システム制御 I

4学期
月 5, 6限　14:00-16:10
木 3, 4限　11:00-13:10
5号館 第15講義室 (システムコース)

担当:平田 健太郎

12/2 第1回

はじめに

講義内容：　<u>伝達関数</u>に基づく古典制御理論

受講に際しては微分方程式，ラプラス変換，複素解析の予備知識が望まれる

講義形式：　講義スライドをアップロード
板書も併用

自宅学習（予習）を前提として講義
（出席して聞いているだけでは理解は困難）

必修科目であることに留意

教科書: 片山 徹 著「新版 フィードバック制御の基礎」
朝倉書店 (2002) 定価3,800円+税

- 名著, 一家に一冊, 孫子の代まで役立つ
- 「読書百遍意自ら通ず」

講義の最後に次回までに読んでおく部分を指定

↓

自宅学習

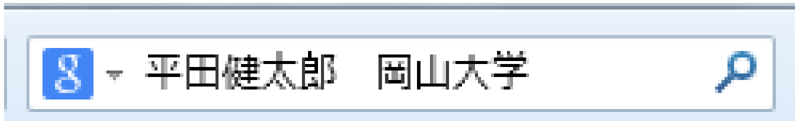
↓

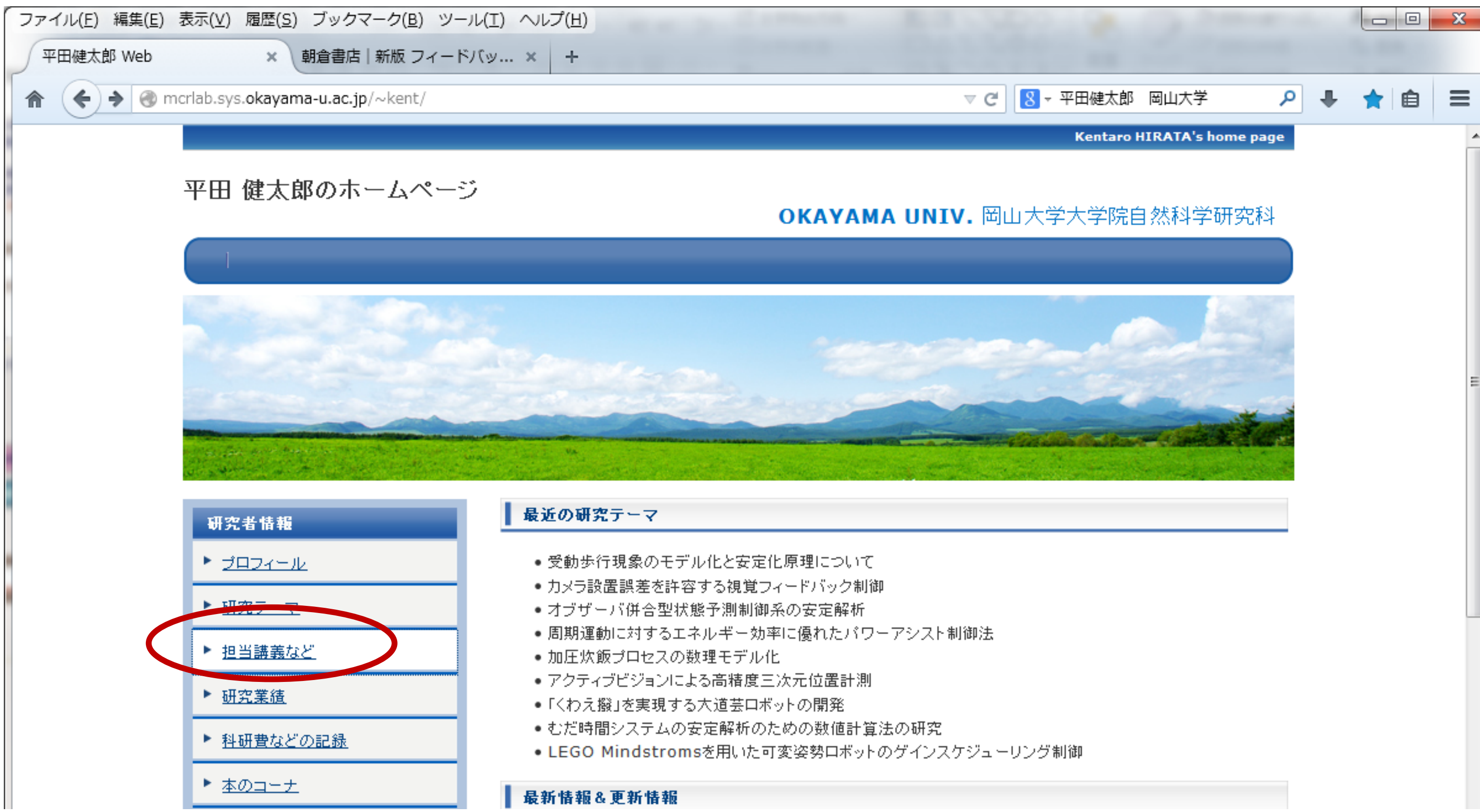
講義で<u>要点</u>を説明, 分からなければ質問に来る

電子的手段：

email address　kent@sys.okayama-u.ac.jp

webページ





担当講義など

コンテンツ・メニュー

- TOPに戻る

担当講義（岡山大学）

2015 後期

基礎制御理論 2年生後期 月曜日 3, 4限 （2クラス実施）12:45-14:15, 14:30-16:00

最適制御学 3年生後期 月曜日 5限 16:15-17:45

2015 前期

基礎ロボット制御 3年前期 火曜日 2限 10:25-11:55

【8/8 追記】 期末テスト追加措置

- 講義資料（4/14）
- 講義資料（5/12）
- 講義資料（5/19）
- 講義資料 part 2 (5/19)
- 講義資料（5/26）
- 講義資料（6/2）
- 講義資料（6/16）(解答入りversion に置換）
- 講義資料（6/23）
- 講義資料（6/30）
- 講義資料（7/7） レポート課題用補足資料
- 講義資料（7/14）
- 講義資料（7/28）
- 講義資料（8/4 or 8/6）

Schedule

1. 12/2 (today)
2. 12/5
3. 12/9
4. 12/12
5. 12/16
6. 12/19
7. 12/23
8. 1/6
9. 1/9　中間試験
10. 1/16
11. 1/20
12. 1/23
13. 1/27
14. 1/30
15. 2/3
16. 2/6　期末試験

To Do (やるべきこと)

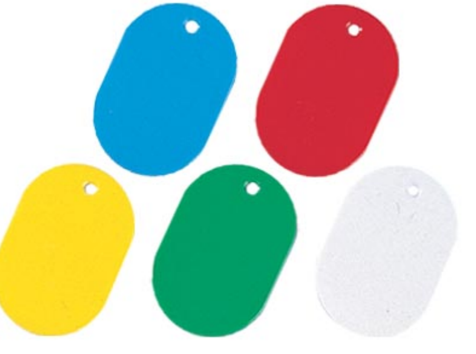
1） Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする.
2） 教科書を購入する.
3） 1．序論，　2.1～2.3 を読む.

- 毎回, 講義中にランダムにあてる. 回答できれば平常点

- 前に座る(板書のためにも). 挙手歓迎.

- 講義への積極的な参加を評価する.

- 出席と平常点の加算に使用するので学生証を忘れないこと



昼休み問題

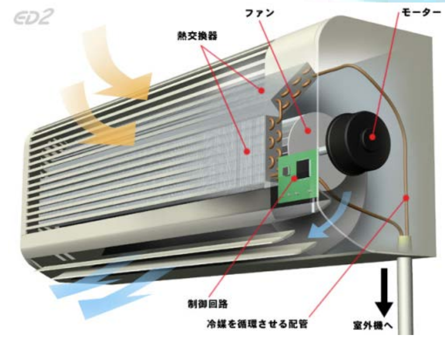
提案: 木 3, 4限　11:00-12:00

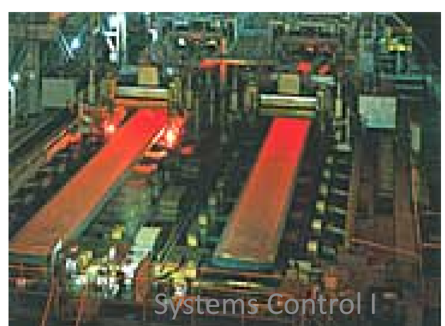
~~12:50-13:50~~

12:10-13:10

「制御する」とはどういうことか？

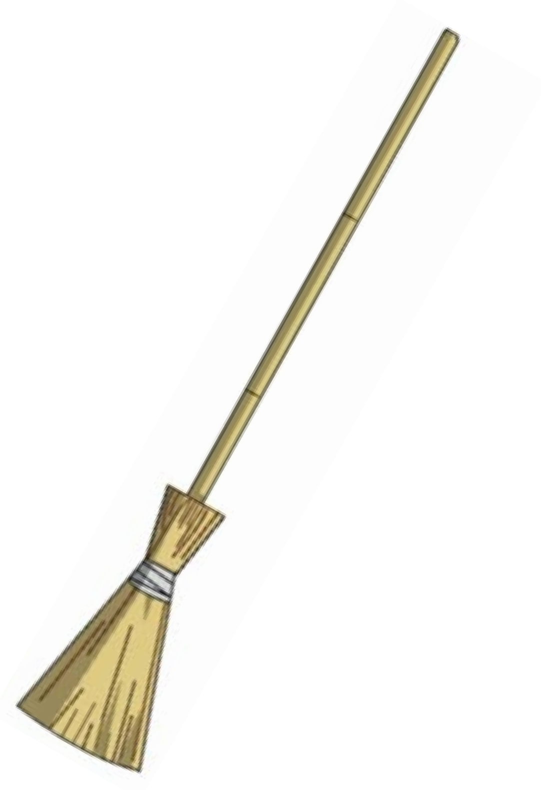
Control: Make things work as we wish





身近な例

制御工学の観点から見た最もよい箒の使い方?



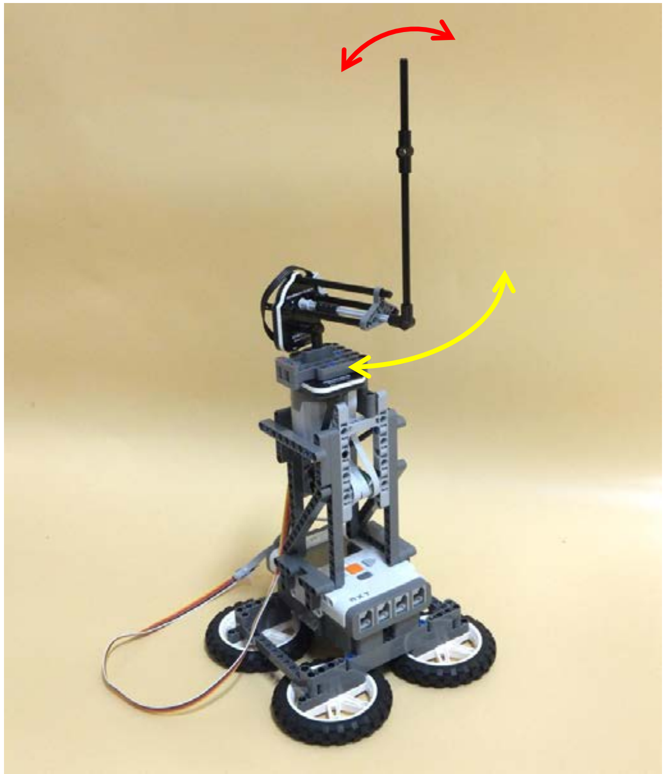
Answer:

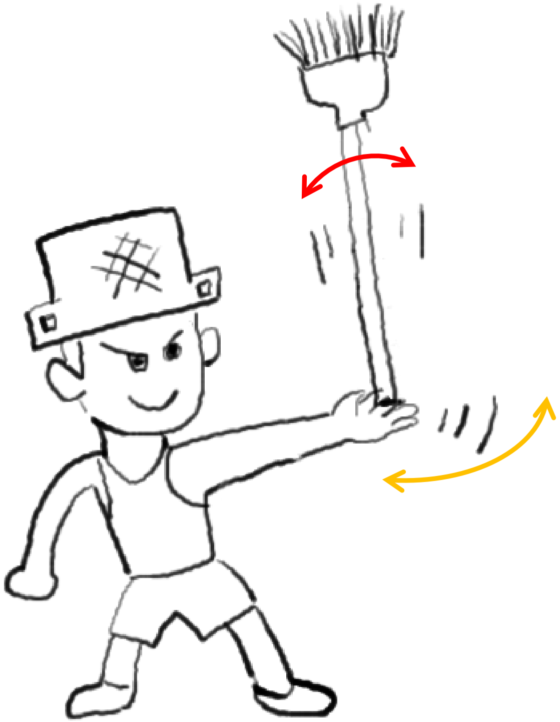
これは “安定化” である.

（運動の）自由度（Degree of Freedom）

安定化制御の例

回転型倒立振子実験

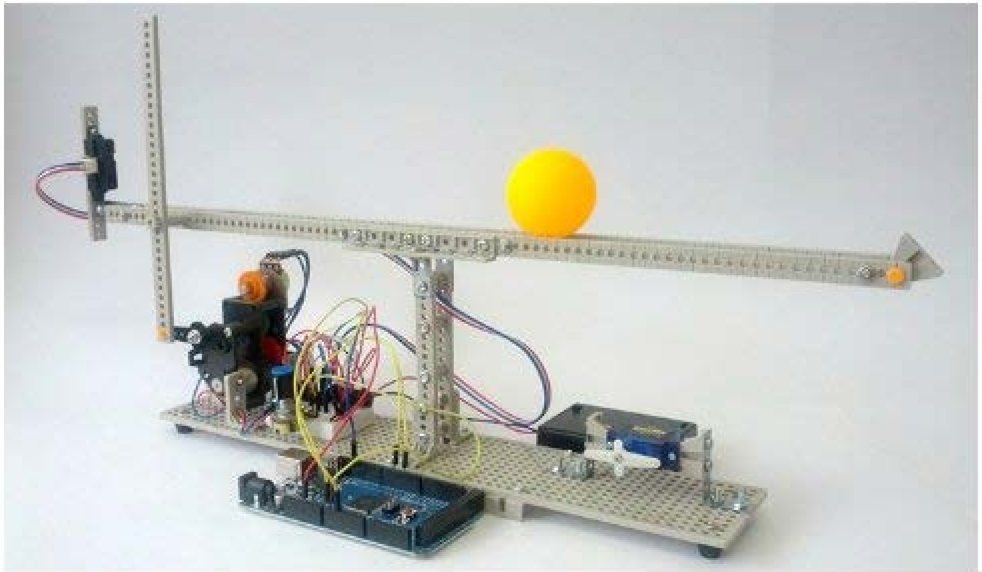




自由度が2なので, 1入力2出力⇒古典制御には不向き

安定化制御の例

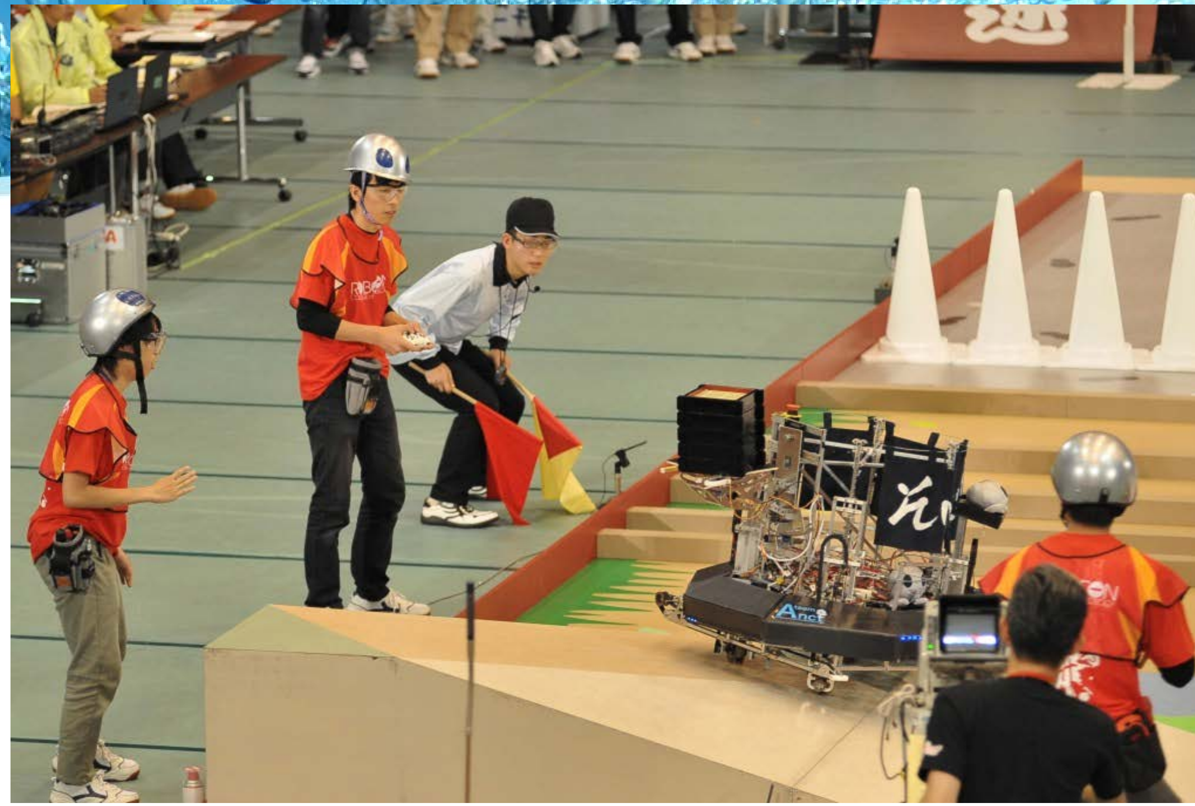
ボールアンドビーム実験装置（Ball & Beam）



講義を通した例題として扱う. (安定でないが, ビーム角度を指定できるとすると, 1自由度になる ⇒ 古典制御向き)

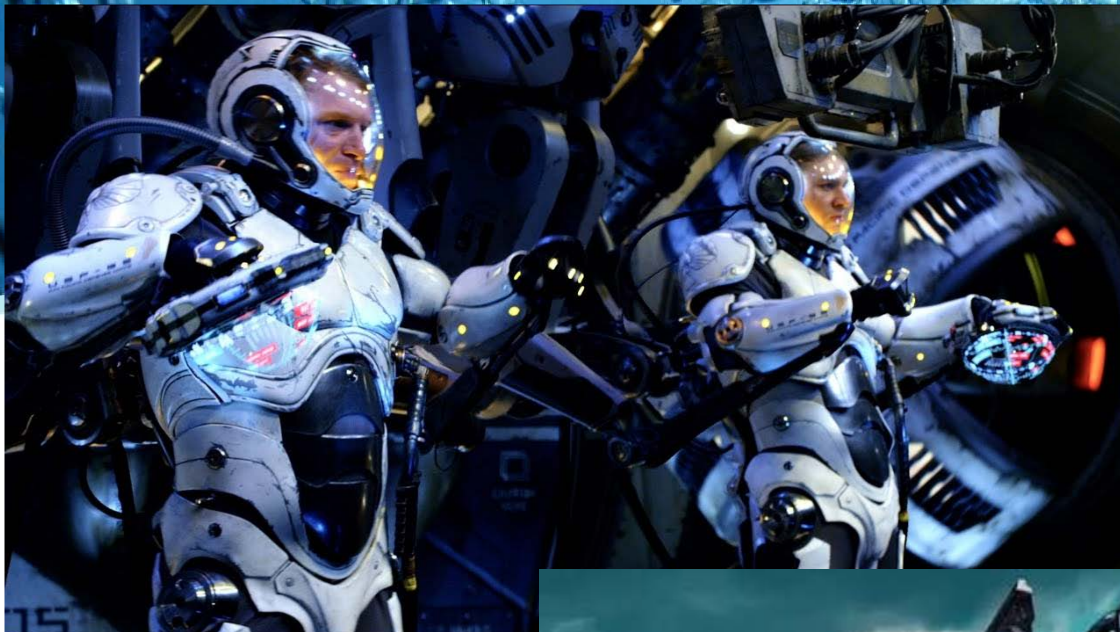
本講義を理解すると, これの安定化ができる.

よくある意見



例えば「ロボットを制御する」って，こんな楽しそうなイメージなのに，講義では数式ばかり出てきて，抽象的で分かりにくい．

（19歳 大学生 岡山県）



抽象的

~~喧嘩~~上等！

抽象的であってこそ学問

“計算”ができると試験で点数が取れる
場合もあるが, それは本質ではない

例: 直線, 無限…

目に見えるものを超越する能力
(太陽系, 惑星, 地動説)

機械要素を見て, 電気回路を連想する, あるいは
その先に「システム」を見る
⇒ 抽象世界で考える能力

重要なのは概念を理解すること

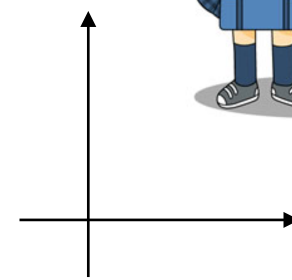
計算問題が試験に出るのは，単に出題しやすいからに過ぎない．

大学の講義で学ぶべきは概念であり，概念とは総じて抽象的である．制御理論も例外ではない．

中高生にとっての線形代数的なもの

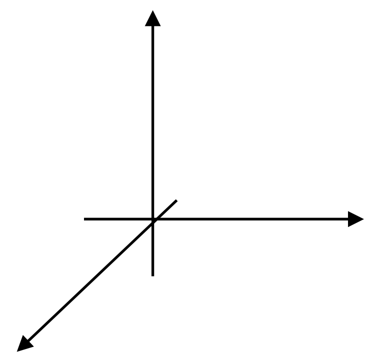
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

これは
2元連立方程式



$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = 6 \end{cases}$$

これは
3元連立方程式



どう, 解きますか？

（元が増えると？）

諸君にとっての線形代数

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

要するに？

$$Ax = b$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$x, b \in \mathbb{R}^n$

解法:

$$x = A^{-1}b$$

(nによらず！)

線形代数の真価のひとつ:　次元に縛られない観点を与える

高次元の線形方程式で記述される数理現象

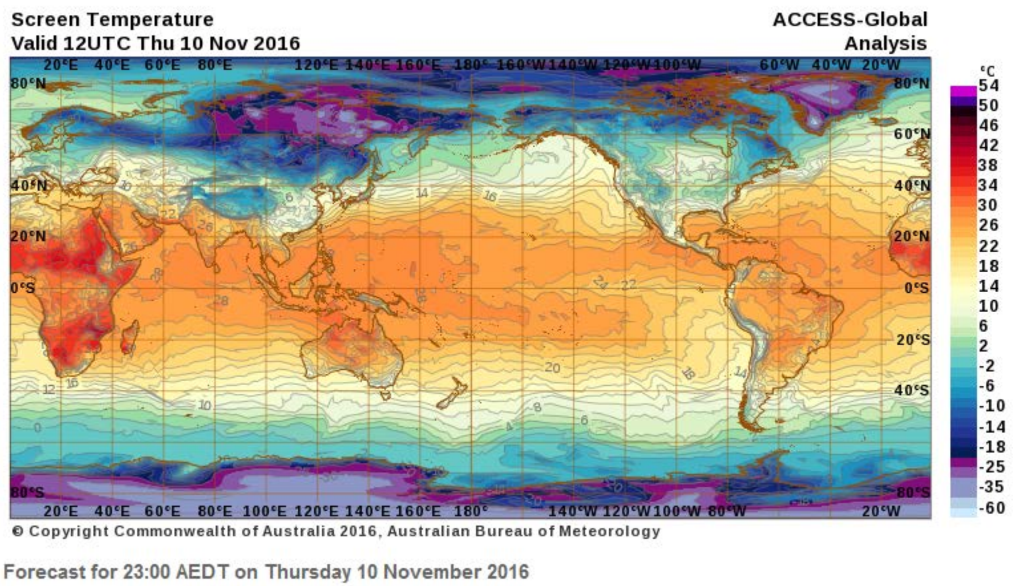
例）場の方程式の定常解を求める.

Navier–Stokes方程式

（気象予報　20km全球メッシュ $n = 8 \times 10^7$）

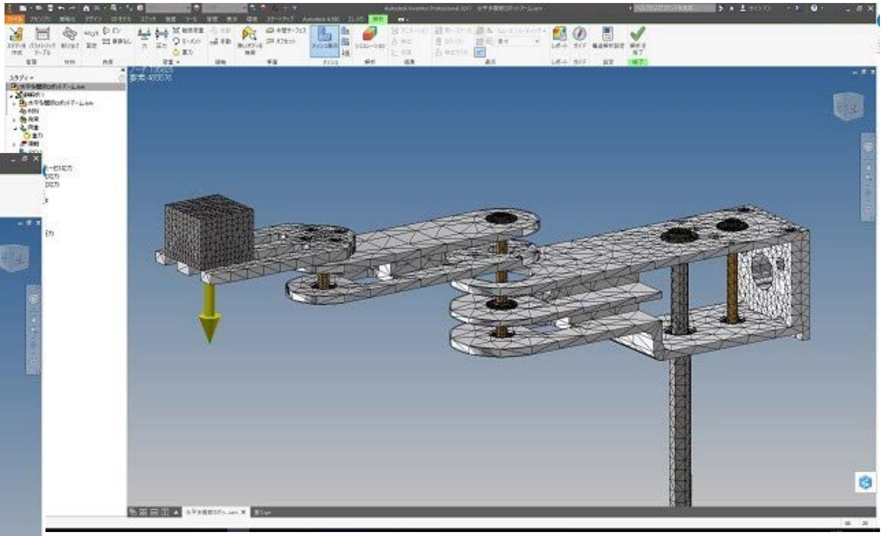
ボルツマン方程式

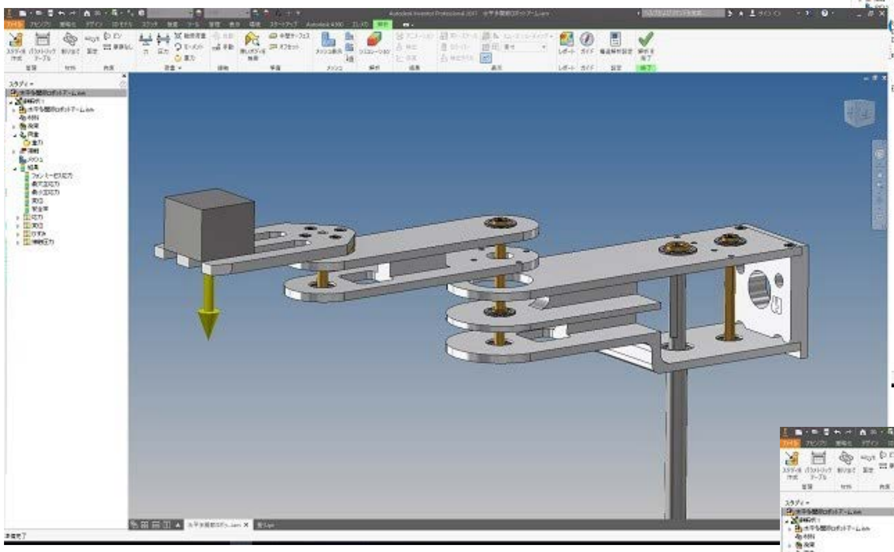
（超新星爆発　$n = 1 \times 10^6 \sim 1 \times 10^8$）

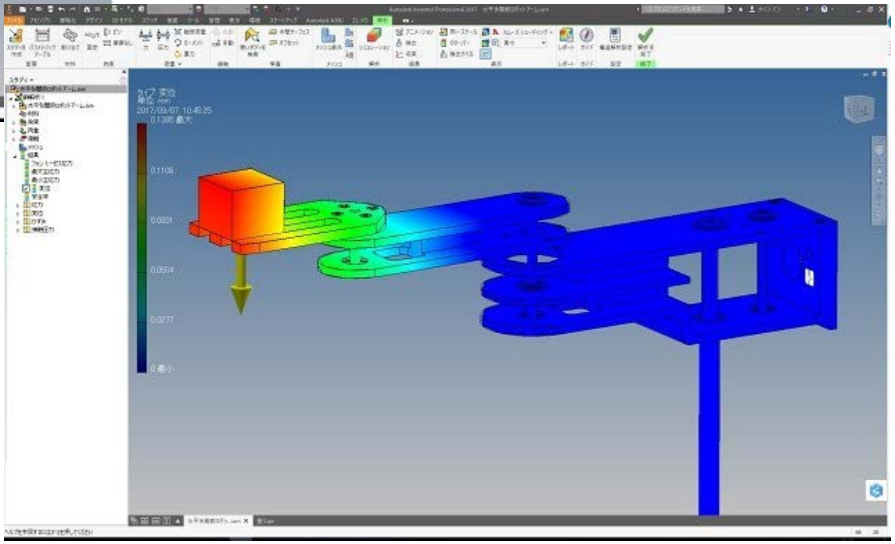


例）場の方程式の定常解を求める.

応力解析

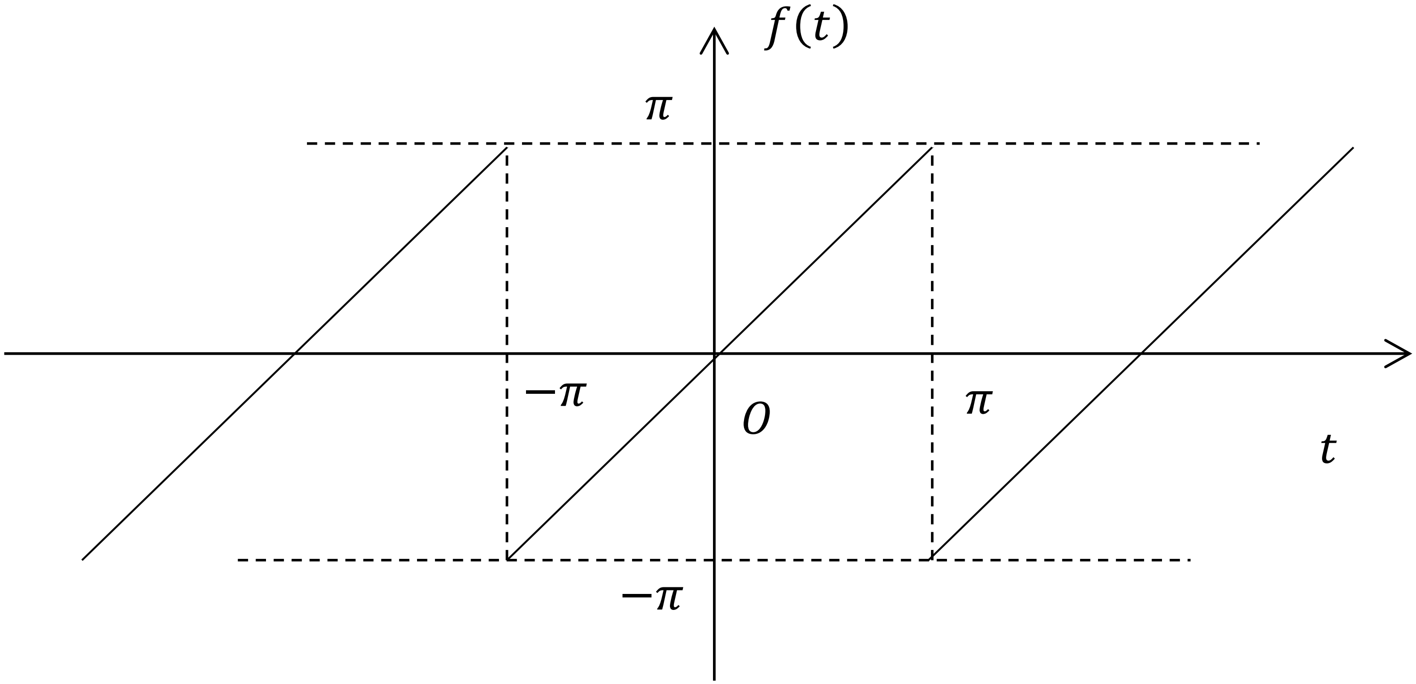






ex: 以下の関数のフーリエ級数を計算せよ

$f(t)$ は周期 2π の周期関数,　　$f(t) = t, t \in [-\pi, \pi]$



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \;\; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \;\; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt$$

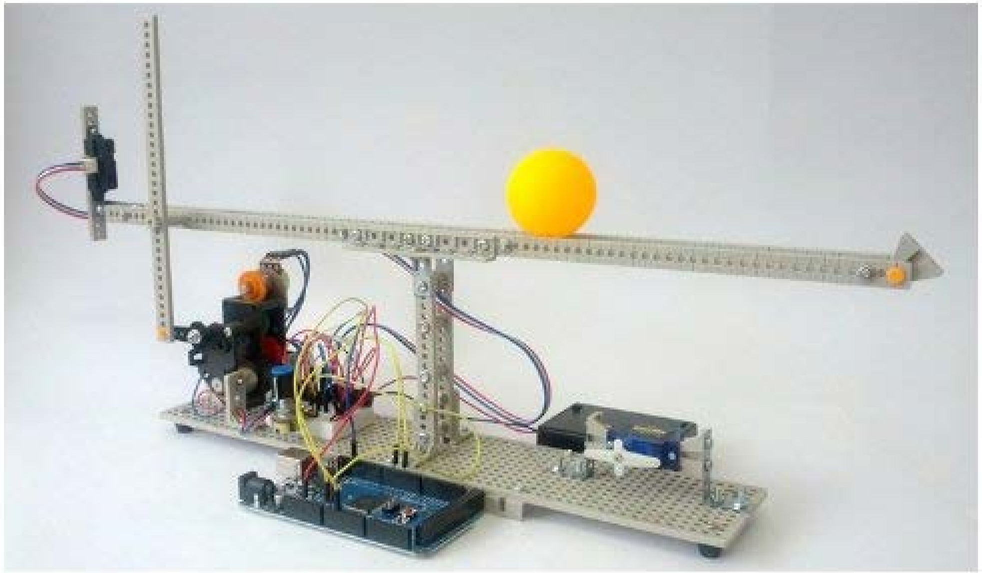
$$\{-t \cos nt\}' = -\cos nt + nt \sin nt$$

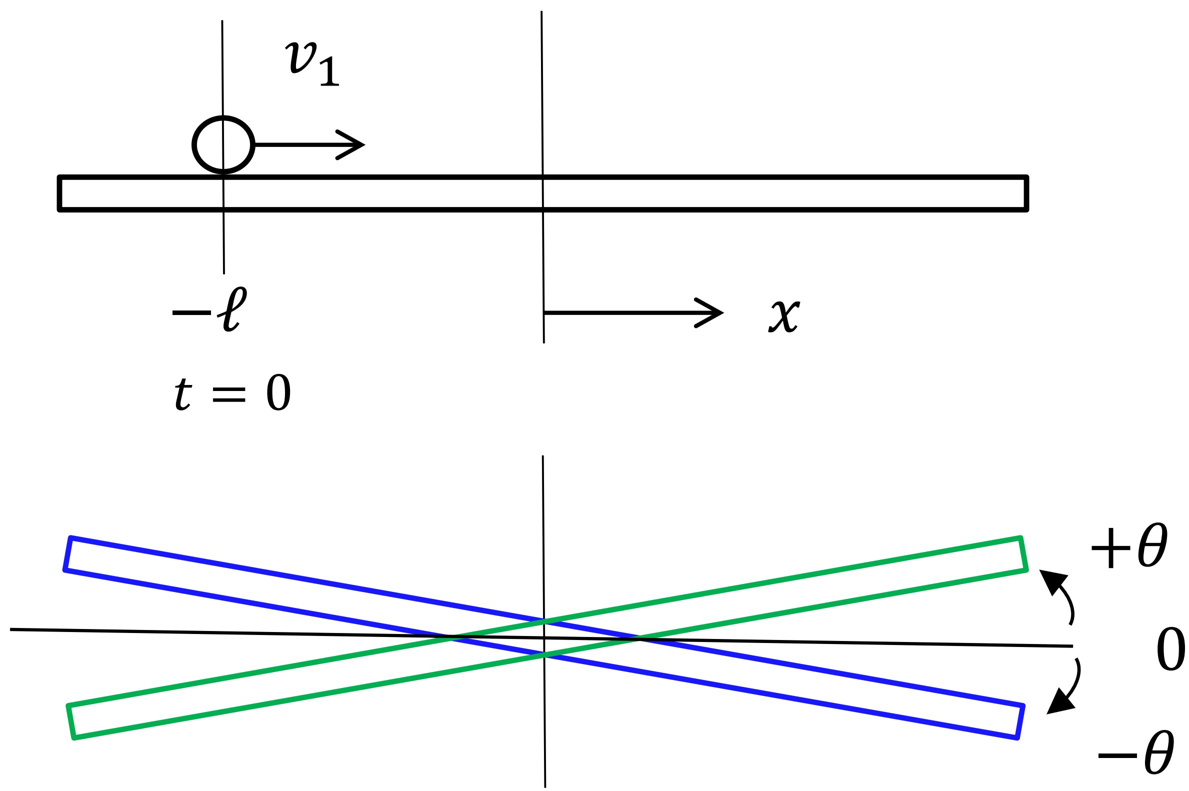
$$\int t \sin nt \, dt = \frac{1}{n} [-t \cos nt] + \frac{1}{n} \int \cos nt \;\, dt$$

Q. フーリエ級数とは何ですか？

計算の時間

Ball & Beam を力技で安定化するとどうなるか.

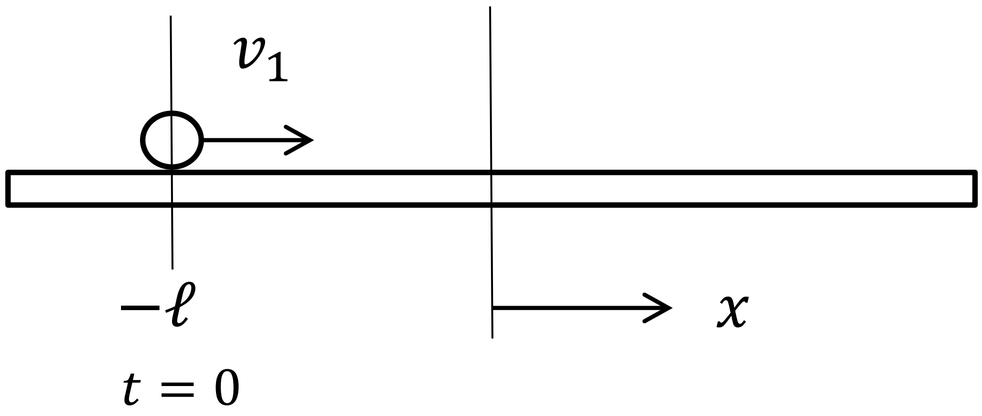




簡単のため, 摩擦・空気抵抗なし, 初期角度 0 (水平)
初速v_1, レール角度は3段階 $(0, \pm\theta)$, 制御入力はレール角度

ボールはどのような運動をするか？

運動の数式による記述



運動方程式

外力: f, 質量: m, 加速度: a

$$f = ma$$

静的なつりあいの式に見える…

加速度は時間関数 $a(t)$, 速度 $v(t)$, 位置 $x(t)$
との関係は？

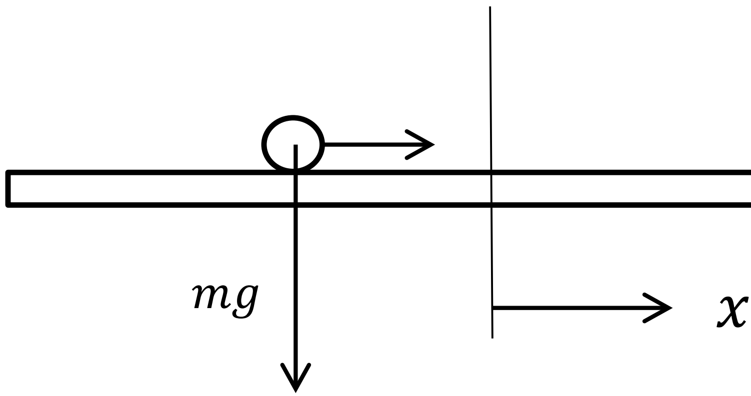
時間微分をドットで表す

$$\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t) = v(t),$$

$$\ddot{x}(t) := \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{d}{dt}v(t) = a(t),$$

$$f = ma \quad \Rightarrow \quad f = m\ddot{x}$$

時間微分の演算子が入っているので
それらしくなった

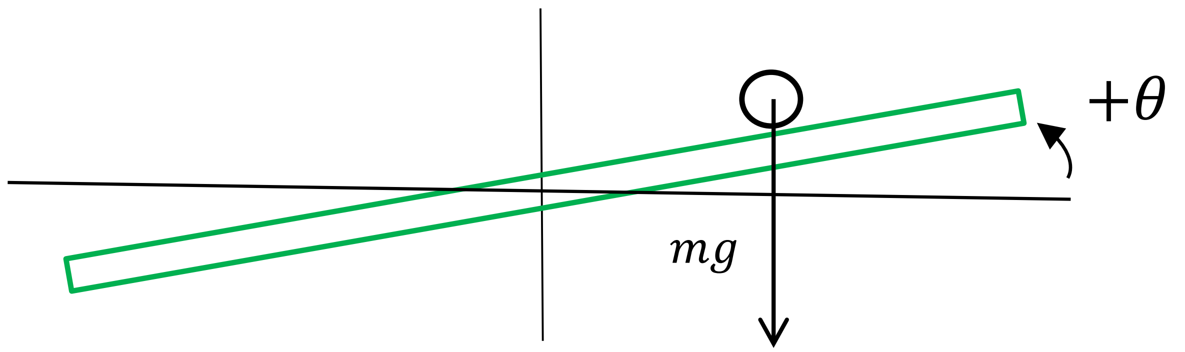


レールが水平のとき, 運動方向の重力の分力は 0

$$0 = m\ddot{x}$$

外力の作用しない等速直線運動

$$x(t) = x(0) + v_0 t$$



レールが傾いているとき, 運動方向の逆向きに重力の分力が作用する.

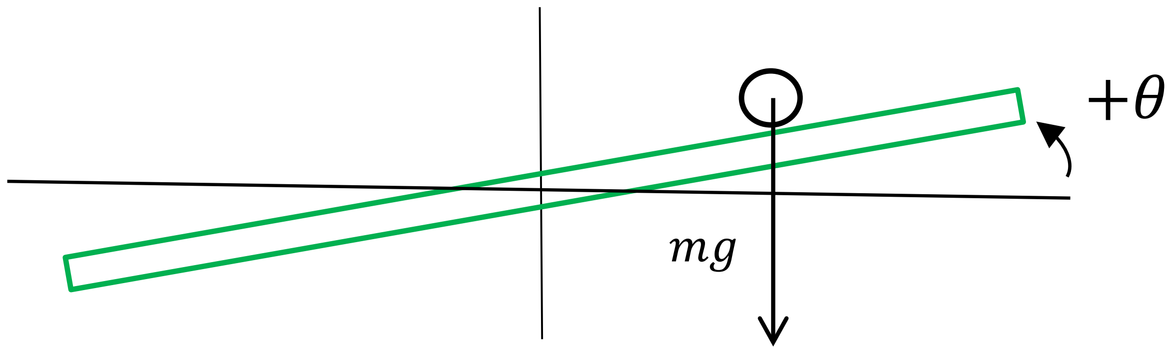
その大きさは $mg\sin\theta$

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta$$

$$\ddot{x} = -g\sin\theta$$

運動方程式は微分方程式である.

解は？



加速運動の開始時刻を t_1, そこからの経過時間を t とすると

$$v(t_1 + t) = v(t_1) - g\sin\theta\, t$$

$$x(t_1 + t) = x(t_1) + v(t_1)t - \frac{1}{2} g\sin\theta\, t^2$$

1) 等加速度運動の公式を使う.
2) 加速度を2回積分して位置を求める.
3) $\ddot{x} = -g\sin\theta$ の一般解 $x(t) = C_1 + C_2 t - \left(\frac{g\sin\theta}{2}\right)t^2$ より求める

Strategy (戦略) 1:

- 一撃で原点に止める.
- $x = 0$ の手前でレール角度を $+\theta$ にして減速開始
- 停止するまでの行き過ぎでちょうど原点に到達するように制御開始点(時刻)を決める

以下板書

運動方程式

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta$$

制御ON後, Δt で速度を 0 にする:

$$v = v_1 - g\sin\theta\,\Delta t = 0 \quad \text{(等加速度運動)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{v_1}{g\sin\theta}$$

Δt 秒間の空走距離:

$$\Delta\ell = \int_0^{\Delta t} v(t)dt = v_1\Delta t - \frac{1}{2}g\sin\theta\,(\Delta t)^2 = \frac{v_1^2}{2g\sin\theta}$$

制御ON時刻 t_1 までに一定速度 v_1 で距離 $\ell - \Delta\ell$ だけ移動する:

$$\Rightarrow \quad t_1 = (\ell - \Delta\ell)/v_1$$

この戦略ではわずかな初期条件の差を許容できない.

- 初期位置がずれると $x = 0$ で止まらない.
- 初期速度がずれると最終的な速度が 0 にならず, 等速運動を続けてレールから落下する.

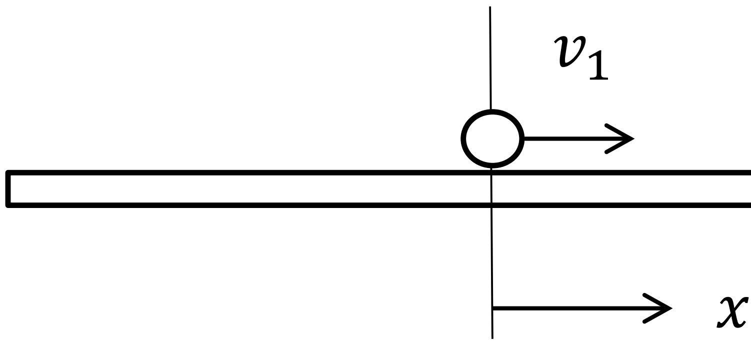
⬇

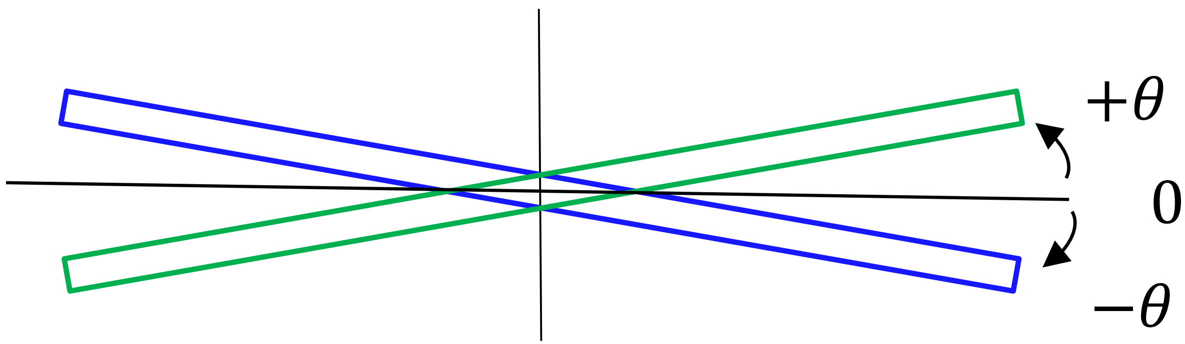
NG

Strategy 2:

- 第k行程において, 制御動作を開始する点を ℓ_k とする.
  $\ell_1 = \ell, \ell_{k+1} = -r_1 \ell_k$.
- 第$k+1$行程の初期速度が $v_{k+1} = -r_2 v_k$ になるように待ってから, 制御OFF
- $0 < r_1, r_2 < 1 \rightarrow$ 速度, 振幅とも減少していく

対称性のため, 原点からスタートさせる



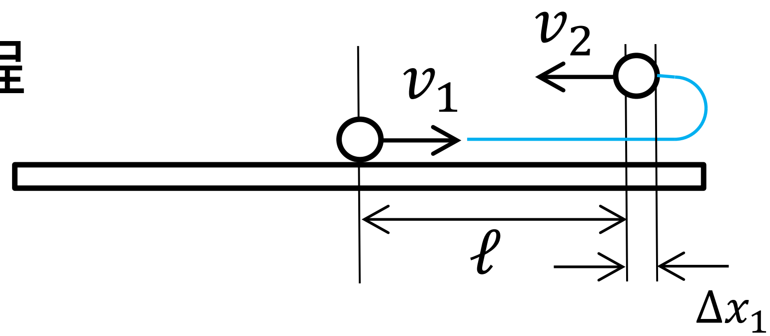


簡単のため, 摩擦・空気抵抗なし, 初期角度 0 (水平)
初速v_1, レール角度は3段階 $(0, \pm\theta)$

Strategy2 (戦略):

- 第k行程において, 制御動作を開始する点を ℓ_k とする. $\ell_1 = \ell, \ell_{k+1} = -r_1 \ell_k$.
- 第$k+1$行程の初期速度が $v_{k+1} = -r_2 v_k$ になるように待ってから, 制御OFF
- $0 < r_1, r_2 < 1 \rightarrow$ 速度, 振幅とも減少していく

第1行程



第1行程の制御ONタイミング: $t_1 = \ell / v_1$ (等速運動)

制御ON後, Δt 秒後の速度: $v = v_1 - g \sin\theta \, \Delta t$ (等加速度運動)

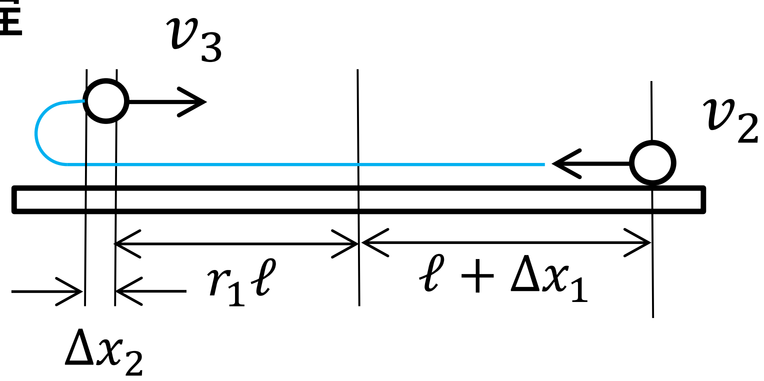
∴ 制御OFFまでの時間は $v_2 = -r_2 v_1 = v_1 - g \sin\theta \, \Delta t_1$ より

$$\Rightarrow \quad \Delta t_1 = \frac{(1 + r_2) v_1}{g \sin\theta}$$

Δt_1秒間の移動距離:

$$\Delta x_1 = \int_0^{\Delta t_1} v(t) dt = \cdots = \left(1 - \frac{1 + r_2}{2}\right) v_1^2 \frac{1 + r_2}{g \sin\theta}$$

第2行程



第2行程の制御ONタイミング: $t_2 = t_1 + \Delta t_1 - \dfrac{(1+r_1)\ell + \Delta x_1}{v_2}$

制御ON後, Δt 秒後の速度: $v = v_2 + g\sin\theta\,\Delta t$

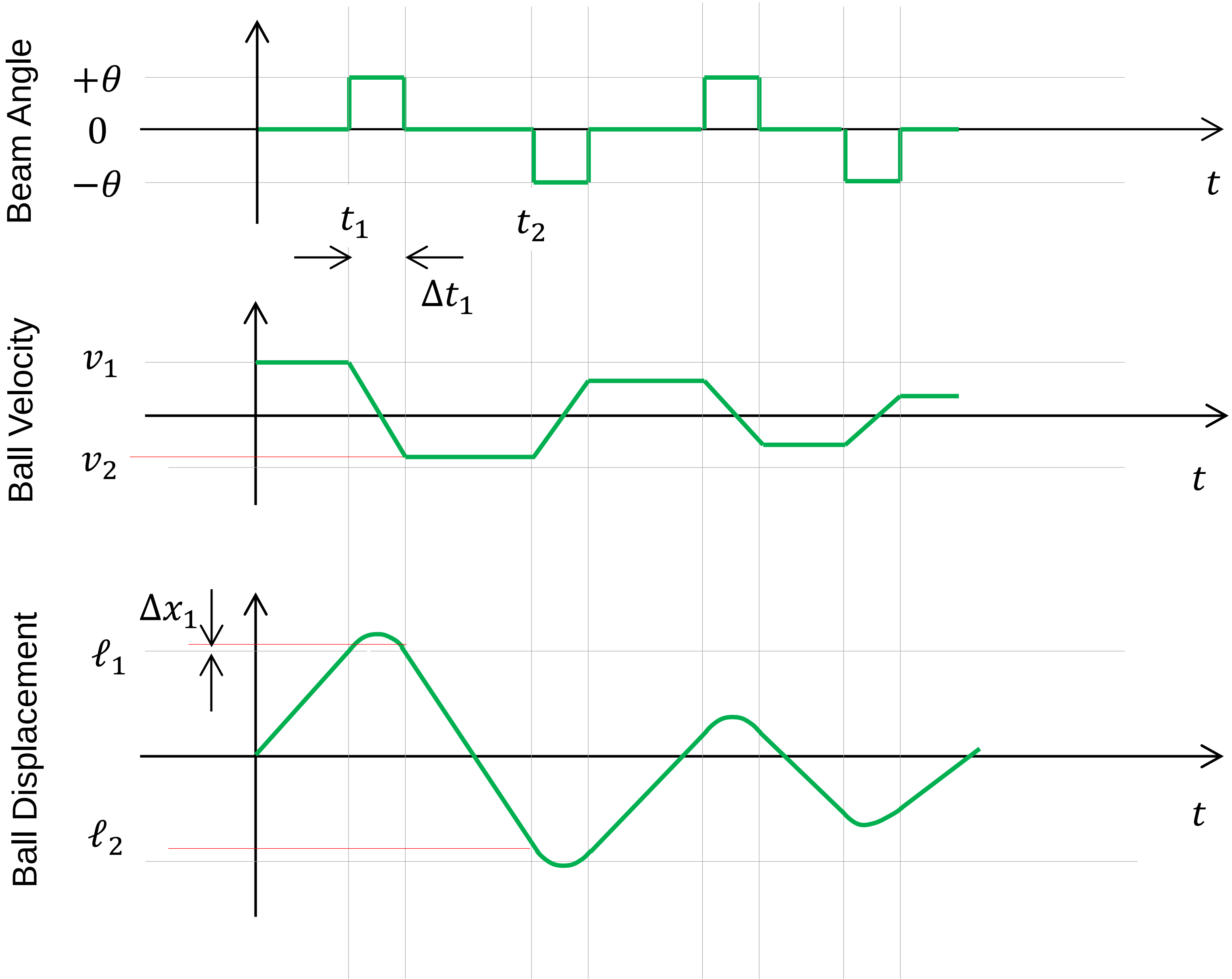
∴ 制御OFFまでの時間は $v_3 = -r_2 v_2 = v_2 + g\sin\theta\,\Delta t_2$ より

$$\Rightarrow \quad \Delta t_2 = \frac{-(1+r_2)v_2}{g\sin\theta}$$

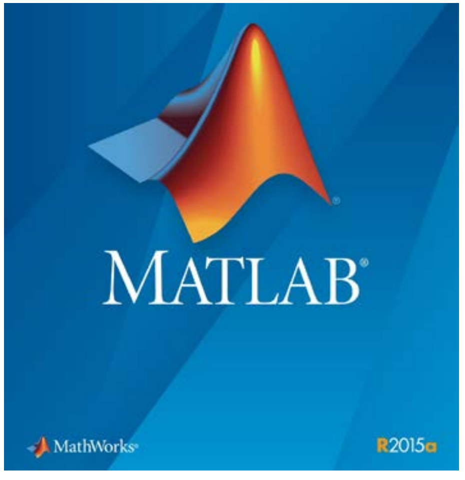
Δt_2秒間の移動距離:

$$\Delta x_2 = \int_0^{\Delta t_2} v(t)dt = \cdots$$

以下同様


Beam Angle
$+\theta$
0
$-\theta$
t
t_1
t_2
Δt_1
Ball Velocity
v_1
v_2
t
Ball Displacement
Δx_1
ℓ_1
ℓ_2
t

通常,（講義において）問題を「解く」ということは手計算を意味するが, 実用上は計算機を援用して具体的な数値を求めることが多い. その時に使われるソフトウェアを制御系CAD (Computer Aided Design) ソフトなどと呼ぶ.



Matlab/Simulink
（de facto standarad; 商用ソフト）

Scilab, Octave等のフリーウェアもある

C言語等で書くことも不可能ではないが数値計算ライブラリを用いないと面倒, GUIに問題あり

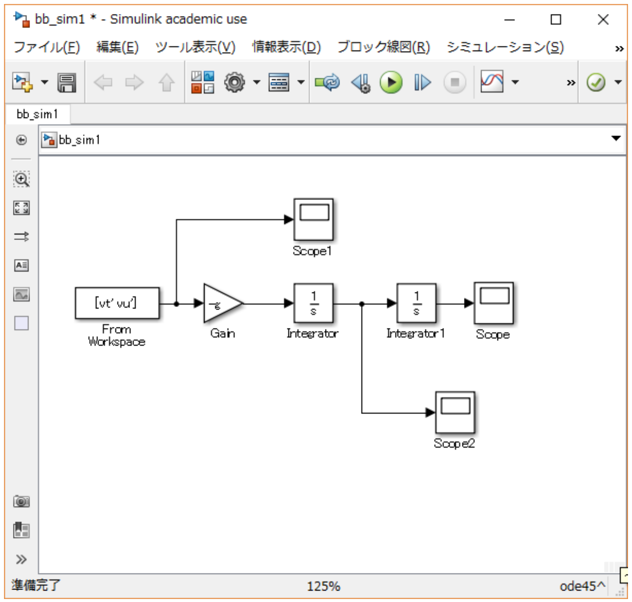
数値計算結果:

```
clear;
l=0.3;
th=pi/180*1;
g=9.8;

r1=0.8;
r2=0.8;
l(1)=l;
v(1)=0.1;

for i=1:50,
    if i==1,
        t(i)=(1+r1)*l(i)/v(i);
    else
        t(i)=t(i-1)+dt(i-1)+(1+r1)*l(i)/v(i);
    end
    dt(i)=(1+r2)*v(i)/(g*sin(th));
    l(i+1)=r1*l(i)+v(i)^2*(1-r2^2)/(2*g*sin(th));
    v(i+1)=r2*v(i);
end
te=t(50);
```

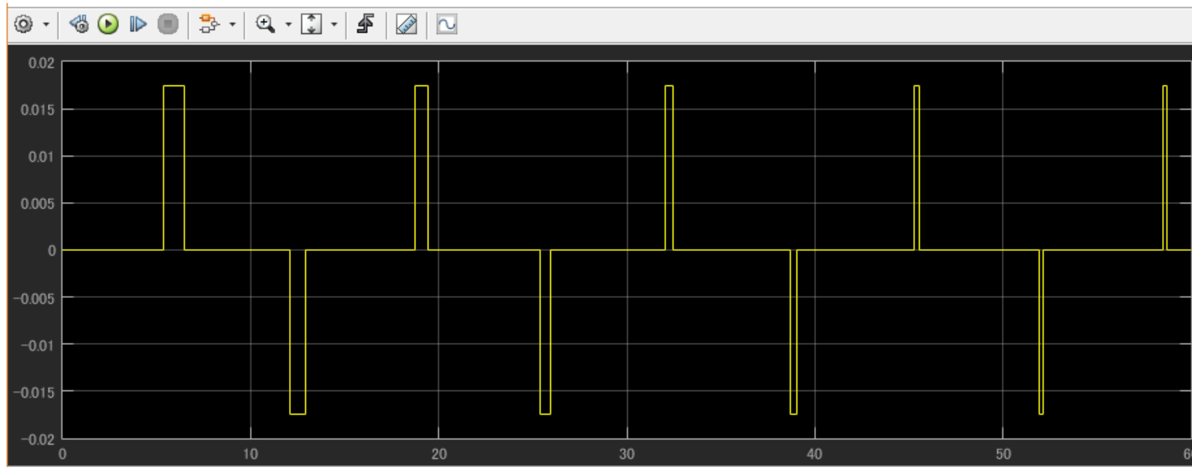
```
delta=0.001;
vt=[0];
vu=[0];
idx=1;
te=60;
for k=1:floor(te/delta),
    tn=k*delta;
    vt=[vt tn];
    if tn < t(idx),
        un=0;
    elseif tn-t(idx) < dt(idx),
            un=th;
    else
        un=0;
        idx=idx+1;
        th=-th;
    end
    vu=[vu un];
end
```

制御入力$u(t)$ を計算するMatlabコード

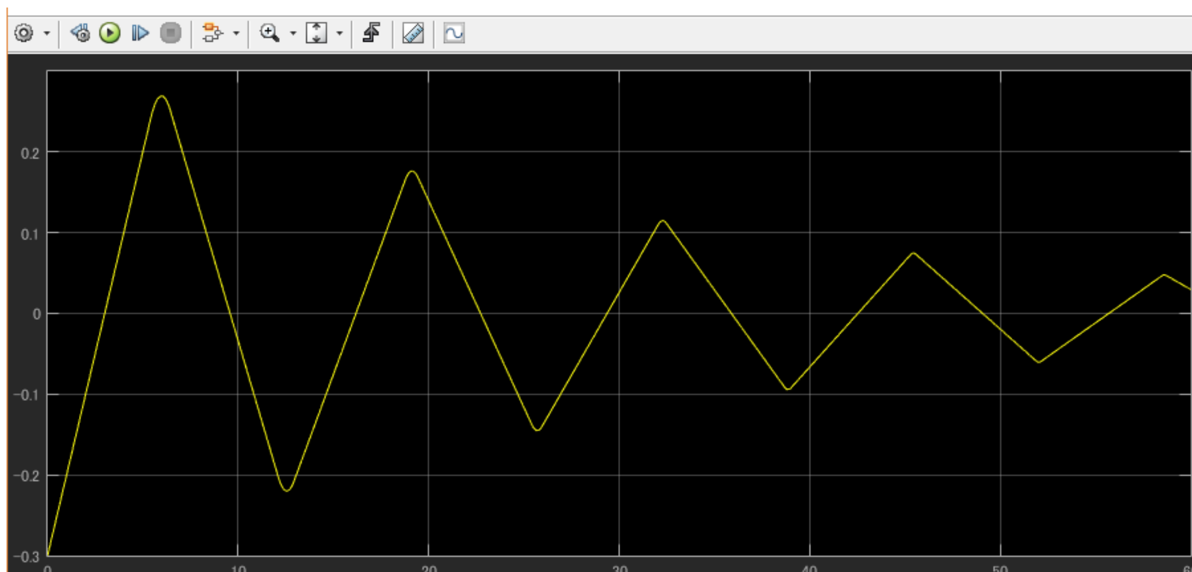
数値計算結果：



$x(t)$ の時間応答を
計算する Simulink ブロック

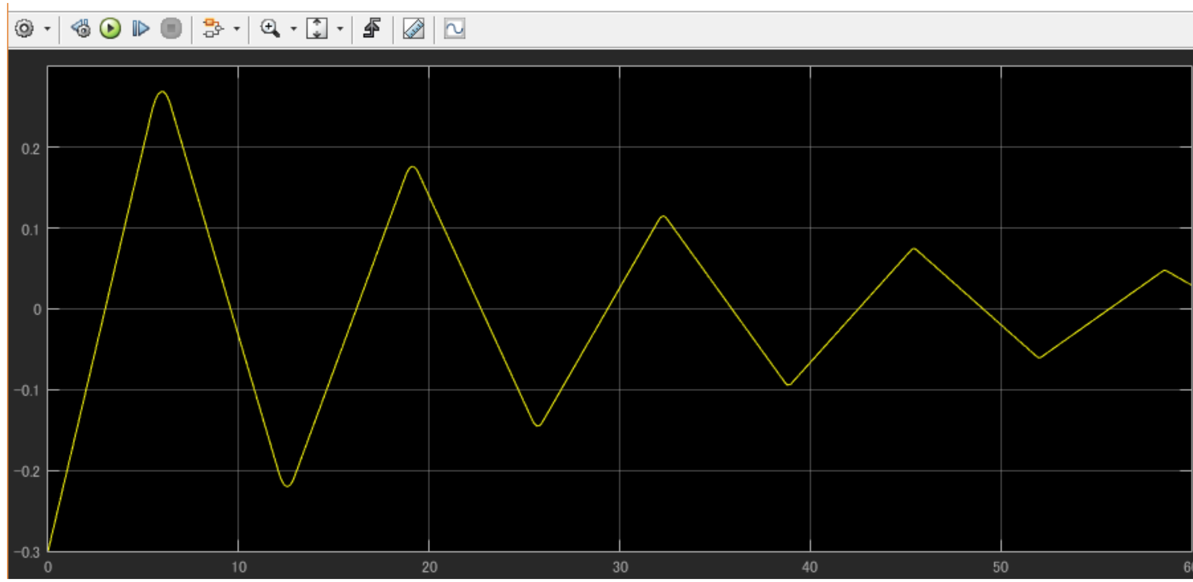


制御入力 $u(t)$ (レール角度)

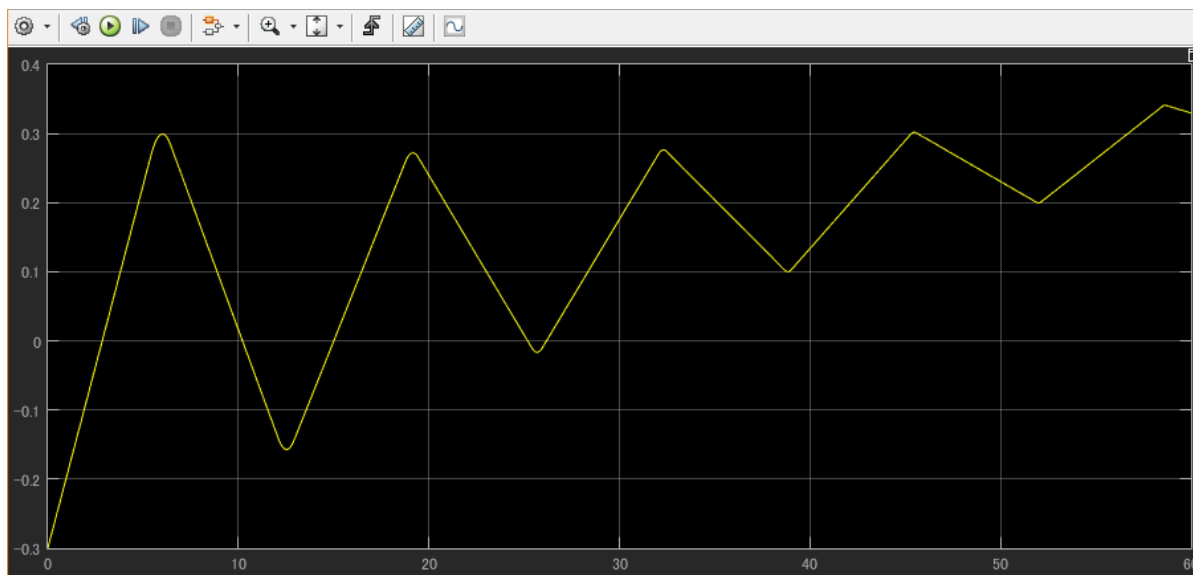


被制御量 $x(t)$ (ボール位置)

初期速度 v_1: 設定どおり



初期速度 v_1: 誤差+5%



被制御量 $x(t)$ (ボール位置)

この戦略では

- 全ての操作を事前にオフラインで求めておかなければならない.
- 初期条件が変わると再計算が必要.
- 摩擦等のわずかな変化を許容できない.

↓

これでは「思いのままに動かしている」といえない.

To Do （再）

1） Webにアクセスしてこの資料をダウンロードする.
2） 教科書を購入する.
3） 1． 序論， 2.1～2.3 を読む.

集計