信号成分(sin, cos)に分解して表現するものでした.

Q. 座標空間のベクトルの“成分”を求める, あるいは
“成分”を取り出すにはどうすればよいか？



例えば, 2次元空間において, ベクトル v の x, y 成分を求めるには？

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ のように成分表示されていたら, 1 や 2 を取り出すだけなので
ベクトル v に対する操作で考えること.

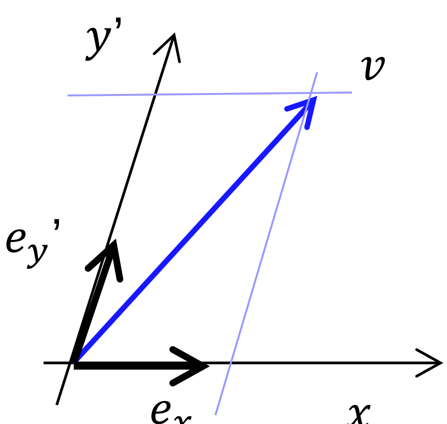


例えば, 2次元空間においては, 任意のベクトルをx, y方向の正規直交基底を使って(座標)表現できる.

$v = xe_x + ye_y$　　(e_x, e_y): 正規直交基底　　(c_x, c_y): 座標

$$\langle v, e_x \rangle = e_x^T v = e_x^T(c_x e_x + c_y e_y) = c_x\langle e_x, e_x \rangle + c_y\langle e_y, e_x \rangle = c_x$$

座標成分は, そのベクトルと基底の内積から求まる.



斜交座標系でも, 基本ベクトルの線形結合で任意のベクトルを表現できるが, 例えば x 方向の座標を求めるには, e_y' に平行な直線を引かねばならず, v と e_x だけからもとめることができない.

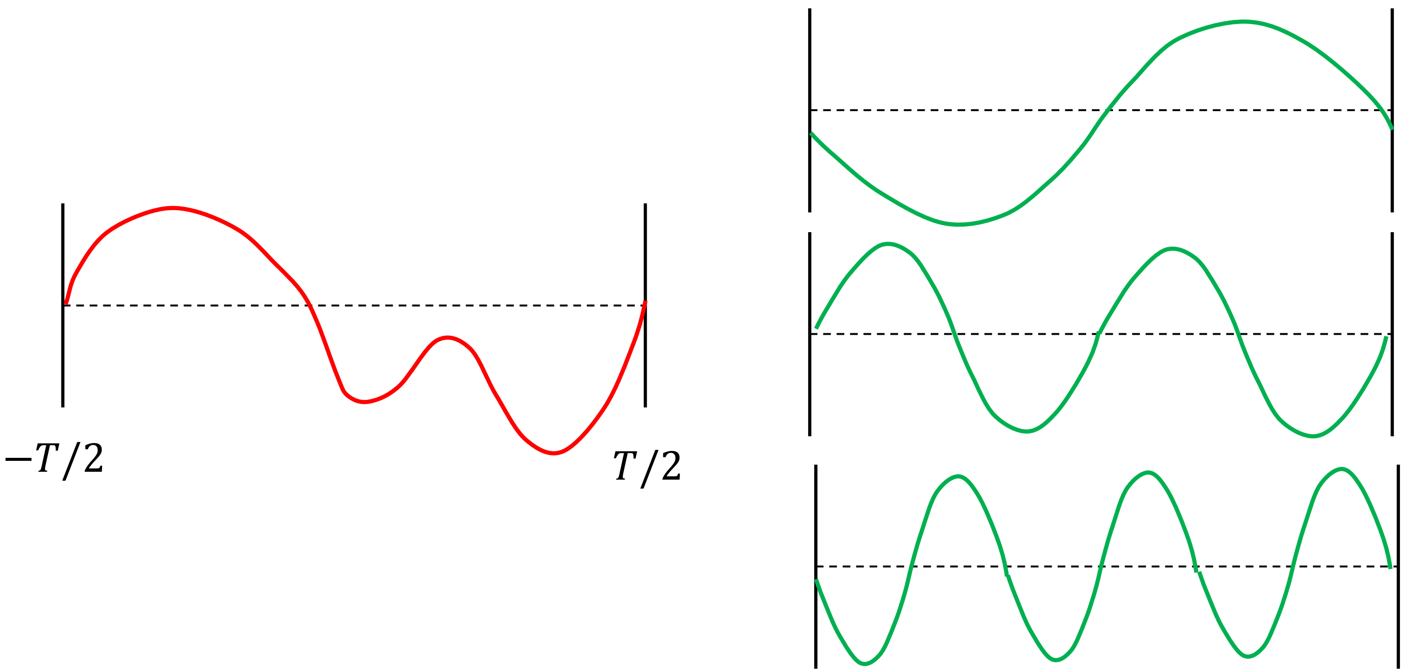
ベクトルの内積

Ex. $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ➡ $\langle p, q \rangle =$

$$p = \begin{bmatrix} 1 + j \\ 2 + 3j \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 1 - j \\ 1 + 2j \end{bmatrix}$$

➡ $\langle p, q \rangle =$

フーリエ級数展開: 区間$[-T/2, T/2]$の周期関数を, 各周波数のsin, cosの和に分解する



$$\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)2t$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)3t$$

Euler's formula $\quad e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$

→ 三角関数の(簡略)複素表示

区間$[-\mathrm{T}/2, T/2]$の周期関数を分解する

複素正弦関数 $\{e^{j\omega_k t}\}, \omega_k = \frac{2\pi k}{T}, k = 0,1,\cdots$ は正規直交系をなす.

$$\langle e^{j\omega_k t}, e^{j\omega_\ell t} \rangle =$$

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g^*(t) f(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{g(t)} f(t)\, dt$$

区間$[-\mathrm{T}/2, T/2]$の周期関数を分解する

フーリエ級数展開:

係数

正規直交基底

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, e^{j\omega_k t}$$

区間$[-T/2, T/2]$の周期関数 $h(t)$ を, 各周波数の複素正弦波の和に分解する

$$\alpha_k = \langle h(t), e^{j\omega_k t} \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt$$

係数は基底と元の関数との内積から求まる

内積計算において
複素共役(転置)
とるため $e^{-j\omega_k t}$になる

Advanced

複素係数の場合と実係数の場合の対応

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, e^{j\omega_k t} = \alpha_0 \, e^{j0t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_{-k} \, e^{-j\omega_k t} + \alpha_k \, e^{j\omega_k t}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t)$$

$$a_k = \alpha_{-k} + \alpha_k = 2\,\mathrm{Re}(\alpha_k) \qquad \because h(t) \in \mathcal{R} \rightarrow \alpha_k = \overline{(\alpha_{-k})}$$

$$b_k = -(-\alpha_{-k} + \alpha_k) = 2\,\mathrm{Im}(\alpha_k)$$

Advanced

$$a_k = \alpha_{-k} + \alpha_k = 2\,\mathrm{Re}(\alpha_k)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{j\omega_k t}\, dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t) \cos \omega_k\, t\, dt$$

$T = 2\pi$ とするとこれは

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos nt\, dt$$

に等しい. よって実係数の場合の a_k, b_k の定義と整合している.

フーリエ級数の応用: 熱方程式の初期境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < L, t > 0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L$$

変数分離法

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$\Rightarrow \quad F(x)G'(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

両辺とも t, x に依存しない
定数でなければならない.

$$\frac{G'(t)}{c^2G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

$k \geq 0 \rightarrow u(x,t) = 0$ となり不適（省略）　$k < 0$ のとき, $k = -\lambda^2, \lambda > 0$ とおく.

$$G'(t) = -\lambda^2 c^2 G(t), \qquad F''(x) = -\lambda^2 F(x)$$

$$G(t) = Ce^{-\lambda^2 c^2 t}, \qquad F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$C = 0 \rightarrow G \equiv 0 \rightarrow u \equiv 0$ より $C \neq 0$

すると境界条件から　$F(0) = A = 0, \quad F(L) = B\sin\lambda L = 0$

$B = 0 \rightarrow F \equiv 0 \rightarrow u \equiv 0$ より $B \neq 0$

よって $\sin\lambda L = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{n\pi}{L}, \qquad (n = 1,2,\cdots)$

$\lambda = \dfrac{n\pi}{L}$ に対する F, G を F_n, G_n とする.

$$F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad G_n(t) = C_n\, e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}$$

$$u_n(x,t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}, D_n = B_nC_n$$

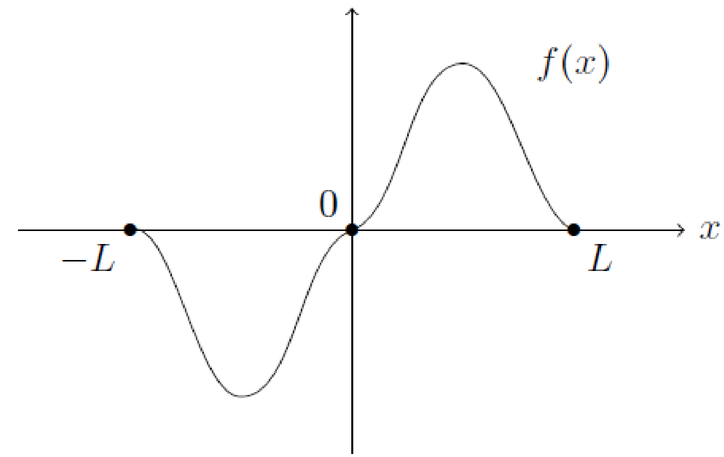
は熱方程式と境界条件を満たす．重ね合わせより

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}$$

は解となる. 初期条件より

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

$f(x)$ が奇関数となるよう拡張し，再度 f とする.



$f(x)$ のフーリエ級数展開は

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy$$

よって $D_n=b_n$ とすれば初期条件を満足する. 以上より解は

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}$$

フーリエ級数からフーリエ変換へ

フーリエ変換
（Fourier Transform）

逆フーリエ変換
(Inverse Fourier Transform)

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{h}(\omega)$$

$$\hat{h}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t)$$

フーリエ級数

$$\alpha_k = \langle h(t), e^{j\omega_k t} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{j\omega_k t}$$

フーリエ級数からフーリエ変換へ

フーリエ級数の対象は周期 T の周期関数

➡ これを任意の関数に拡大したい $T \to \infty$

➡ これに伴って周波数 $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{T}, k = 1, 2, \cdots$ の間隔が無限に小さくなる

➡ 係数が周波数 ω の連続関数になる

フーリエ級数からフーリエ変換へ

Advanced

フーリエ級数（$T \to \infty$ のとき）

$$h(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt \right) e^{j\omega_k t}$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T},\ \Delta\omega := \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Delta\omega \to 0\ (T \to \infty)$$

(離散的な周波数が連続になる)

$$h(t) = \lim_{T\to\infty} \lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt \right) e^{j\omega_k t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt \right) e^{j\omega_k t}\ \ \Delta\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \lim_{\Delta\omega\to \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega_k)\Delta\omega$$

$$H(\omega_k) := \left(\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt \right) e^{j\omega_k t}$$

Advanced

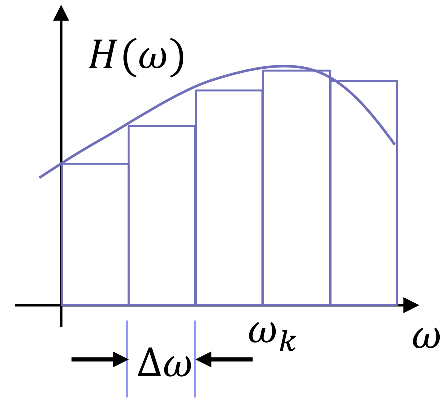
$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega_k)\Delta\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right)}_{=\hat{h}(\omega)} e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\begin{cases} h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \\ \hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt \end{cases}$$

$$H(\omega_k) = \left(\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt\right) e^{j\omega_k t}$$

$$H(\omega) = \left(\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right) e^{j\omega t}$$



積分を矩形近似し, $\Delta\omega \to 0$

To Do (今回)

1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする.)
2) 復習
3) 教科書 2.4～2.7 を読む.
4) 演習問題2.1, 2.2 を解いてくる. 答えだけはNG.
当てられたときに説明ができるように.