システム制御最適化特論

前期後半 月 5, 6限 14:00-16:10 5号館 第16講義室

担当:平田 健太郎

7/22 第6回 凸解析と線形行列不等式

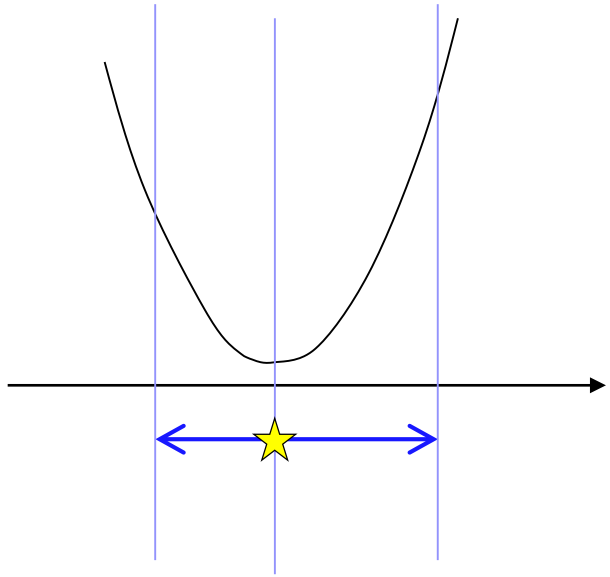
講義日程（予定）

6/17　第1回　最適化問題と線形計画法（LP）
6/24　第2回　内点法
7/1　第3回　最短経路問題と動的計画法（DP）
7/8　第4回　最適制御
7/18*　第5回　二次計画法(QP)とモデル予測制御(MPC)
7/22　第6回　凸解析と線形行列不等式
7/29　第7回　線形行列不等式(LMI)による制御系解析・設計
8/5　第8回　非線形最適化

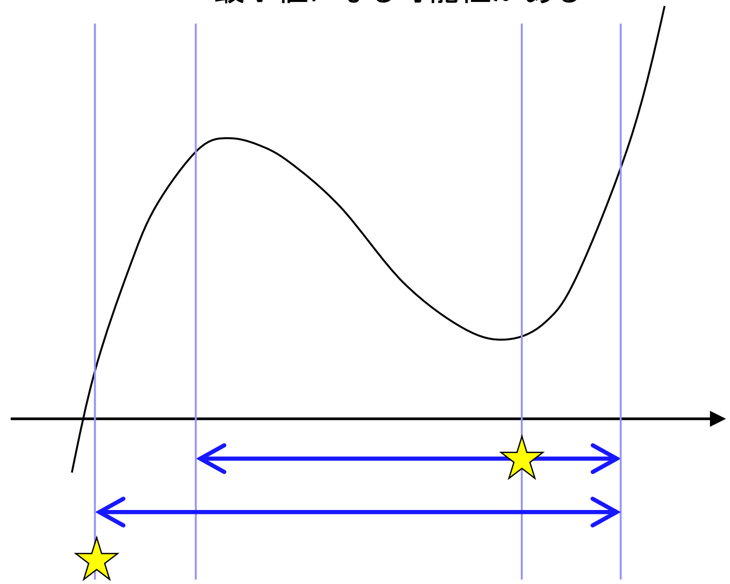
* irregular

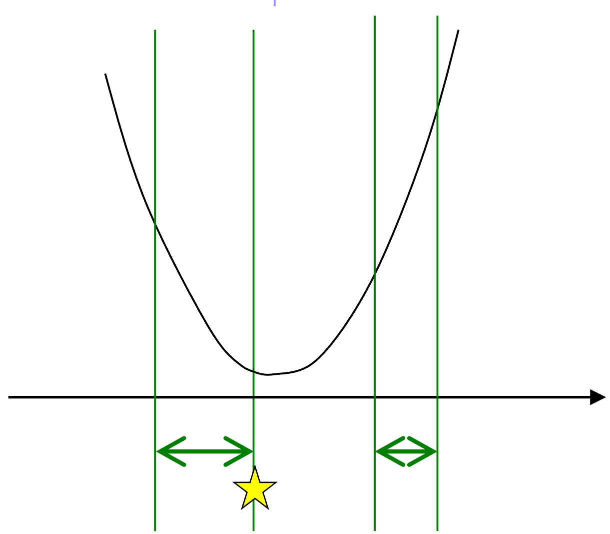
- 凸解析と線形行列不等式

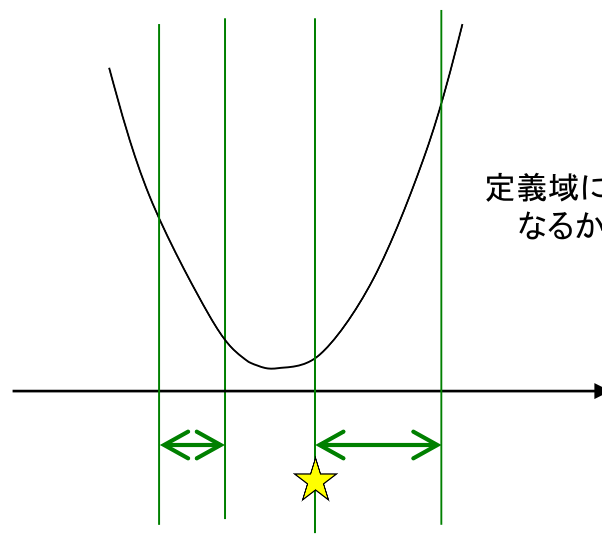
関数値が近傍に比べて小さい
点をひとつ見つければよい



定義域によっては，どちらも
最小値になる可能性がある







定義域によっては，どこが最小に
なるか複数の可能性がある

集合の凸性

定義 (Definition)

集合 C が凸

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in C \rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in C, \forall \alpha \in [0,1]$$

超平面

A hyperplane: $\{x \mid a^T x = b\}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$

半空間

A (closed) halfspace: $\{x \mid a^T x \leq b\}$

これらはいずれも凸である.

集合 $S_i\ (i=1,\cdots,m)$ の共通集合を $\cap_{i=1}^{m} S_i$ で表す.

定理 (Theorem)

任意個の凸集合 $S_i, i \in I$ の共通集合 $\cap_{i\in I} S_i$ は凸集合である.

$S \coloneqq \cap_{i\in I} S_i$ とする. x, y を S の任意の元とすると, 定義から $x, y \in S_i, \forall i \in I$. S_i は凸であるから,$\forall \alpha \in [0,1]$ に対して, $z \coloneqq \alpha x + (1-\alpha)y \in S_i$ が成り立つ. これがすべての $i \in I$ について成り立つから, z は S の元である. よってS は凸.

関数の凸性

定義 (Definition)

関数 $f(x)$ が凸 $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in C \rightarrow$$
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),$$
$$\forall \alpha \in [0,1]$$

線形な目的関数 $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}$ は凸か？

凸計画問題 (Convex Programming) :

制約集合 S が凸集合であり，目的関数 f が S 上の凸関数であるような最適化問題

最重要な性質

凸計画問題が局所最適解をもつならば，それは大域的最適解である．

集合 C が凸 $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in C \rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in C, \ \forall \alpha \in [0,1]$

関数 $f(x)$ が凸 $\Leftrightarrow$

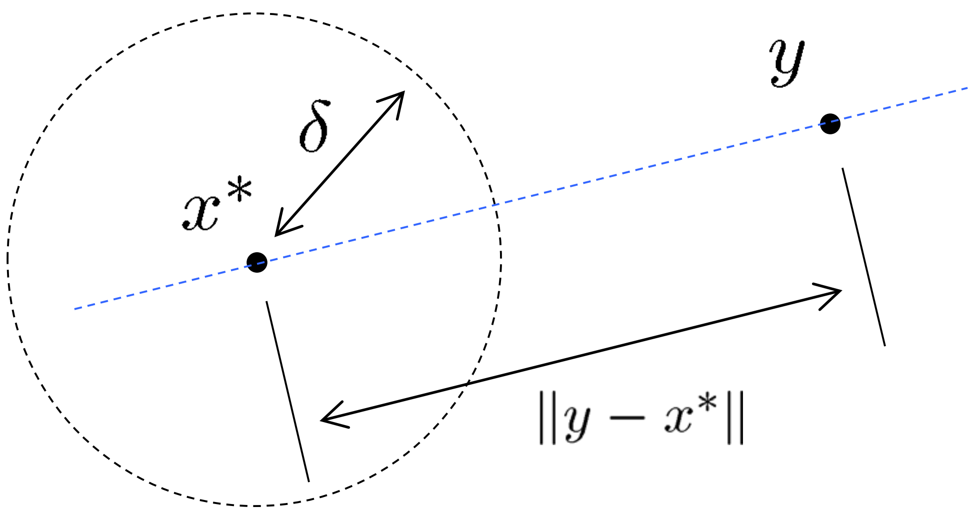
$$\forall x, y \in C \rightarrow f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \forall \alpha \in [0,1]$$

証明

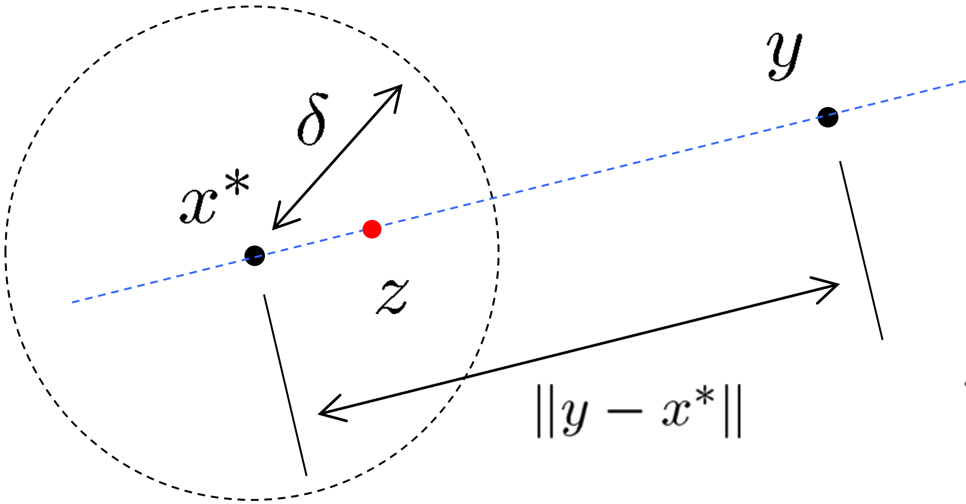
x^* が局所最適解だとする. すなわち正数 δ が存在して,
$x \in S, \|x - x^*\| < \delta$ なるすべての x に対して $f(x^*) < f(x)$ である.

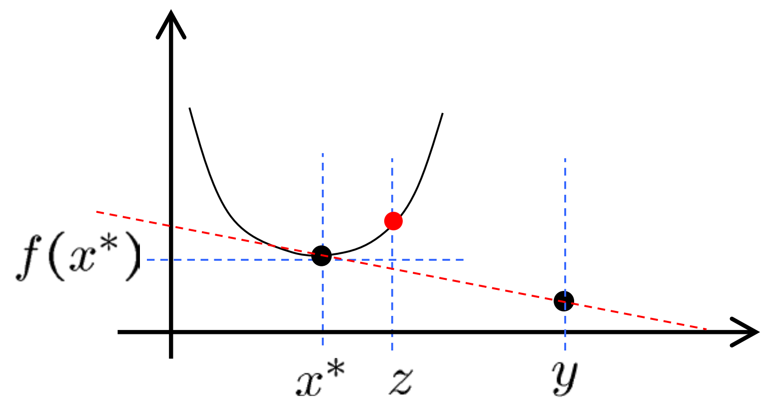
x^* が大域的最適解でないとすると, $\underbrace{f(y) < f(x^*)}_{\text{(a)}}$ となるような,
ある $y \in S$ が存在する.

このとき, 明らかに $\|y - x^*\| \geq \delta$ である. $\alpha = \delta/(2\|y - x^*\|)$ と定めると,
$\underbrace{\alpha \in [0,1]}_{\text{(b)}}$ である.



$$\alpha = \delta / (2\|y - x^*\|)$$





いま S は凸であるから $z = (1-\alpha)x^* + \alpha y$ とすると, $z \in S$ であり
$\|z - x^*\| = \alpha\|y - x^*\| < \delta/2 < \delta$ である.

したがって, $\underline{f(x^*) < f(z)}$ でなければならない.
(c)

一方, f は凸であるから, $f(z) < \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x^*)$.

(a), (b) から, $f(z) < f(x^*)$ となる. これは (c) と矛盾する.

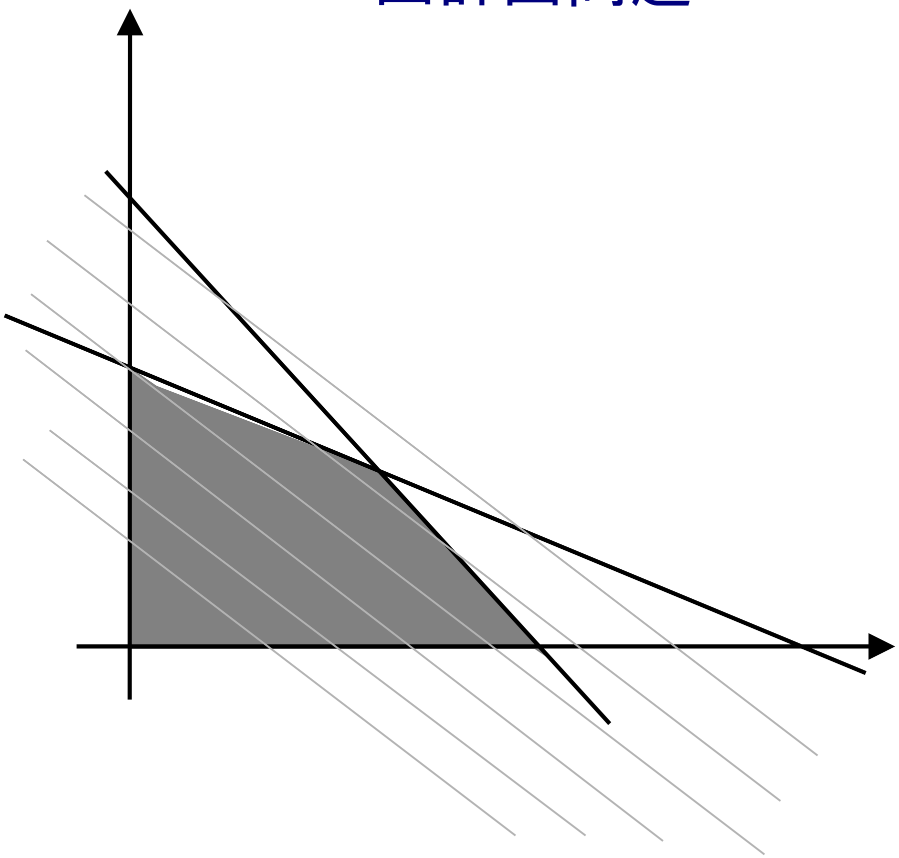
線形計画問題 (Linear Programming)：

実行可能領域 $Ax \leq 0, x \geq 0$ は凸多面体 ⇒ LPは最も簡単な凸計画問題

線形関数 $c^T x$ は凸関数

$$\min c^T x$$

$$\text{subject to} \quad Ax = b, \; x \geq 0$$



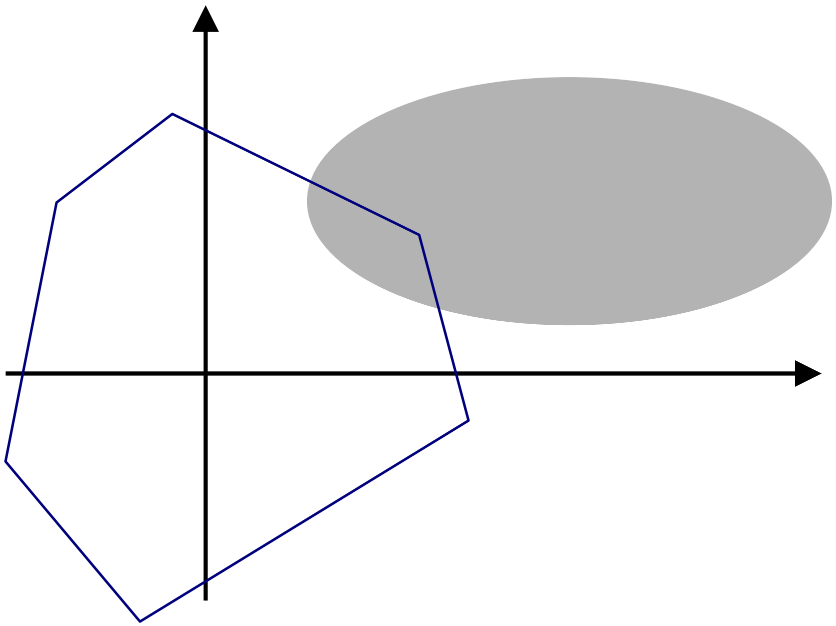
2次計画問題（Quadratic Programming）

例：　制約条件は1次　（凸集合）
　　　目的関数は二次関数（凸関数）　　⇒ 凸計画問題

ex. モデル予測制御 (MPC)

$$\min \phi(x,y) := x^2 + y^2$$

subject $\quad A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b$



線形計画問題(LP)

$$\min c^T x$$

subject to $Ax = b, x \geq 0.$

2次計画問題(QP)

$$\min \phi(x, y) := x^2 + y^2$$

subject $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b$

半正定値計画問題(Semi Definite Programming)

LMIによる制御系の解析・設計

凸計画問題(CP)

半正定値計画問題(Semi Definite Programming)

半正定な行列変数に関する（半正定性の意味での）不等式制約のもとでの最適化問題

⬇

行列の正定(値)性, 半正定(値)性

対称行列 A が正定であるとは，任意のベクトル $x \neq 0$ に対して二次形式 $x^T Ax$ が正となることをいい，$A > 0$ と表記する．

【正定性の特徴づけ】

$$A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i(A) > 0, \forall i$$

$\lambda_i(A)$:　行列 A の固有値 (番号は適当に与える)

一般の(正方)行列が対角化可能かは分からない.

しかし, 対称行列は, 直交行列を用いて, いつでも対角化可能であることが知られている.

A が対称行列 $\Longleftrightarrow$ $TAT^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} =: \Lambda$ となる直交行列 T が存在

λ_i: A の固有値

T は正則なので, $x \neq 0$ と $y := Tx \neq 0$ は同値.

$x^T A x = x^T (T^T \Lambda T) x = y^T \Lambda y$

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ とすると, $y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$

よって $y \neq 0$ のとき, $y^T \Lambda y > 0$ となるには, $\lambda_i > 0, \forall i$ が必要十分.

これは $A > 0$ の条件でもある.

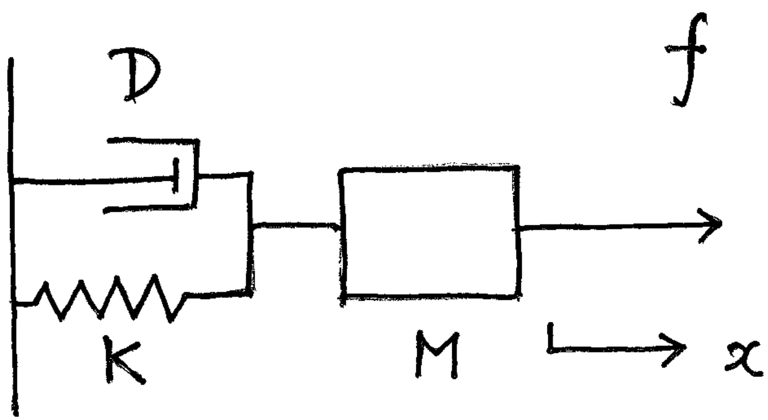
正定行列の集合は凸であることを示せ.

ある次数の全ての正定行列からなる集合は凸である.

これ以降必要となる最小の現代制御理論（学部でシステム制御Ⅱを履修していない人向け）

動的な挙動は, 運動方程式などの微分方程式によって記述される.

例) マス・バネ・ダンパー系



運動方程式：

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = f$$

運動方程式：　$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = f$

これは2階の微分方程式であるが, 連立の1階微分方程式で表現できる.

$$z_1 = x, z_2 = \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}z_1 = \dot{x} = z_2$$
$$\frac{d}{dt}z_2 = \ddot{x} = \frac{1}{m}(f - d\dot{x} - kx) = -\frac{k}{m}z_1 - \frac{d}{m}z_2 + \frac{1}{m}f$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} f$$

$$\Downarrow$$

$\dot{x} = Ax + Bu$　：これを状態方程式という

(開ループ)安定性

入力 u を加えないとき, システムは一定の状態に近づいていこうとするか？

適当な初期値を与えたときに, 時間の経過とともに, 状態が零に近づいていくか？

⬇

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), x(0) = x_0$$

⬇

$$x(t) \to 0\ ?, (t \to \infty)$$

$\dot{x}(t) = Ax(t)$: ベクトル値関数 $x(t)$ の微分方程式

簡単化

スカラー $x(t) \in \mathbb{R}$ の場合

$\dot{x}(t) = ax(t)$ の解は $x(t) = e^{at}x(0)$

$a > 0$ ならば $t \to \infty$ で発散

$a < 0$ ならば $t \to \infty$ のとき $x(t) \to 0$

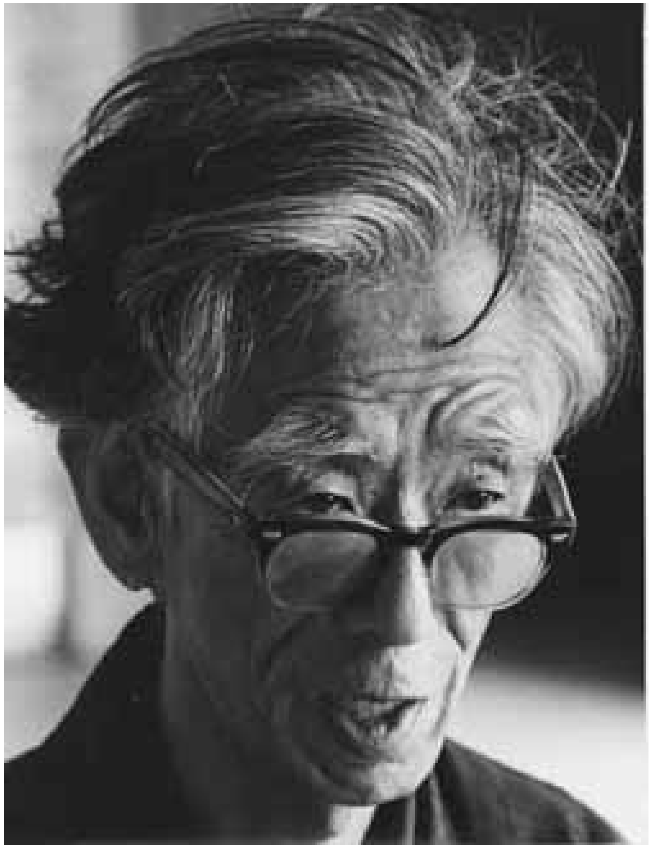
一般論

$\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) > 0$ ならば $x(t)$ は $t \to \infty$ で発散

$\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0$ ならば $t \to \infty$ のとき $x(t) \to 0$

特性方程式の係数列から判定する　⇒ Routh-Hurwitz の安定判別法

固有値を計算せずに判定したい



正定性による制御系の特徴づけの例：

リアプノフの安定定理

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ の解，あるいは行列 A が安定である．
$\Leftrightarrow$ 任意の $Q > 0$ に対してリアプノフ方程式

$$PA + A^T P + Q = 0 \tag{1}$$

が一意的な解 $P > 0$ をもつ．

Key point 1: 行列 $\boldsymbol{P}$の正定性がシステムの安定性を特徴づけている.

$Q > 0$ は任意なので不等式 $PA + A^T P < 0$ を考えても同じ

Key point 2: 負定性を表す不等式が条件式となる.

リアプノフの安定定理の証明:

$(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$

$PA + A^T P = -Q, Q > 0$ が一意解 $P > 0$ をもつ

⇓ 自明

$PA + A^T P < 0$ が解 $P > 0$ をもつ

$PA + A^T P = -Q, Q > 0$ が一意解 $P > 0$ をもつ

⇑

$PA + A^T P < 0$ が解 $P > 0$ をもつ

⇔ システム $\dot{x} = Ax$ は指数安定

直接示すには双対LMIの知識が必要

$$Q := -(A^T P + PA) > 0$$

$$v(t) := x(t)^T P x(t) \geq 0, \forall t \geq 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{v}(t) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x \leq 0, \forall t \geq 0.$$

$$\Downarrow$$

$v(t)$ は単調非増加

$$\Downarrow$$

$$v(t) \leq v(0) = x(0)^T P x(0), \forall t \geq 0.$$

他方, 正定行列の性質から

$$v(t) = x^T P x \geq \lambda_{\min}[P] \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|x\|^2 \leq v(t)/\lambda_{\min}[P] \leq v(0)/\lambda_{\min}[P]$$

したがって $x(t)$ は（少なくとも）有界.

指数安定性をいう.

$$\dot{v}(t) = -x^T Qx \le 0,\ x^T Qx \ge \lambda_{\min}[Q]\|x\|^2,\ v(t) = x^T Px \le \lambda_{\max}\,[P]\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \dot{v}(t) = -x^T Qx \le -\lambda_{\min}[Q]\|x\|^2 \le -\frac{\lambda_{\min}[Q]}{\lambda_{\max}\,[P]} v(t)$$

比較補題: $\dot{v}(t) \le \mu v(t), \forall t \ge t_0 \to v(t) \le e^{\mu(t-t_0)} v(t_0)$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{\min}\,[P]|x|^2 \le x^T Px = v(t) \le e^{-\lambda t} v(0), \lambda := \frac{\lambda_{\min}[Q]}{\lambda_{\max}\,[P]}$$

$$|x(t)| \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\,[P]}} e^{-\frac{\lambda}{2}t}\sqrt{v(0)}, \quad \forall t \ge 0$$

したがってシステム $\dot{x} = Ax$ は指数安定

比較補題: $\dot{v}(t) \le \mu v(t), \forall t \ge t_0 \rightarrow v(t) \le e^{\mu(t-t_0)} v(t_0)$

$$u(t) \coloneqq e^{-\mu(t-t_0)} v(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{u} = -\mu e^{-\mu(t-t_0)} v(t) + e^{-\mu(t-t_0)} \dot{v} \le 0$$

$u(t)$ は単調非増加

$$u(t) = e^{-\mu(t-t_0)} v(t) \le u(t_0) = v(t_0)$$

$$\Rightarrow \quad v(t) \le e^{\mu(t-t_0)} v(t_0)$$

LMI(線形行列不等式)とは

$$F(x) := F_0 + x_1F_1 + x_2F_2 + \cdots + x_mF_m > 0$$

F_i: 与えられた対称行列

$x := (x_1 \cdots x_m)^T$: 変数ベクトル

リアプノフ不等式による安定条件

$XA + A^TX < 0,\ \ X > 0$ は **LMI** になる

X が 2 次元の場合の例:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LMI(線形行列不等式)とは

$$F(x) := F_0 + x_1F_1 + x_2F_2 + \cdots + x_mF_m > 0$$

F_i: 与えられた対称行列
$x := (x_1 \cdots x_m)^T$: 変数ベクトル

リアプノフ不等式による安定条件
$XA + A^TX < 0,\ X > 0$ は **LMI** になる

X が **2** 次元の場合の例:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LMIで規定される集合は凸である