システム制御最適化特論

前期後半 月 5, 6限 14:00-16:10 5号館 第16講義室

担当:平田 健太郎

7/29 第7回   線形行列不等式(LMI)による制御系解析・設計

講義日程（予定）

6/17　第1回　最適化問題と線形計画法（LP）
6/24　第2回　内点法
7/1　第3回　最短経路問題と動的計画法（DP）
7/8　第4回　最適制御
7/18*　第5回　二次計画法(QP)とモデル予測制御(MPC)
7/22　第6回　凸解析と線形行列不等式
7/29　第7回　線形行列不等式(LMI)による制御系解析・設計
8/5　第8回　非線形最適化

* irregular

安定性判別

線形システム $\dot{x}(t) = Ax(t)$ は安定か？

⇨ Lyapunovの安定定理より

$$PA + A^T P < 0, P > 0$$

に解が存在すれば安定，しなければ不安定

最小化すべき目的関数を特に定めず, 実行可能解を探す問題 ⇒ feasibility problem

状態フィードバックによる安定化

制御対象： $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

制御則（状態フィードバック）： $u(t) = Kx(t)$

閉ループ系： $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$

⇒ Lyapunov不等式条件を適用

$$\underline{P}(A + B\underline{K}) + (A + B\underline{K})^T\underline{P} < 0, P > 0$$

変数同士の積がある⇒LMIでない

$P > 0$ であれば P は正則 $\Leftrightarrow X := P^{-1}$ が存在

行列の前後から $X^T (= X), X$ を掛けても正定性は変化しない

$$
\begin{aligned}
&XP(A + BK)X + X(A^T + K^T B^T)PX \\
&= (A + BK)X + X(A^T + K^T B^T) \\
&= AX + XA^T + B(KX) + (KX)^T B^T < 0
\end{aligned}
$$

KX を別の変数 M とおけば LMI になる.　変数変換法

求まった M, X から $K = MX^{-1}$ と逆算できる.

$$
\boxed{AX + XA^T + BM + M^T B^T < 0, \quad X > 0}
$$

大小関係:

$$A = T^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{bmatrix} T \text{と下三角化}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{tr}A &= \mathbf{tr}\left(T^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{bmatrix} T\right) = \mathbf{tr}\left(TT^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ (\lambda_i : A\text{の固有値}) \end{aligned}$$

よって正定行列のトレースは正

$$A - B > 0 \to \mathbf{tr}(A-B) > 0 \to \mathbf{tr}\ A > \mathbf{tr}\ B$$

SDPに対する内点法

詳細は省略するが, LPに対する主双対内点と同様の形式で, SDPに対する内点法も構成できるため, LMIを用いた解析・設計に対しても, 効率的な解法が利用できる.

H_2性能

$$\|G\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}(G(j\omega)^* G(j\omega)) d\omega \right)^{1/2}$$

$G = C(sI - A)^{-1}B$

G は安定と仮定

By Parseval's thm. (Plancherel's thm.)

$$= \left(\int_0^{\infty} \mathrm{tr}(g(t)^T g(t)) dt \right)^{1/2}$$

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G) = Ce^{At}B$

(インパルス応答)

$g(t) = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{bmatrix}$ とおくと $g_i(t)$ は i 番目の入力チャンネルに対してインパルス入力を与えたときの応答

$$\|G\|_2^2 = \int_0^{\infty} \sum_i g_i(t)^T g_i(t)\, dt = \sum_i \int_0^{\infty} |g_i(t)|^2\, dt = \sum_i \|g_i(t)\|_2^2$$

$$\|G\|_2 = \left(\int_0^\infty \mathrm{tr}(g(t)^T g(t))dt\right)^{1/2}$$
$$= \mathrm{tr}\left[B^T\left(\int_0^\infty e^{A^T t}C^T C e^{At}dt\right)B\right]^{1/2} = \mathrm{tr}\left(B^T P_0 B\right)^{1/2}$$

P_0 はリアプノフ方程式 $P_0 A + A^T P_0 + C^T C = 0$ の正定解

$PA + A^T P + C^T C < 0$ の正定解 P との間に, 大小関係

$P - P_0 > 0$ が成り立つ.

$\|G\|_2 < \gamma \iff$

$$\exists P > 0, Z > 0 \quad \text{s.t.}$$
$$PA + A^T P + C^T C < 0$$
$$Z - B^T P B > 0$$
$$\mathrm{tr}\,(Z) < \gamma^2$$

しかし状態フィードバック安定化の場合と同様,
この解析条件は設計には向かない

トレースの可換性から

$$g(t) = Ce^{At}B$$

$$\|G\|_2^2 = \int_0^\infty \mathrm{tr}(g(t)^T g(t))\,dt = \int_0^\infty \mathrm{tr}(g(t)g(t)^T)\,dt$$

$$= \mathrm{tr}\left[C\left(\int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}\,dt\right)C^T\right] = \mathrm{tr}(CX_0C^T)$$

X_0 はリアプノフ方程式 $AX_0 + X_0A^T + BB^T = 0$ の正定解

先と同様に, リアプノフ不等式 $AX + XA^T + BB^T < 0$ の正定解 X との間に, 大小関係 $X - X_0 > 0$ が成り立つ.

$$\|G\|_2 < \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{gathered} \exists X > 0, W > 0 \ \ \mathrm{s.t.} \\ AX + XA^T + BB^T < 0, \\ W - CXC^T > 0, \\ \mathrm{tr}\,(W) < \gamma^2 \end{gathered}$$

$$\|G\|_2 < \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{gathered} \exists X > 0, W > 0 \ \text{ s.t.} \\ AX + XA^T + BB^T < 0, \\ W - CXC^T > 0, \\ \mathrm{tr}\,(W) < \gamma^2 \end{gathered}$$

この解析条件において A を $A + BK$ で置き換え, $KX =: M$ とおけば状態フィードバックの設計条件が得られる.

$$(A + BK)X + X(A + BK)^T + BB^T < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{gathered} AX + BM + XA + M^T B^T + BB^T < 0, \\ W - CXC^T > 0, \\ \mathrm{tr}(W) < \gamma^2, X > 0, W > 0 \end{gathered}$$

このLMIに解 X, W, M が存在する γ の最小値を探索する. 最適なフィードバックゲインは$K = MX^{-1}$ によって定める.

■ 最適制御問題との関係

制御対象（状態方程式）

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0$$

評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\}\, dt, Q \geq 0, R > 0$$

$$\Downarrow$$

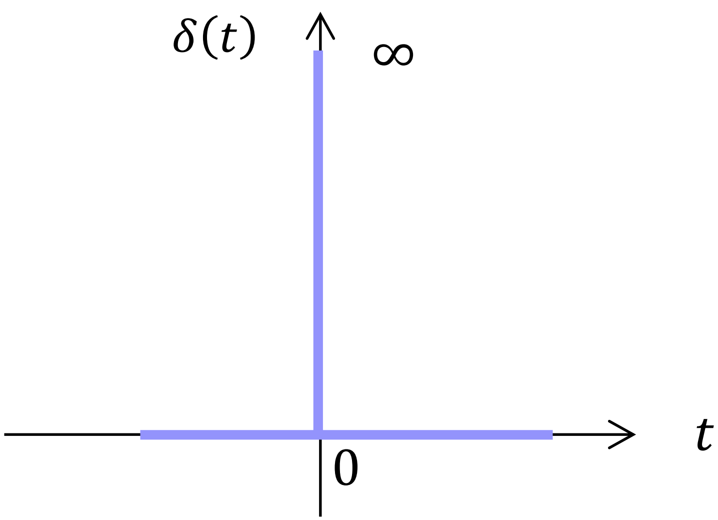
代数リカッチ方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

最適制御則

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t) = -Kx(t)$$

インパルス関数 $\delta(t)$



$t = 0$ のとき $+\infty$ の値をとり,
それ以外の場合は 0 となる.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

と規格化されている.

$$\delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon}, t \in [-\epsilon, \epsilon\} \\ 0, \text{それ以外} \end{cases}$$

$\epsilon \to 0+$ で近似

一入力系 $B = b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ を考える.

初期状態を $x(0) = 0$ とし, 制御入力を $u(t) = \delta(t) + kx(t)$ とすると

$$
\begin{aligned}
x(0+) &= x(0) + \lim_{\epsilon\to 0+}\int_0^{\epsilon}\dot{x}(t)dt \\
&= x(0) + \lim_{\epsilon\to 0+}\int_0^{\epsilon}[(A+bk)x(t) + b\delta(t)]dt \\
&\simeq x(0) + \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\epsilon(A+bk)x(0) + b\int_0^{\epsilon}\delta(t)dt\right] = b
\end{aligned}
$$

したがって,初期状態が 0 である状態フィードバック系にインパルス入力を加えることと, 初期値を $x(0) = b$ として自由応答を考えることは同じ.

$u(t) = kx(t)$ のとき

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + r u^T u)\,dt = \int_0^\infty x^T (Q + r k^T k) x\,dt$$

これは出力を $y(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{r}k \end{bmatrix} x(t)$ とさだめたときの $y(t)$ の二乗積分値になっている.

したがって, 重み Q, r と初期値 $x_0 = b$ に対する最適制御問題は, $x_0 = 0, C = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{r}k \end{bmatrix}$ とした場合の状態フィードバック系のインパルス応答の二乗積分値最小化に等しい.

インパルス応答の二乗積分値を, 入力が多チャンネルである場合に一般化したものがシステムの $\mathcal{H}_2$ ノルムである.

$$G = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{r}k \end{bmatrix} \{sI - (A + bk)\}^{-1} b, \|G\|_2 < \gamma$$

$\Updownarrow$

$$AX + bM + XA + M^T b^T + bb^T < 0,$$

$$W - \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{r}k \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{r}k \end{bmatrix}^T > 0, \qquad k = MX^{-1}$$

$$\mathrm{tr}(W) < \gamma^2, X > 0, W > 0$$

ここで Schur Complement と呼ばれる次の性質を用いると

$$\begin{bmatrix} P & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} > 0 \iff Q > 0, P - SQ^{-1}S^T > 0$$

第2式第2項は

$$W - \begin{bmatrix} \sqrt{Q}X \\ \sqrt{r}kX \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{Q}X \\ \sqrt{r}kX \end{bmatrix}^T > 0 \iff \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{W} & \begin{matrix} \sqrt{Q}X \\ \sqrt{r}M \end{matrix} \\ \hline X\sqrt{Q} & M^T\sqrt{r} & X \end{array}\right] > 0$$

とできるので, これは X, M に関するLMIである.

Schur Complement

$$\begin{bmatrix} P & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} > 0 \iff \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\iff \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0, \qquad x_1^T P x_1 + x_1^T S x_2 + x_2^T S^T x_1 + x_2^T Q x_2 > 0 \quad \star$$

$\Rightarrow$ $x_1 = 0, x_2 \neq 0$ の場合を考えると $Q > 0.$

$x_1 \neq 0, x_2 = 0$ の場合を考えると $P > 0.$

変形すると

$$(x_2 - Q^{-1}S^T x_1)^T Q (x_2 - Q^{-1}S^T x_1) + x_1^T (P - SQ^{-1}S^T) x_1 > 0$$

$Q > 0$ より, 第1項は非負. $x_2 = Q^{-1}S^T x_1$ のとき, 最小値 0 をとる.
このときの条件から　$P - SQ^{-1}S^T > 0$ でなければならない.

逆に$Q>0$ かつ $P-SQ^{-1}S^T>0$ であるとき,

$\forall x_1 \neq 0$ に対して$x_1^T(P-SQ^{-1}S^T)x_1>0$ かつ $\forall x_3 \neq 0$ に対して$x_3^TQx_3>0$

$x_2 := x_3+Q^{-1}S^Tx_1$ とすると $x_2^TQx_2 \geq 0$ であるから

$\forall x_1 \neq 0$ かつ $\forall x_3 \neq 0$ に対して

$$x_1^T(P-SQ^{-1}S^T)x_1+(x_3+Q^{-1}S^Tx_1)^TQ(x_3+Q^{-1}S^Tx_1)>0$$

が成り立つが, これは

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} > 0$$

と等しい.

$\forall x_1 \neq 0$ かつ $\forall x_3 \neq 0$ ならば, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq 0$ であるので $\begin{bmatrix} P & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} > 0$

以上をまとめると

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), x(0) = b, u(t) = kx(t)$$

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + r|u|^2)\, dt < \gamma^2$$

$$\Updownarrow$$

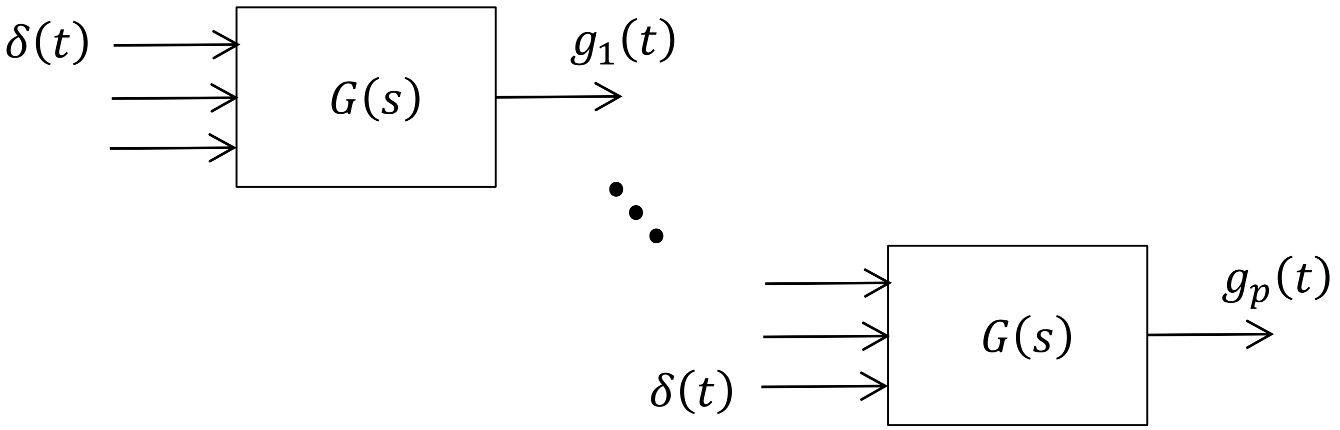
$$AX + bM + XA + M^T b^T + bb^T < 0,$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{W}} & \sqrt{Q}X \\ & & \sqrt{r}M \\ \hline X\sqrt{Q} & M^T\sqrt{r} & X \end{array}\right] > 0$$

$$\mathrm{tr}(W) < \gamma^2, X > 0, W > 0, k = MX^{-1}$$

多入力系 $B = [b_1, \cdots, b_p] \in \mathbb{R}^{n\times p}$ の場合を考えよう.

第 i チャンネルに対してインパルス入力を印加することと $x(0) = b_i$ とすることは等価であるから, $\mathcal{H}_2$ ノルムを求めること(最小化すること)は, p 回分の初期値応答を考えることに対応する.



しかし, Lagrangeの未定乗数法による導出の際に見たように, あるいは制御則の構成から明らかなように, 最適制御則は初期条件に依存しないため, 実際にはp 回分の設計問題を考える必要はない.

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

$$u = -R^{-1}B^TPx = -Kx$$

$$P(A - BR^{-1}B^TP) + (A - BR^{-1}B^TP)^TP + PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

したがって最適制御は自励系

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) = A_c x(t)$$

に初期値 $x(0)$ を与えたときの応答に関する下記の評価関数

$$J = \int_0^\infty x^T(t)(K^TRK + Q)x(t)\,dt$$

を最小化しており, その最小値は $x^T(0)Px(0)$ で与えられる.

いま

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B\tilde{u}(t)$$

なる系の第 i チャンネルに対してインパルス入力を印加することと $x(0) = b_i$ とすることは等価である.

$$J = \int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{R}K \end{bmatrix} x(t) \right\|^2 dt$$

であるから, 初期値 $x(0) = b_i$ に対する最適制御問題の J は,
システム

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B\tilde{u}(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{R}K \end{bmatrix} x(t)$$

の第 i 番目のインパルス応答 $g_i(t)$ の二乗積分値である.

$$J_i = \int_0^\infty \|g_i(t)\|^2 dt = b_i^T P b_i$$

これを全てのチャンネルについて加え合わせると

$$\sum_{i=1}^{p} J_i = \sum_{i=1}^{p} \int_0^\infty \|g_i(t)\|^2 dt = \|G(s)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{p} b_i^T P b_i$$

$$= \mathrm{tr}\left(\left[b_1, \cdots, b_p\right]^T P[b_1, \cdots, b_p]\right) = \mathrm{tr}(B^T P B)$$

フィードバックゲイン K はそれぞれの初期値からの応答を最小化しているので, $\|G(s)\|_2^2$ も最小化している. よって最適制御は

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B\tilde{u}(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{R}K \end{bmatrix} x(t)$$

の $\mathcal{H}_2$ ノルムを最小化する K を探す問題と等価である.

$B^T PB$ は p 次の正方行列であり, その i, j 要素は $b_i^T P b_j$ であることに注意

より直接的には, 最適制御問題の解は p. 13の解析条件

$$\|G\|_2 < \gamma \iff \begin{aligned} &\exists P > 0, Z > 0 \quad \text{s.t.} \\ &\quad PA + A^T P + C^T C < 0 \\ &\quad Z - B^T P B > 0 \\ &\quad \mathrm{tr}\,(Z) < \gamma^2 \end{aligned}$$

に対応しており, p. 19 のリカッチ方程式を変形したもの

$$P(A - BR^{-1}B^T P) + (A - BR^{-1}B^T P)^T P + PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

はリアプノフ方程式

$$PA_c + A_c^T P + C^T C = 0, A_c = A - BR^{-1}B^T P, C = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{R}K \end{bmatrix}$$

対応しており, ノルム評価は $\mathrm{tr}(B^T PB)$ となる.

以上をまとめると

$$\min_{K} J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u)\, dt$$

$$s.t.\ \ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0, u(t) = Kx(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$\min_{W,X,M} \mathrm{tr}(W)$$

$s.t.$

$$AX + BM + XA + M^T B^T + BB^T < 0,$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{W} & \begin{matrix} \sqrt{Q}X \\ \sqrt{R}M \end{matrix} \\ \hline X\sqrt{Q} & M^T\sqrt{R} & X \end{array}\right] > 0, \quad X > 0, W > 0$$

$$K = MX^{-1}$$