システム制御 I

4学期
月 5, 6限　14:00-16:10
木 3, 4限　11:00-13:10
5号館 第15講義室 (システムコース)

担当:平田 健太郎

12/5 第2回

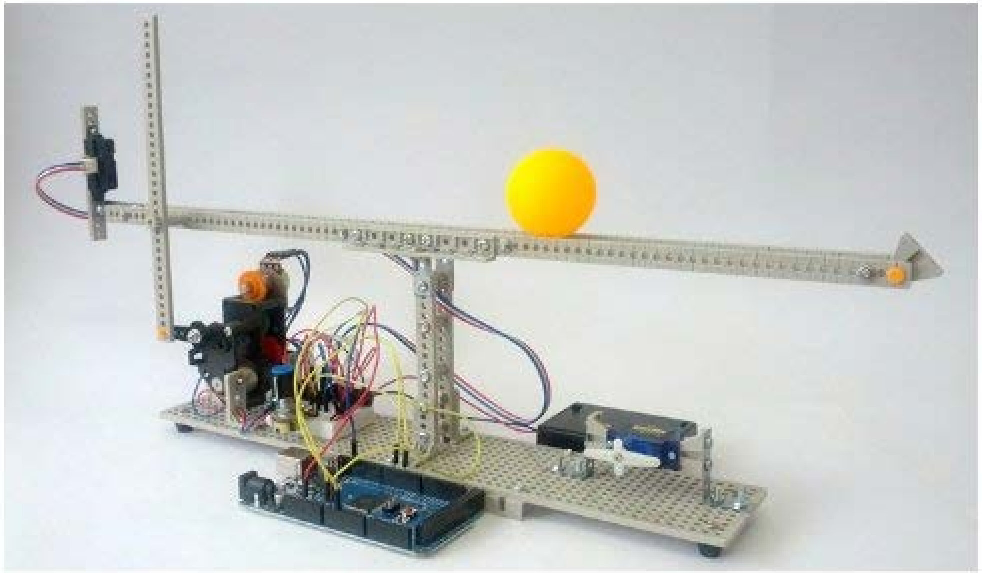
ラプラス変換 (1)

Schedule

1. 12/2 (today)
2. 12/5
3. 12/9
4. 12/12
5. 12/16
6. 12/19
7. 12/23
8. 1/6
9. 1/9 中間試験
10. 1/16
11. 1/20
12. 1/23
13. 1/27
14. 1/30
15. 2/3
16. 2/6 期末試験

前回の続き

Ball & Beam を力技で安定化するとどうなるか.

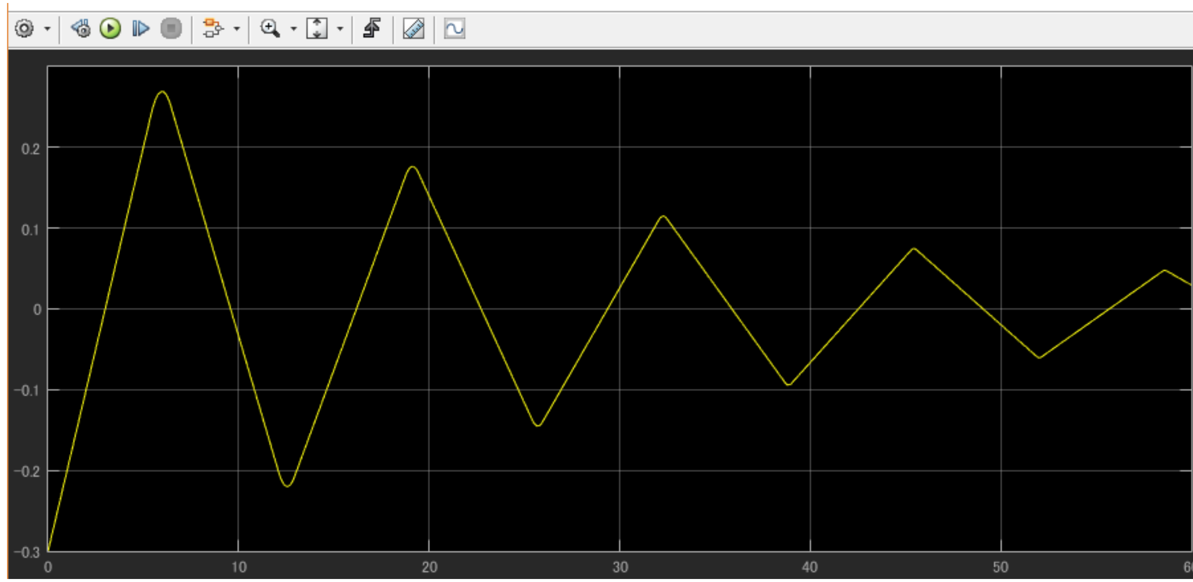


この戦略では

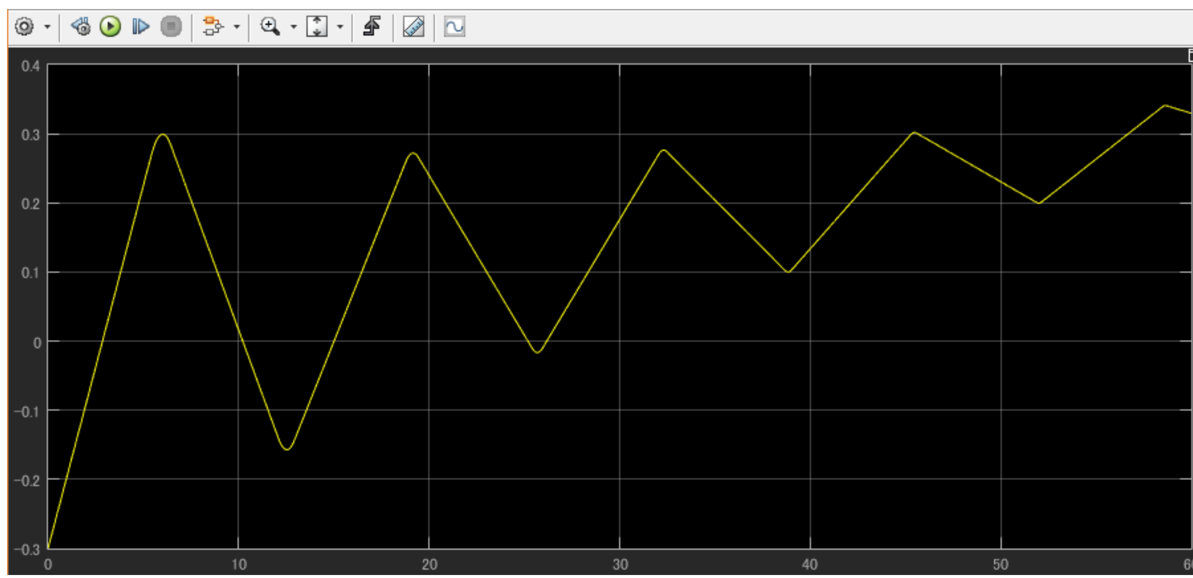
- 全ての操作を事前にオフラインで求めておかなければならない.
- 初期条件が変わると再計算が必要.
- 摩擦等のわずかな変化を許容できるか？

これでよいか？

初期速度 v_1： 設定どおり



初期速度 v_1： 誤差+5%



被制御量 $x(t)$ (ボール位置)

手動で制御する場合, 我々はボールの位置･速度を目視によって時々刻々, 観測しながら, 適切と思われる対応をしており, 予めオフラインで求めた動作をプレイバックしているのではない.

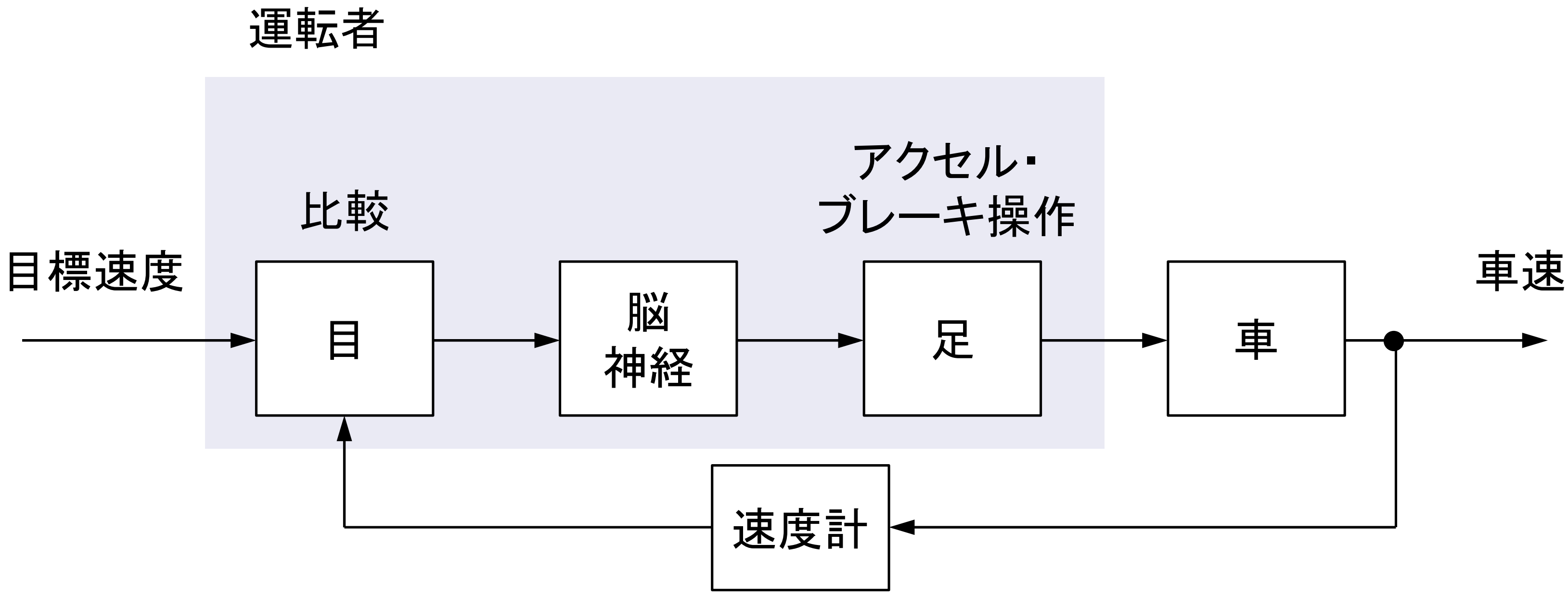
Feedback Control

To Do (前回)

1） Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする.
2） 教科書を購入する.
3） 1. 序論, 2.1～2.3 を読む.

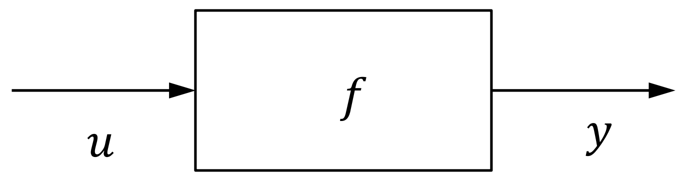
演習問題

1.1　自動車を運転する場合の信号伝達のブロック線図を描き，標準的フィードバック制御系との対応を示せ．



ブロック線図（Block Diagram）

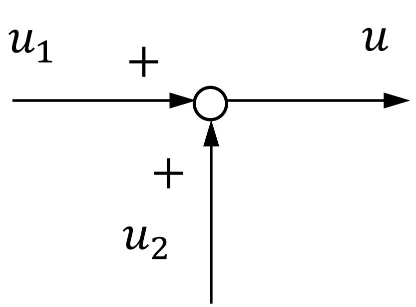
線は物理量・信号，矢印はその方向，四角 (Block) はそれらの信号等を処理するもの(システム)を表す．



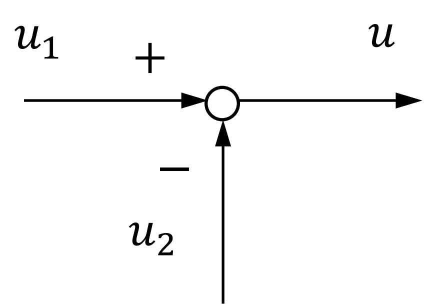
$y = f(u)$

$y = fu$

システムの入出力

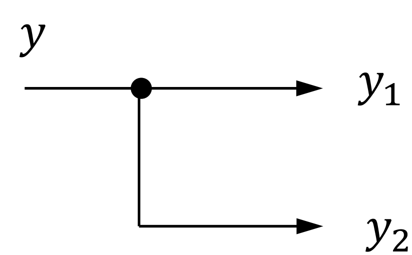


$u = u_1 + u_2$



$u = u_1 - u_2$

信号の加え合わせ (符号つき)



$y = y_1 = y_2$

信号の分岐

ラプラス変換 (1)

多くの学生にとっては,「ラプラス変換を学ぶ」ということは,「ラプラス変換表を覚える」ことに尽きると思われる.

したがってここでは「そこに至るまで」の話をしよう.

t関数 $f(t)$	s関数 $F(s)$	t関数 $f(t)$	s関数 $F(s)$
1, $u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
a	$\frac{a}{s}$ (aは定数)	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(n=1,2,\cdots)$	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
t^p	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$ $(p>0)$	$t\sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$t\cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\sin(\omega t+\theta)$	$\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^n}$	$\cos(\omega t+\theta)$	$\frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$

フーリエ級数

↑

フーリエ変換

↑

ラプラス変換

Q. ある時間関数 $h(t)$ が与えられているとき,
そのラプラス変換はどう定義されますか？

A. $$h(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st}\, dt$$

これをどう解釈したらよいか？

ラプラス変換は実関数を複素関数に対応づける

$$h(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st}\, dt$$

$h(t)$: 実関数 （引数 t も, その値も実数）, 時間関数

$h(s)$: 複素関数 （引数 s も, その値も複素数）, （周波数関数）

$$s = \sigma + j\omega,\ \ s \in \mathbb{C},\ \ \sigma,\ \ \omega \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$: すべての実数 (real number) の集合

$\mathbb{C}$: すべての複素数 (complex number) の集合

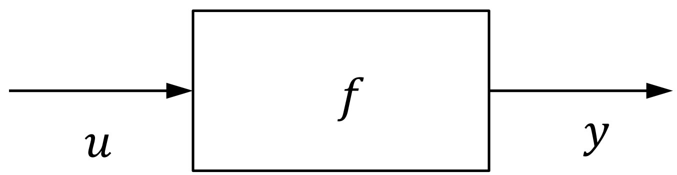
σ: 実部（real part）　ω: 虚部 (imaginary part)

j: 虚数単位 (imaginary unit) $j = \sqrt{-1}$

ラプラス変換は実関数を複素関数に対応づける

なぜ？

答：　信号を離れて,「システム」を表現したいから



微分方程式では「システム」と「入出力」の分離は困難

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), y(t) = x(t)$$

$x(0)$ と $f(t)$ を与えて, $y(t)$ を解く.

$$h(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st}\,dt$$

もう少し別の理解の仕方は？

➡ フーリエ級数, フーリエ変換に遡ると
よく分かります.

(今回)

何の役にたつの？

➡ もちろん制御理論で. 他にも微分方程式
の解法として習った(はず)の「演算子法」
の理論的裏付けを与えます.

(次回)

フーリエ変換

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

時間 t の関数を周波数 ω の関数に対応づける

時間関数に含まれる周波数成分を取り出す

$$h(s) = \int_{*}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt$$

複素数 s は実部と虚部を持つ.

$\Rightarrow$ $s = \sigma + j\omega,\ \ s \in \mathbb{C},\ \ \sigma,\ \ \omega \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $e^{-st} = e^{-(\sigma+j\omega)t} = e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}$

$\Rightarrow$ $h(t)e^{-st} = e^{-\sigma t}h(t)\ e^{-j\omega t}$

$\sigma = 0$ という特別な場合を考えると

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

フーリエ変換からラプラス変換へ

フーリエ変換

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

（片側）ラプラス変換

$$h(s) = \int_{0}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt \qquad h(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} h(s)e^{st}\,ds$$

“$e^{-j\omega t}$ が e^{-st} に変更されたものと見ることができる”

フーリエ変換からラプラス変換へ

Advanced

フーリエ変換 $\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt$

係数が有限でないといけないが, 無限区間の積分なので条件が課される.

$$\left|\hat{h}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t) e^{-j\omega t}\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt$$

$\left|h(t)e^{-j\omega t}\right| = |h(t)|$ を用いた.

関数 $h(t)$ in $[-\infty, \infty]$が $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ ならば $\hat{h}(\omega)$ は発散しない.

絶対可積分

フーリエ変換の前提条件として $h(t)$ の絶対可積分性が求められる.

時間的に増大する関数を扱えない.

Advanced

ラプラス変換

$$s = \sigma + j\omega$$

$$h(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st}\,dt$$

$$e^{-st} = e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}$$

$$|h(t)e^{-st}| = e^{-\sigma t}|h(t)|$$

$t \to \infty$ のときに増大する関数でも減衰因子 $e^{-\sigma t}, \sigma > 0$
をつけることで可積分に.

$|h(t)| < Me^{at}, a\text{: const. } M > 0$ となるような関数ならば, ラプラス変換可能

（指数型関数）

↓

$e^{-j\omega t}$ が e^{-st} に変更されたことによって

時間とともに増大する関数にも適用可能に

Question

What was a major social change at the end of the 18th century?

Question

What was a major social change at the end of the 18th century?

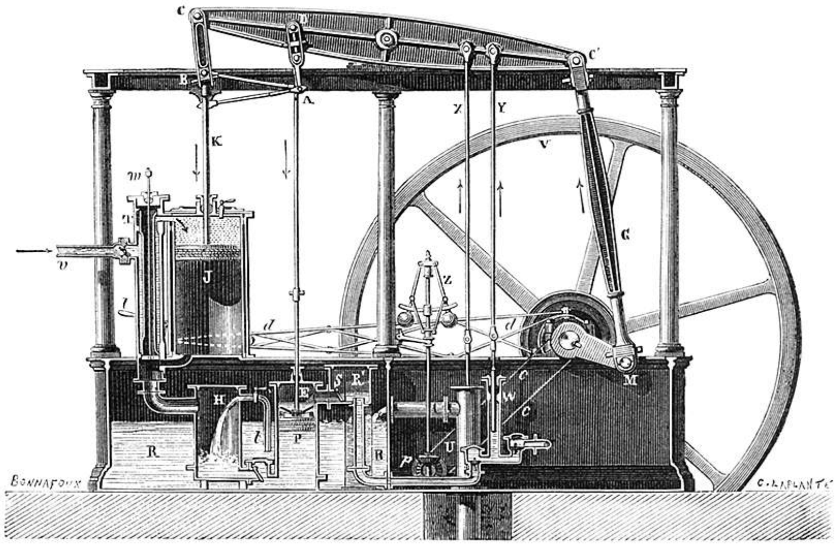


Fig. 59. — Machine à balancier de Watt.

v. Tuyau de prise de vapeur; T, tiroir; J, cylindre; H, condenseur; PE pompe d'épuisement; WY pompe alimentaire de la chaudière UX pompe d'alimentation de la bâche R; *p* Z régulateur; *dd* excentrique; ABCD parallélogramme; GM bielle et manivelle; V volant.

The Origin of Control Theory

ON GOVERNORS

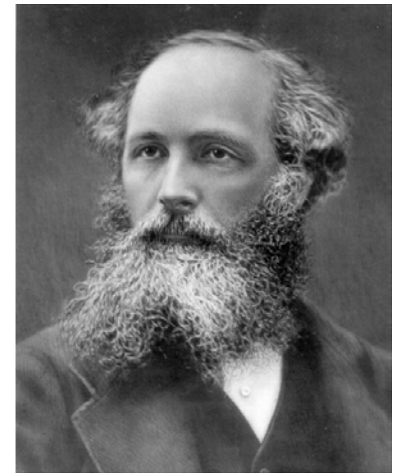
J.C. MAXWELL

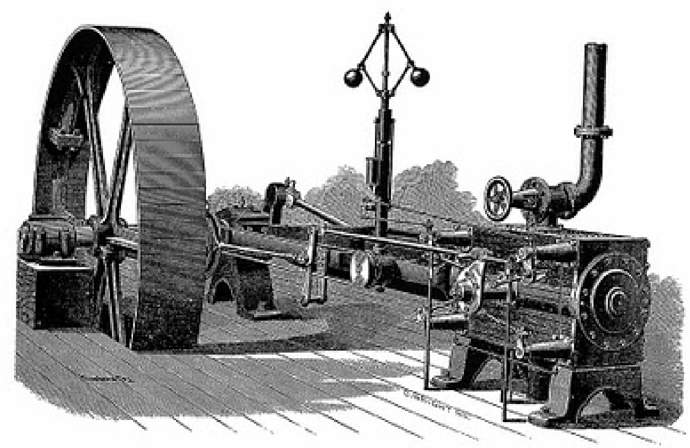
From the Proceedings of the Royal Society*, No.100, 1868.*

A GOVERNOR is a part of a machine by means of which the velocity of the machine is kept nearly uniform, notwithstanding variations in the driving-power or the resistance.

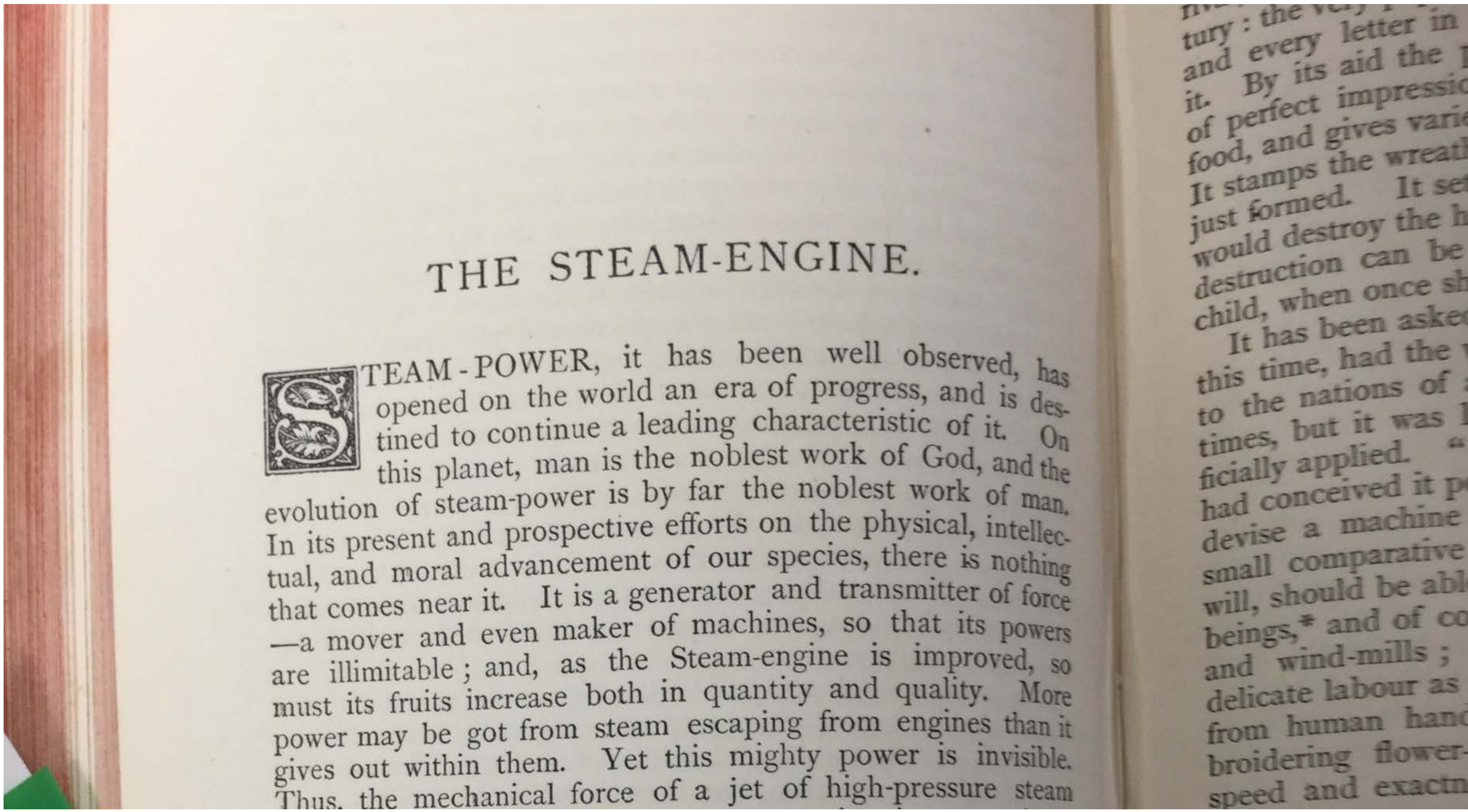
Most governors depend on the centrifugal force of a piece connected with a shaft of the machine. When the velocity increases, this force increases, and either increases the pressure of the piece against a surface or moves the piece, and so acts on a break or a valve.

In one class of regulators of machinery, which we may call *moderat*
resistance is increased by a quantity depending on the velocity. Thus
pieces of clockwork the moderator consists of a conical pendulum revolvin
a circular case. When the velocity increases, the ball of the pendulum
against the inside of the case, and the friction checks the increase of veloc





Wonderful Inventions by John Timbs

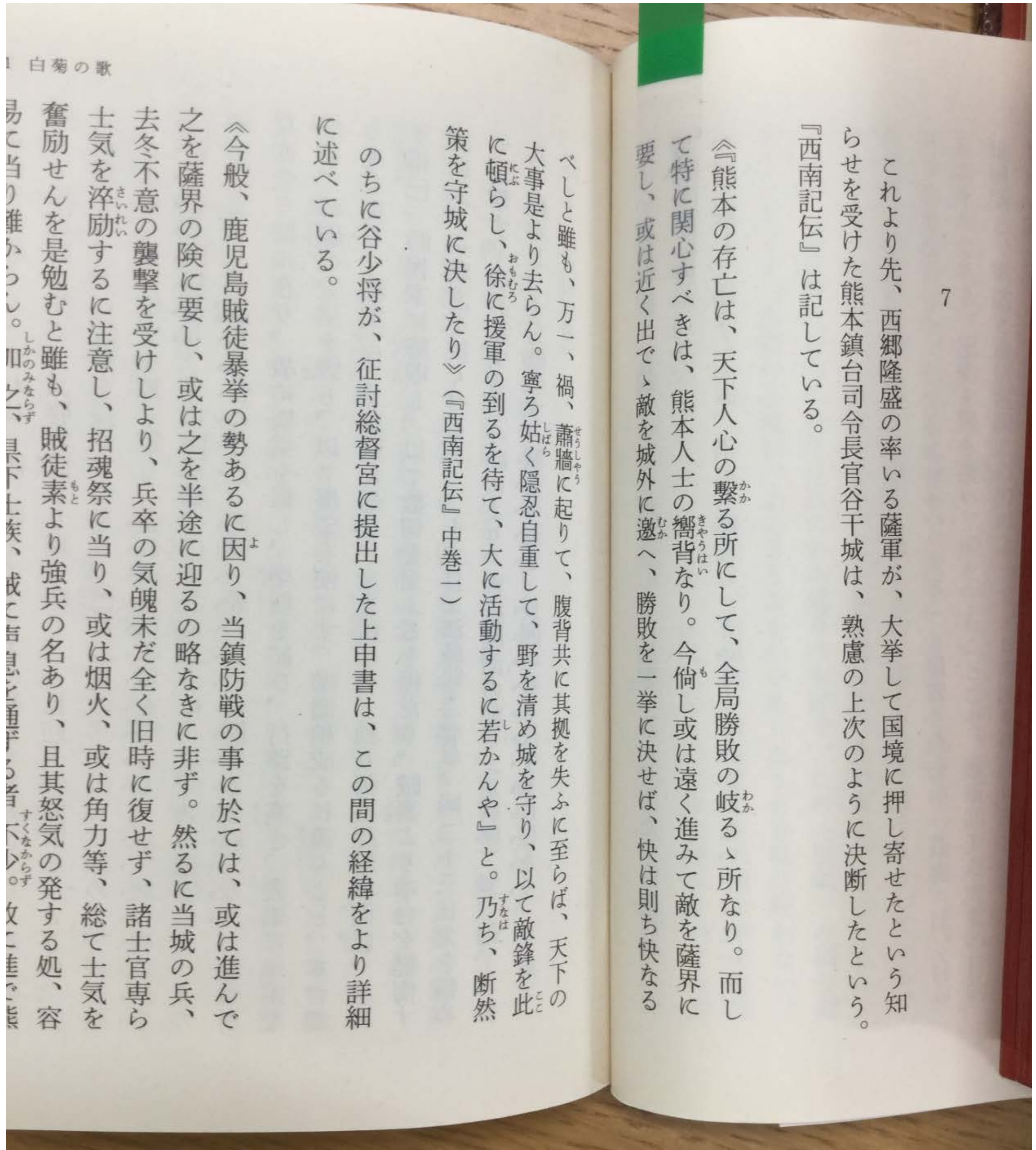


THE STEAM-ENGINE.

STEAM-POWER, it has been well observed, has opened on the world an era of progress, and is destined to continue a leading characteristic of it. On this planet, man is the noblest work of God, and the evolution of steam-power is by far the noblest work of man. In its present and prospective efforts on the physical, intellectual, and moral advancement of our species, there is nothing that comes near it. It is a generator and transmitter of force —a mover and even maker of machines, so that its powers are illimitable; and, as the Steam-engine is improved, so must its fruits increase both in quantity and quality. More power may be got from steam escaping from engines than it gives out within them. Yet this mighty power is invisible. Thus, the mechanical force of a jet of high-pressure steam

西南記伝

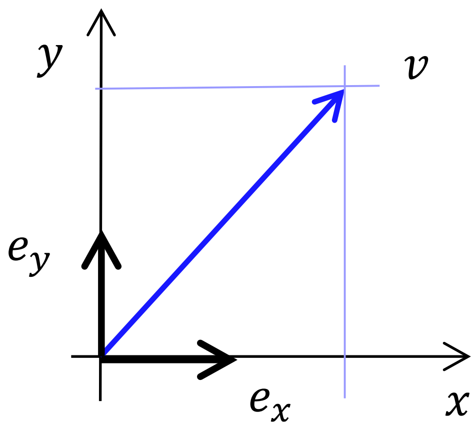
江藤淳　南洲残影より



フーリエ変換とフーリエ級数の関係

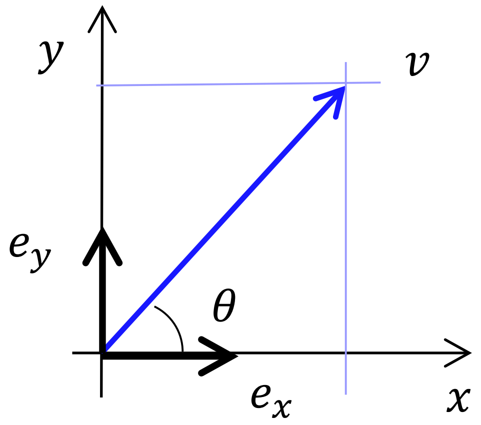
前回の説明から, フーリエ級数は周期関数を基本的な周期信号成分(sin, cos)に分解して表現するものでした.

Q. 座標空間のベクトルの“成分”を求める, あるいは
“成分”を取り出すにはどうすればよいか？



例えば, 2次元空間において, ベクトル v の x, y 成分を求めるには？

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ のように成分表示されていたら, 1 や 2 を取り出すだけなので
ベクトル v に対する操作で考えること.

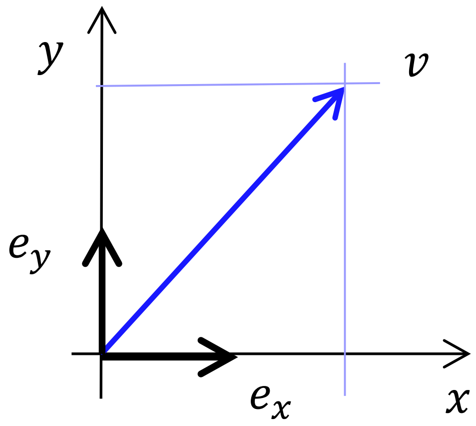


x 成分を求めるときは, ベクトル v の x 方向への射影を求めればよい.

$$x \text{ 成分} = |v| \cos\theta = |v|\,|e_x| \cos\theta \qquad |e_x| = 1 \text{ なので}$$

$$= \langle v, e_x \rangle$$

v の x 成分は v と x 方向の単位基底ベクトル e_x の内積を取ることで求められる.



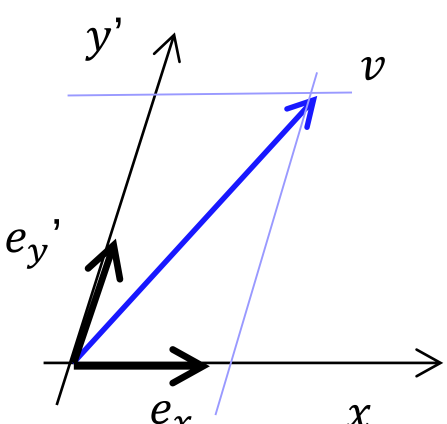
例えば, 2次元空間においては, 任意のベクトルをx, y方向の正規直交基底を使って(座標)表現できる.

$$v = xe_x + ye_y$$

(e_x, e_y): 正規直交基底　　　(c_x, c_y): 座標

$$\langle v, e_x \rangle = e_x^T v = e_x^T(c_x e_x + c_y e_y) = c_x\langle e_x, e_x \rangle + c_y\langle e_y, e_x \rangle = c_x$$

座標成分は, そのベクトルと基底の内積から求まる.



斜交座標系でも, 基本ベクトルの線形結合で任意のベクトルを表現できるが, 例えば x 方向の座標を求めるには, e_y' に平行な直線を引かねばならず, v と e_x だけからもとめることができない.

ベクトルの内積

Ex. $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ➡ $\langle p, q \rangle =$

$$p = \begin{bmatrix} 1 + j \\ 2 + 3j \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 1 - j \\ 1 + 2j \end{bmatrix}$$

➡ $\langle p, q \rangle =$

ベクトルの内積 $\langle p,q\rangle \coloneqq q^T p \qquad p,q\in\mathbb{R}^n$

$$\langle p,q\rangle \coloneqq q^* p = \bar{q}^T p \qquad p,q\in\mathbb{C}^n$$

$(\cdot)^T$: 転置, $\overline{(\cdot)}$: 複素共役, $(\cdot)^*$: 複素共役転置

区間$[-\mathrm{T}/2, T/2]$の
周期関数に対する内積

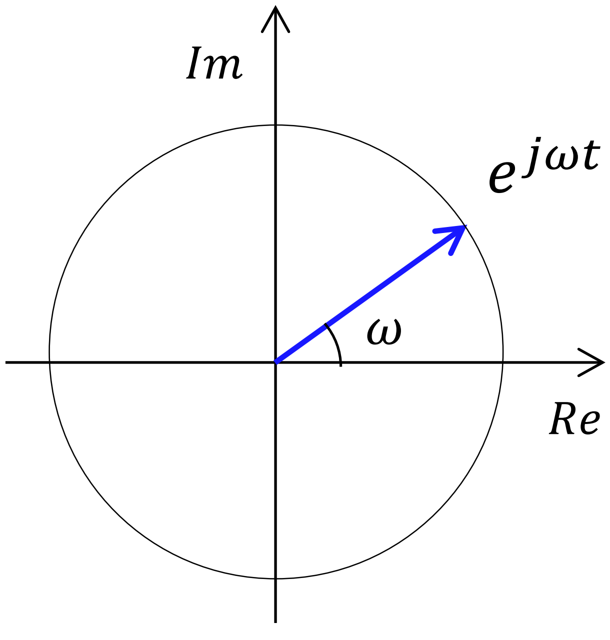
$$\langle f,g\rangle := \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g^*(t)f(t)\,dt$$

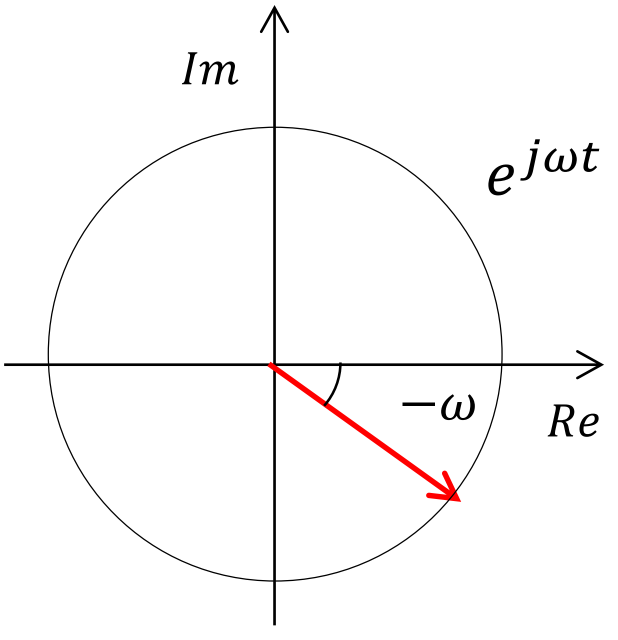
を用いて, この成分計算を関数の空間でおこなったものが
フーリエ級数である.

$$\overline{e^{j\omega t}} = \overline{\cos\omega t + j\sin\omega t}$$

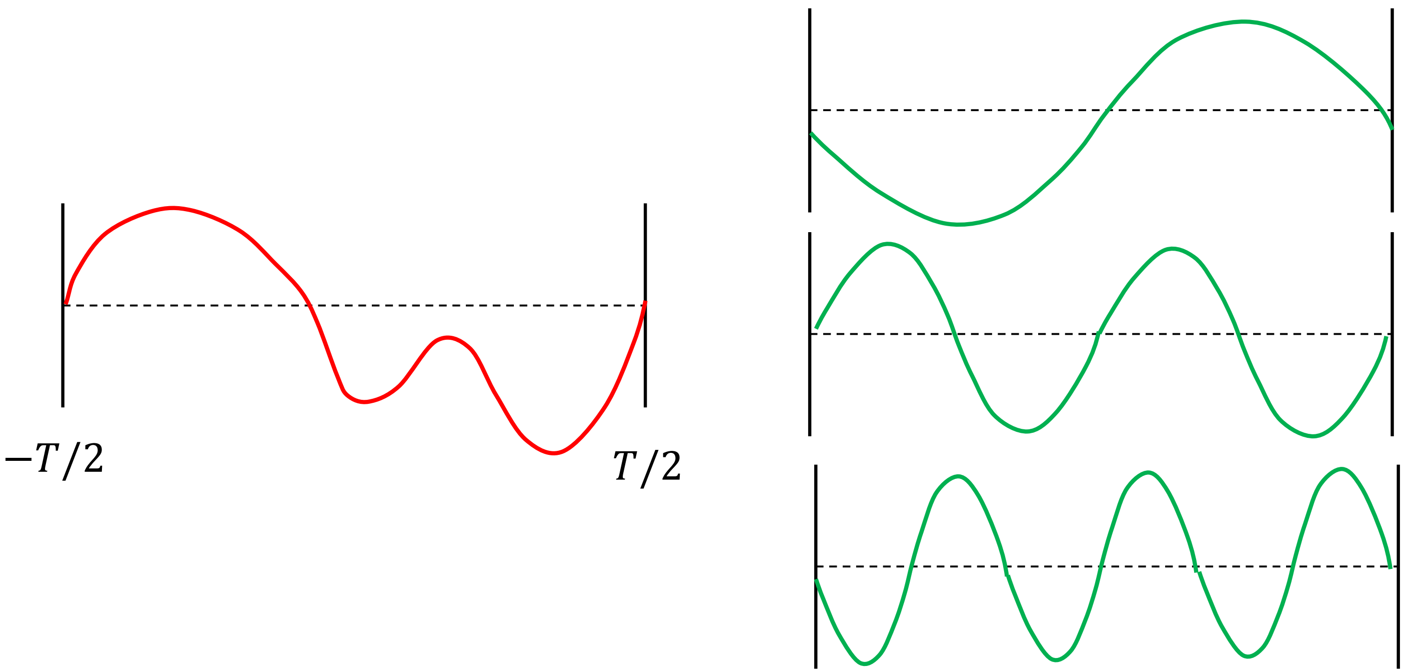
$$= \cos\omega t - j\sin\omega t = e^{-j\omega t}$$

⇒ $e^{j\omega t}$ の複素共役は $e^{-j\omega t}$





フーリエ級数展開: 区間$[-T/2, T/2]$の周期関数を, 各周波数のsin, cosの和に分解する



$$\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)2t$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)3t$$

Euler's formula $\quad e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$

➡ 三角関数の（簡略）複素表示

区間$[-\mathrm{T}/2, T/2]$の周期関数を分解する

複素正弦関数 $\{e^{j\omega_k t}\}, \omega_k = \frac{2\pi k}{T}, k = 0,1,\cdots$ は正規直交系をなす.

$$\langle e^{j\omega_k t}, e^{j\omega_\ell t}\rangle =$$

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g^*(t)f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{g(t)}f(t)\,dt$$

区間$[-\mathrm{T}/2, T/2]$の周期関数を分解する

区間$[-\mathrm{T}/2, T/2]$の周期関数を分解する

複素正弦関数 $\left\{e^{j\omega_k t}\right\}, \omega_k = \frac{2\pi k}{T}, k = 0,1,\cdots$ は正規直交系をなす.

$$\left\langle e^{j\omega_k t}, e^{j\omega_\ell t}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(\omega_k-\omega_\ell)t}\, dt$$

$k = \ell$ のとき, $e^{j(\omega_k-\omega_\ell)t} = 1 \rightarrow \left\langle e^{j\omega_k t}, e^{j\omega_\ell t}\right\rangle=1$

周期 T で割るのは規格化のため

$k \neq \ell$ のとき, $\left\langle e^{j\omega_k t}, e^{j\omega_\ell t}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T/2} e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{T}t}\, dt$

$$= \frac{1}{2\pi(k-\ell)j}\left[e^{j\frac{2\pi(k-\ell)}{T}t}\right]_{-T/2}^{T/2} = 0$$

$\therefore\ \left\{e^{j\omega_k t}\right\}$ は正規直交系である.

フーリエ級数展開:

係数

正規直交基底

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, e^{j\omega_k t}$$

区間$[-T/2, T/2]$の周期関数 $h(t)$ を, 各周波数の複素正弦波の和に分解する

$$\alpha_k = \langle h(t), e^{j\omega_k t} \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt$$

係数は基底と元の関数との内積から求まる

内積計算において
複素共役(転置)
とるため $e^{-j\omega_k t}$になる

Advanced

複素係数の場合と実係数の場合の対応

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, e^{j\omega_k t} = \alpha_0 \, e^{j0t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_{-k} \, e^{-j\omega_k t} + \alpha_k \, e^{j\omega_k t} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b'_k j \sin \omega_k t)$$

$$a_k = \alpha_{-k} + \alpha_k = 2 \, \mathrm{Re}(\alpha_k) \qquad \because h(t) \in \mathcal{R} \rightarrow \alpha_k = \overline{(\alpha_{-k})}$$

$$b'_k = -\alpha_{-k} + \alpha_k = 2 \, \mathrm{Im}(\alpha_k) j$$

Advanced

$$a_k = \alpha_{-k} + \alpha_k = 2\,\mathrm{Re}(\alpha_k)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{j\omega_k t}\, dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\cos\omega_k\, t\, dt$$

$T = 2\pi$ とするとこれは

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cos nt\, dt$$

に等しい.

Advanced

$$b'_k = -\alpha_{-k} + \alpha_k = 2\,\mathrm{Im}(\alpha_k) j$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{j\omega_k t}\, dt - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t) j \sin \omega_k \underset{-\alpha_{-k} + \alpha_k}{t\, dt}$$

$T = 2\pi$ とするとこれは

$$j b_k = j\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin nt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin nt\, dt$$

に等しい.よって実係数の場合の a_k, b_k の定義と整合している.

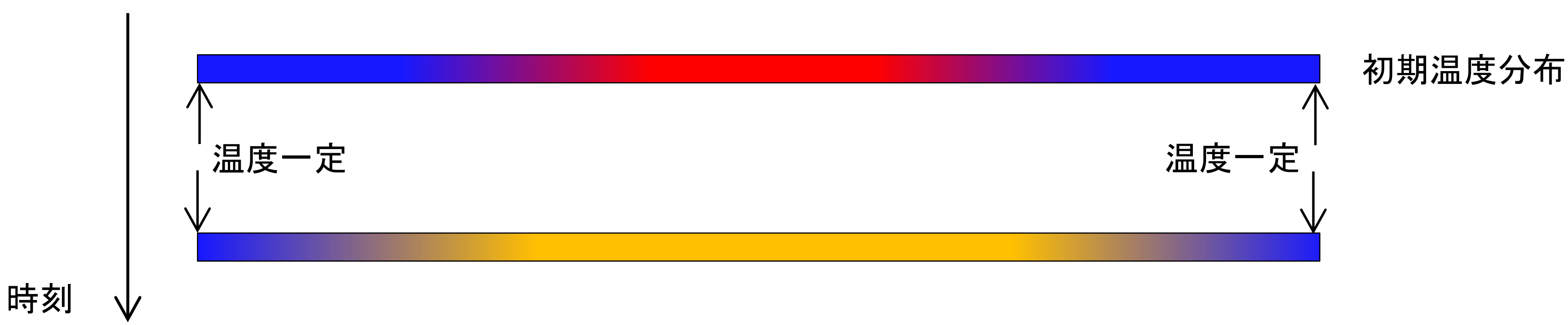
フーリエ級数の応用: 熱方程式の初期境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < L, t > 0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L$$

1次元温度分布の拡散



フーリエ級数の応用: 熱方程式の初期境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < L, t > 0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L$$

変数分離法

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$\Rightarrow \quad F(x)G'(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

両辺とも t, xに依存しない
定数でなければならない.

$$\frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

$k \geq 0 \to u(x,t) = 0$ となり不適（省略）　$k < 0$ のとき, $k = -\lambda^2, \lambda > 0$ とおく.

$$G'(t) = -\lambda^2 c^2 G(t), \qquad F''(x) = -\lambda^2 F(x)$$

$$G(t) = Ce^{-\lambda^2 c^2 t}, \qquad F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$C = 0 \to G \equiv 0 \to u \equiv 0$ より $C \neq 0$

すると境界条件から　$F(0) = A = 0, \quad F(L) = B\sin\lambda L = 0$

$B = 0 \to F \equiv 0 \to u \equiv 0$ より $B \neq 0$

よって $\sin\lambda L = 0 \to \lambda = \dfrac{n\pi}{L}, \qquad (n = 1,2,\cdots)$

$\lambda = \dfrac{n\pi}{L}$ に対する F, G を F_n, G_n とする.

$$F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad G_n(t) = C_n\, e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}$$

$$u_n(x,t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}, D_n = B_nC_n$$

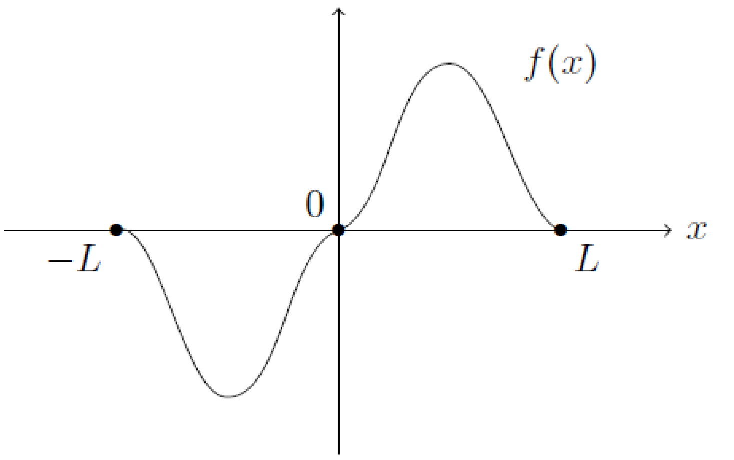
は熱方程式と境界条件を満たす．重ね合わせより

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}$$

は解となる. 初期条件より

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

$f(x)$ が奇関数となるよう拡張し，再度 f とする.



$f(x)$ のフーリエ級数展開は

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy$$

よって $D_n=b_n$ とすれば初期条件を満足する. 以上より解は

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}$$

フーリエ級数からフーリエ変換へ

フーリエ変換
(Fourier Transform)

逆フーリエ変換
(Inverse Fourier Transform)

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{h}(\omega)$$

$$\hat{h}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t)$$

フーリエ級数

$$\alpha_k = \langle h(t), e^{j\omega_k t} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{j\omega_k t}$$

フーリエ級数からフーリエ変換へ

フーリエ級数の対象は周期 T の周期関数

➡ これを任意の関数に拡大したい $T \to \infty$

➡ これに伴って周波数 $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{T}, k = 1, 2, \cdots$ の間隔が無限に小さくなる

➡ 係数が周波数 ω の連続関数になる

フーリエ級数からフーリエ変換へ

Advanced

フーリエ級数

$$\alpha_k = \langle h(t), e^{j\omega_k t} \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt \qquad h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{j\omega_k t}$$

$T \to \infty$ とする

$$h(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt \right) e^{j\omega_k t}$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}, \;\; \Delta\omega := \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{2\pi}{T}$$

フーリエ級数からフーリエ変換へ

Advanced

フーリエ級数（$T \to \infty$ のとき）

$$h(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt \right) e^{j\omega_k t}$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T},\ \Delta\omega := \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Delta\omega \to 0\ (T \to \infty)$$

（離散的な周波数が連続になる）

$$h(t) = \lim_{T\to\infty} \lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt \right) e^{j\omega_k t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boxed{\left(\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt \right) e^{j\omega_k t}}\ \Delta\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \lim_{\Delta\omega\to \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega_k)\Delta\omega$$

$$H(\omega_k) := \left(\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt \right) e^{j\omega_k t}$$

区分求積法

Advanced

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega_k)\Delta\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, d\omega$$

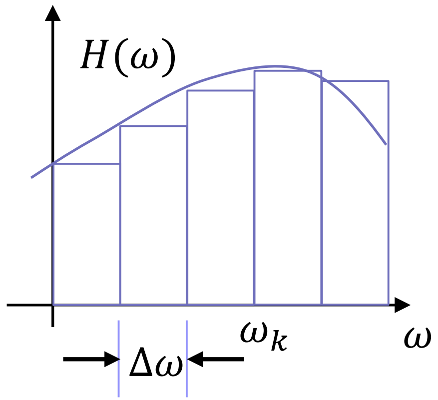
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right)}\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \hat{h}(\omega)$$

$$\begin{cases} h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \\ \hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt \end{cases}$$

$$H(\omega_k) = \left(\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega_k t}\, dt\right) e^{j\omega_k t}$$

$$H(\omega) = \left(\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right) e^{j\omega t}$$



積分を矩形近似し, $\Delta\omega \to 0$

To Do (今回)

1) (Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする.)
2) 復習
3) 教科書 2.4～2.7 を読む.
4) 演習問題2.1, 2.2 を解いてくる. 答えだけはNG.
当てられたときに説明ができるように.