# システム制御最適化特論

前期後半 月 5, 6限 14:00-16:10 5号館 第16講義室

**担当:平田 健太郎**

7/18　第5回　二次計画法(QP)とモデル予測制御(MPC)

# 講義日程（予定）

6/17　第1回　最適化問題と線形計画法（LP）
6/24　第2回　内点法
7/1　第3回　最短経路問題と動的計画法（DP）
7/8　第4回　最適制御
7/18* 第5回　二次計画法(QP)とモデル予測制御(MPC)
7/22　第6回　凸解析と線形行列不等式
7/29　第7回　線形行列不等式(LMI)による制御系解析・設計
8/5　第8回　非線形最適化

* irregular

## ■ 最適制御問題

制御対象: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \; x(0) = x_0$

評価関数: $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$

$$\min_u J(u)$$

$$J = \int_0^\infty \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\} dt$$

**subject to** $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \; x(0) = x_0$

時間関数 $u(t), t \in [0, \infty)$ を決定変数とする最適化問題

# 現代制御理論によれば

**最適制御問題の解は**

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

**の解$P$ を用いて**

$$u(t) = -BR^{-1}B^T Px(t)$$ で与えられる

★は $u(t)$ が 最適制御入力であるための必要条件

$u(t)$ が $J$ を最小化する

★ $u(t)$ が解 $P$ によって上のように表される.

★は $u(t)$ が 最適制御入力であるための十分条件

必要条件の導出方法は, Lagrangeの未定乗数法によるもの,
動的計画法によるもの（前述）などがある.

この問題では, 制約条件は行列方程式（リッカチ方程式）になるが,
制約条件がスカラ関数でない場合の未定乗数法は, 多少複雑.

ただし, Lagrangeの未定乗数法は, 制約条件付きの非線形
最適化でよく使われるので, スカラの場合について説明しておく.

# Lagrangeの未定乗数法

等式制約つき非線形最適化問題

$$\min J(x) \ \textbf{s.t.} \ g(x) = 0$$

Lagrange 関数 $L(x, \lambda) = J(x) + \lambda g(x)$

Lagrange乗数

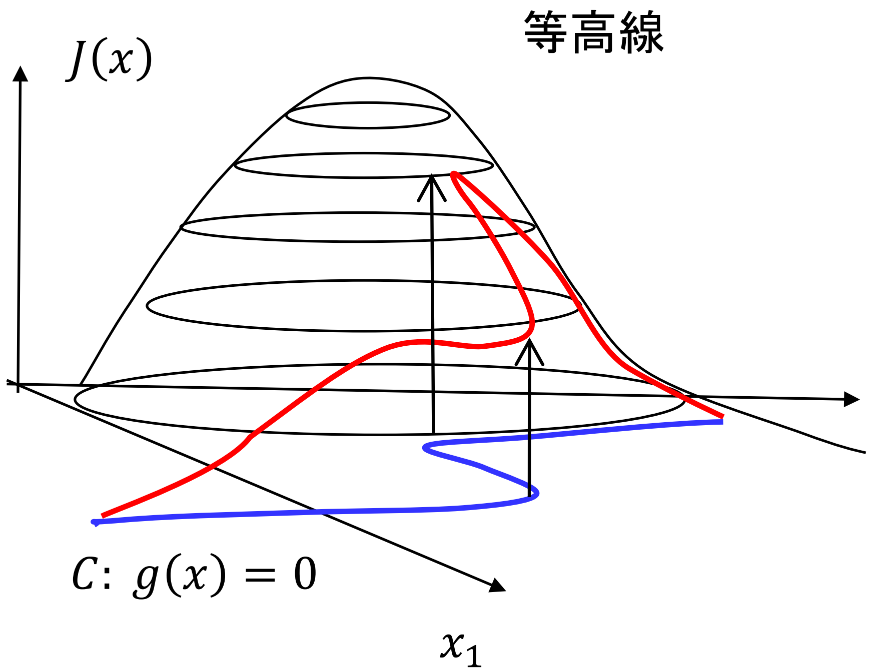
最適性の必要条件

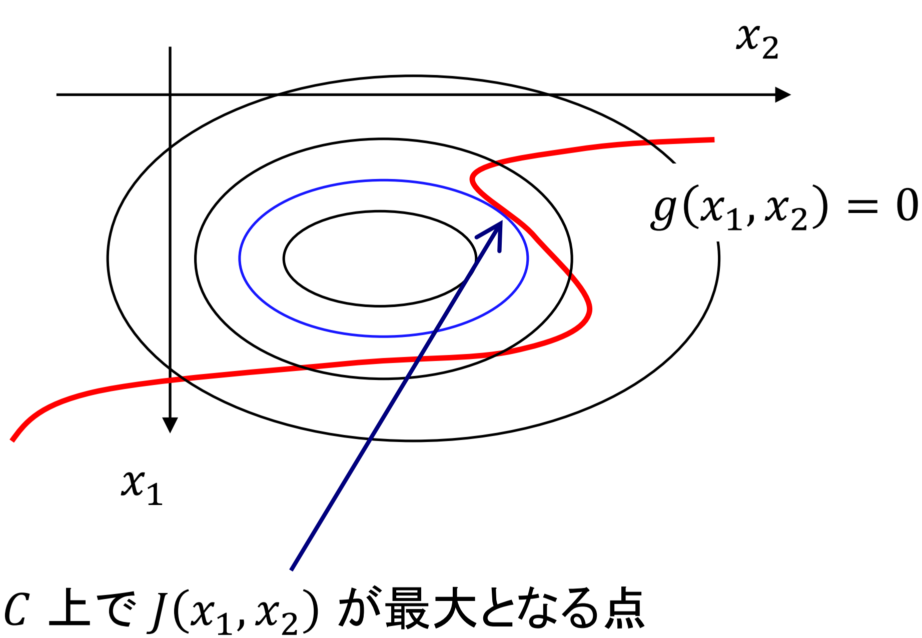
$x$ が極小点ならば $\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \ \ (g(x) = 0)$

$(x, \lambda)$ についての連立方程式を解くと，極小点の候補が得られる．

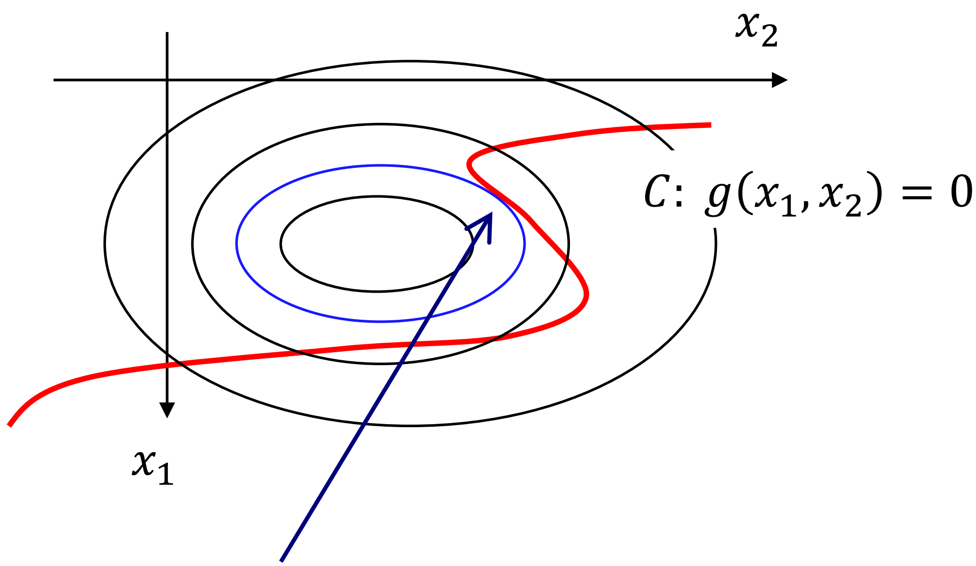
## ■2次元の例

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



上から見たところ




$C$ 上で $J(x_1, x_2)$ が最大となる点

$J(x_1, x_2)$ の等高線と $C$ は接している

$J(x_1, x_2)$ と $g(x_1, x_2)$ の勾配は同一方向
（スカラー倍）

関数の各座標方向の微係数の
組を勾配という.

$$\nabla f \coloneqq \left( \frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2} \right)$$

関数値が最も増加する方向を表す
から, 等高線とは直交する.
曲線に対しては法線方向となる.

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(J - \lambda g) = \frac{\partial}{\partial x_2}(J - \lambda g) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(J - \lambda g) = -g = 0$$

# 未定定数法の例: 行列の誘導ノルム

ベクトルノルム $||x||$ が与えられているとき，行列 $M$ のノルムを

$$||M|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Mx||}{||x||}$$

で定める． $||M||$ は $M$ の最大特異値で与えられる

(行列 $M$ の特異値は $M^T M$ の固有値の平方根)

$||x|| = 1$ なる制限を加えるとき，探索範囲が狭くなるので一般に

$$\sup_{x \neq 0} \frac{||Mx||}{||x||} \geq \sup_{||x||=1} ||Mx||$$

となる．

最大値を与える $x \neq 0$ に対して $y := x/\gamma, \gamma = \|x\|$ とおけば，
$\|y\| = 1$ であって

$$\frac{\|Mx\|}{\|x\|} = \frac{\|\gamma My\|}{\gamma} = \|My\|$$

となるから，$\|x\| = 1$ と限定しても最大値は変わらない．

そこで $\max \|Mx\|$ s.t. $\|x\| = 1$ を考えればよい．

$$L := \|Mx\|^2 - \lambda(\|x\|^2 - 1) = x^T M^T Mx - \lambda(x^T x - 1)$$

とすると極値をとるための必要条件は $\partial L/\partial x = 1/2(M^T M - \lambda I)x = 0$

すなわち $\lambda$ が $M^T M$ の固有値 ($M$ の特異値の平方) であるとき，条件を満たす．

$x^T M^T Mx = \lambda x^T x = \lambda$ なので，明らかに最大特異値のとき $\|Mx\|$ は最大．

# 予備知識: 二乗積分値の計算法

補題1

状態方程式: $\dot{x}(t) = Ax(t),\ \ x(0) = x_0,\ \ A$ : 安定

の解 $x(t)$ の（重みつき）二乗積分値

$$J = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt, Q > 0$$

はリアプノフ方程式 $PA + A^TP + Q = 0$ の解 $P$ を用いて

$$J = x_0^T P x_0$$

と表わされる.

## 補題1の証明

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[x^T(t)Px(t)] &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= x^T(t)(AP+PA)x(t) = -x^T(t)Qx(t)\end{aligned}$$

両辺を $0$ から $\infty$ まで積分　$\rightarrow J = x_0^T P x_0 - x^T(\infty)Px(\infty)$

$A$:　安定, $x(\infty) \rightarrow 0$

**仮定 1:　最適制御則は状態フィードバック $u = -Fx$ で与えられる.**

**仮定 1 より**

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt = \int_0^\infty x^T (Q + F^T R F) x dt$$

**先の補題 1 より**

$$J = x_0^T P x_0$$

$$P(A - BF) + (A - BF)^T P + Q + F^T R F = 0 \qquad ★$$

ここで $x_0$ をある仮定を満たす確率変数とすると, トレースの性質から $J$ の期待値は trace ($P$) となる.

➡ $P$ を変数とする目的関数

★ ➡ $g(P, F) = 0$　制約条件

## トレースの微分公式

$$X = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^n, \qquad tr(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} tr(X) = \begin{cases} 1 \ (i = j) \\ 0 \ (i \neq j) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial X} tr(X) = I$$

$$tr[AX] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} a_{jp} x_{pj} \qquad \frac{\partial}{\partial x_{ij}} tr(AX) = a_{ji} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial X} tr(AX) = A^T$$

$$tr[AXB] = \sum_{p=1}^{n} [AXB]_{pp} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{pi} [XB]_{ip} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{pi} x_{ij} b_{jp}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} tr(AXB) = \sum_{p=1}^{n} a_{pi} b_{jp} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_{ij}} tr(AXB) = A^T B^T$$

Lagrange関数

$$L(P,F,K) = \mathbf{tr}\ P + \mathbf{tr}\{K^T[P(A-BF)+(A-BF)^T P+Q+F^T RF]\}$$

Lagrange乗数

最適性の必要条件: $\partial L/\partial P = 0$, $\partial L/\partial F = 0$, $\partial L/\partial K = 0$

トレースの微分公式より

$$\frac{\partial L}{\partial P} = I + K(A-BF)^T + (A-BF)K = 0$$

$A-BF$ は安定と仮定．このとき上記リアプノフ方程式は対称解 $K>0$ をもつ．

（リアプノフの安定定理より）

$$\Rightarrow K = K^T, \exists K^{-1}$$

さらにトレースの微分公式より

$$\frac{\partial L}{\partial F} = -B^T P^T K - B^T P K^T + RFK + RFK^T = 0$$

$K = K^T, \exists K^{-1}$ より

$$2(RF - B^T P)K = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{F = R^{-1} B^T P} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial K} = 0$$

$$P(A - BF) + (A - BF)^T P + Q + F^T RF = 0 \qquad \text{(b)}$$

(a) into (b)

$$\boxed{PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \ \text{：代数リカッチ方程式}}$$

## 平方完成により十分性を示す

「代数Riccati方程式の安定化解$P$を用いたフィードバック$u(t) = R^{-1}B^TPx(t)$によって$J$は最小化される」を示す

仮定: $x(t) \to 0,\ t \to \infty$

$x^TPx$を微分，$[0,\infty)$で積分した結果を用いる

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x^TPx) &= \dot{x}^TPx + x^TP\dot{x} \\
&= (Ax+Bu)^TPx + x^TP(Ax+Bu)
\end{aligned}
$$

(解$x(t)$は状態方程式$\dot{x} = Ax + Bu$に従うから)

$$
\begin{aligned}
&= x^TA^TPx + x^TPAx + u^TB^TPx + x^TPBu \\
&= x^T(A^TP + PA)x + u^TB^TPx + x^TPBu \\
&= x^T(-Q + PBR^{-1}B^TP)x + u^TB^TPx + x^TPBu
\end{aligned}
$$

($PA + A^TP - PBR^{-1}B^TB + Q = 0$より)

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = \cdots$$
$$= x^T(-Q + PBR^{-1}B^T P)x + u^T B^T P x + x^T P B u$$

$$x^T Q x + u^T R u = u^T R u + x^T P B R^{-1} B^T P x + u^T B^T P x + x^T P B u - \tfrac{d}{dt}(x^T P x)$$

$$= \underbrace{(u + R^{-1}B^T P x)^T R (u + R^{-1} B^T P x)}_{\text{平方完成}} - \tfrac{d}{dt}(x^T P x)$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt \\ &= \int_0^\infty \|u + R^{-1}B^T P x\|_R^2 dt + \left[x^T P x\right]_\infty^0 \\ &= x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \|u + R^{-1} B^T P x\|_R^2 dt \end{aligned}$$

$u(t) \equiv -R^{-1}B^T P x(t)$ のとき $J$ は最小

# 2次計画問題

# 線形計画問題（Linear Programming）

目的関数，制約条件とも1次式(線形関数)

最も簡単な数理計画問題

↓

Next stageへ

# 2次計画問題（Quadratic Programming）

目的関数，制約条件とも2次式(1次式を含む)

比較的解きやすい問題

# 2次計画問題の例

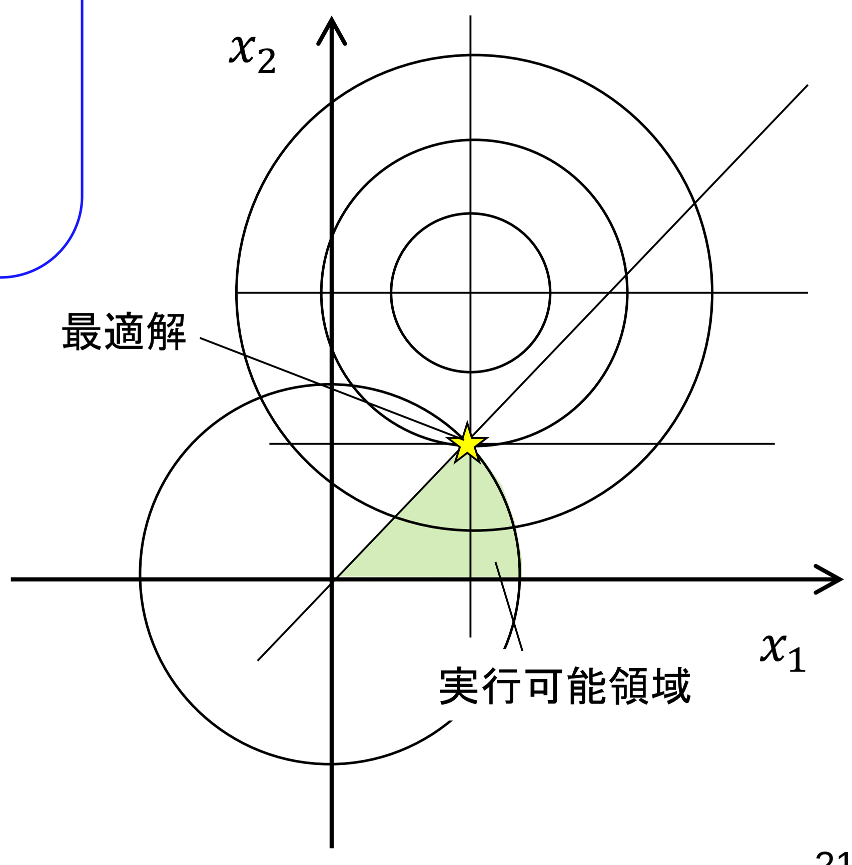
$$\min f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s.t.} \quad c_1(\boldsymbol{x}) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2 \leq 0$$

$$c_2(\boldsymbol{x}) = -x_1 + x_2 \leq 0$$

$$c_3(\boldsymbol{x}) = -x_2 \leq 0$$

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# 最適性の必要条件

$n$次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ を変数とする実数値関数 $f(\boldsymbol{x})$ に対して

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

を勾配ベクトルという．勾配ベクトルはその点において

関数 $f(\boldsymbol{x})$ が最も大きく増加する方向を示している.

等号が成立している制約条件を有効制約という.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) \coloneqq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$c_1(\boldsymbol{x}) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2$$

$$c_2(\boldsymbol{x}) = -x_1 + x_2$$

$$c_3(\boldsymbol{x}) = -x_2$$

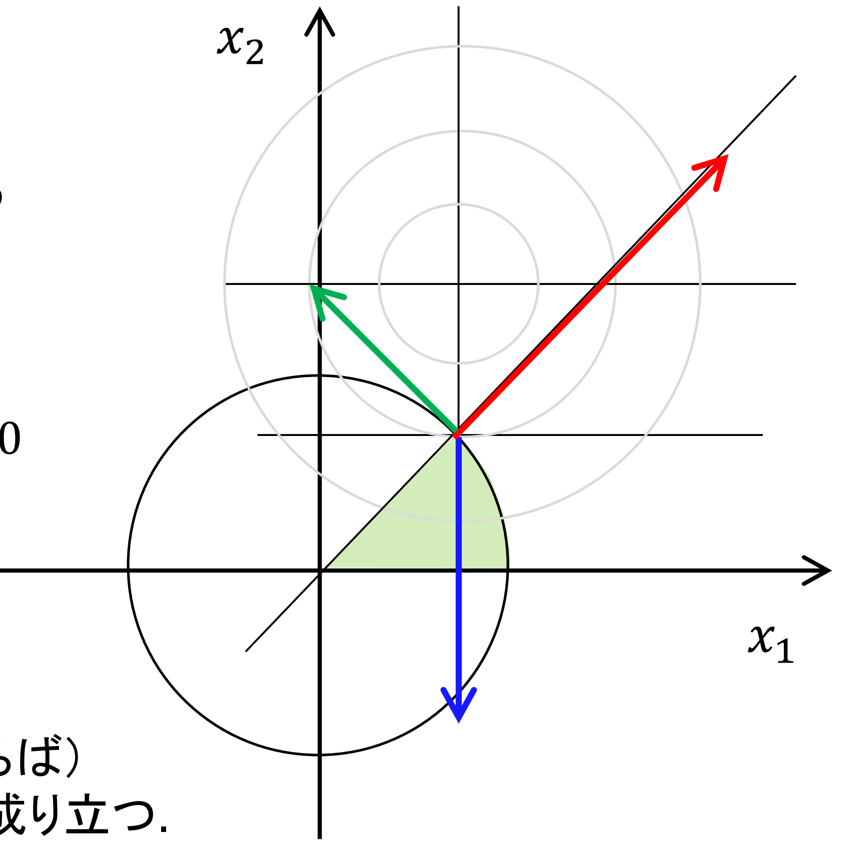
$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 - 2) \end{bmatrix} \qquad \nabla c_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \qquad \nabla c_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

最適解 $\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \nabla c_1(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \nabla c_2(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \nabla c_1(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \nabla c_2(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

最適解において，目的関数と有効制約の勾配ベクトルが綱引きをしてつりあっているような状態になっている．




$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + u_1^* \nabla c_1(\boldsymbol{x}^*) + u_2^* \nabla c_2(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

となるような$u_1^* \geq 0, u_2^* \geq 0$ が存在

（有効制約の勾配が一次独立であるならば）
これが最適性の必要条件として一般に成り立つ．

KKT（カルーシュ・キューン・タッカー）条件

# 制約条件つき最適化の側面から

$u_3^* = 0$ とすれば

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + u_1^* \nabla c_1(\boldsymbol{x}^*) + u_2^* \nabla c_2(\boldsymbol{x}^*) + u_3^* \nabla c_3(\boldsymbol{x}^*) = 0 \qquad u_i^* \geq 0, i = 1, \cdots, 3$$

これは

$$\lambda = [u_1^* \quad u_2^* \quad u_3^*],\ g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} c_1(\boldsymbol{x}) \\ c_2(\boldsymbol{x}) \\ c_3(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

Lagrange関数 $L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda\, g(\boldsymbol{x})$

とした**ラグランジュ乗数法**であり，上式は $\dfrac{\partial L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{\partial x_i} = 0, i = 1, \cdots, 3$

に対応している.

さらにペナルティ法(バリア関数法)を用いて, 制約つき問題を, 制約なし問題で近似すれば, LP同様, 内点法を適用することができ, 高速に解くことができる.

## 動的計画法(DP)などによって, 有限評価区間の離散時間最適制御問題

$$\min\ \phi_{0,N} = \sum_{k=0}^{N} \left( x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right) + x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1}$$

$$s.t.\ \ x_{k+1} = A x_k + B u_k$$

の解は以下で与えられることは既にみた.

$$P_k = A^T P_{k+1} A + Q - A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A$$

$$(k{=}N, \cdots, 1, 0)$$

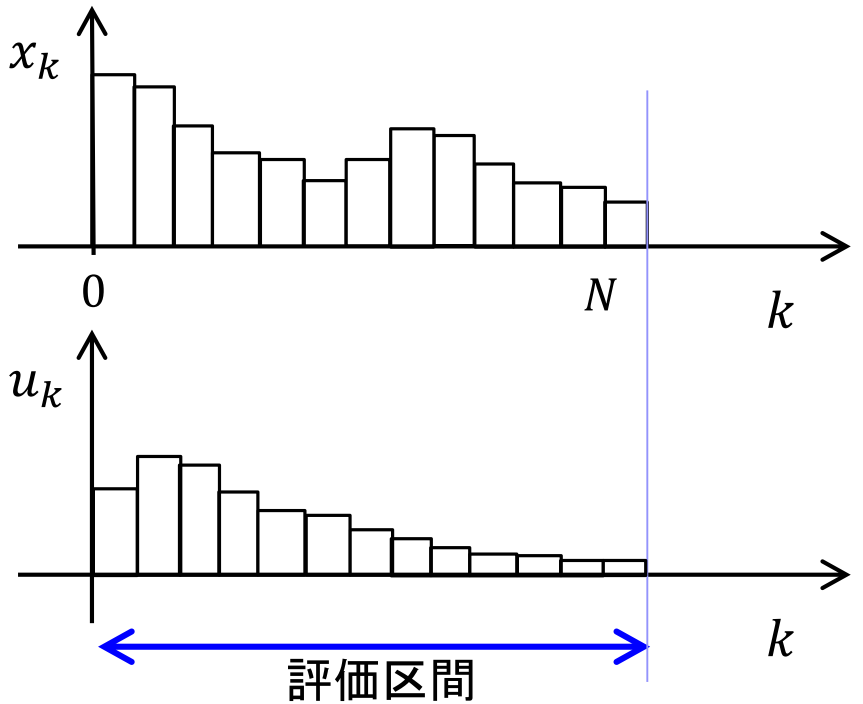
$$u_k = -(R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A x_k$$

$$(k{=}0{,}1, \cdots, N)$$

実はこの問題は2次計画問題（QP）でもある. この側面から，さらに制約条件を付加した問題を解くのがモデル予測制御（Model Predictive Control）である.

# モデル予測制御（Model Predictive Control）

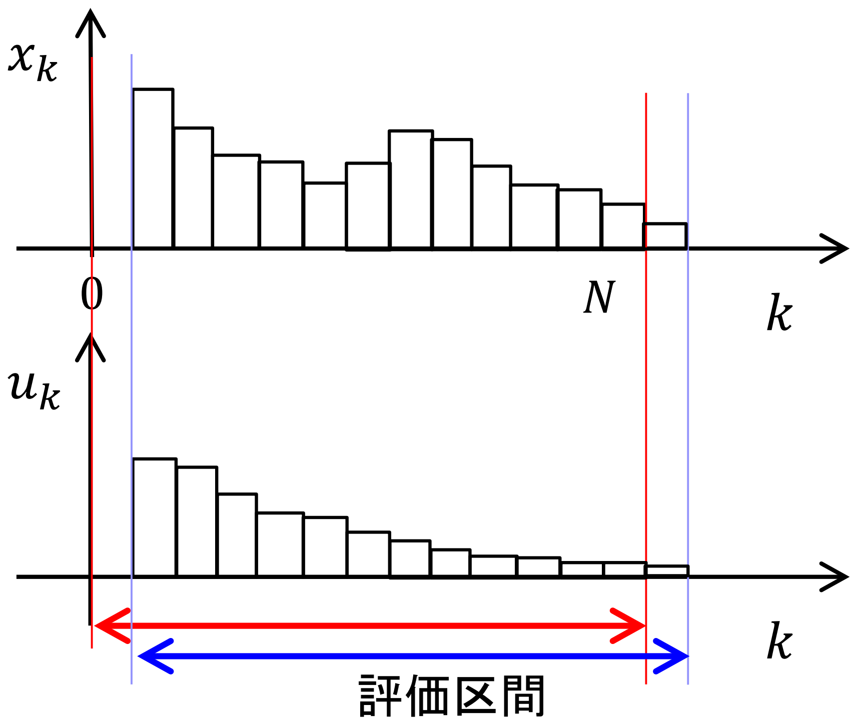
$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \qquad \phi_{0,N} = \sum_{k=0}^{N} \left( x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right) + x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1}$$



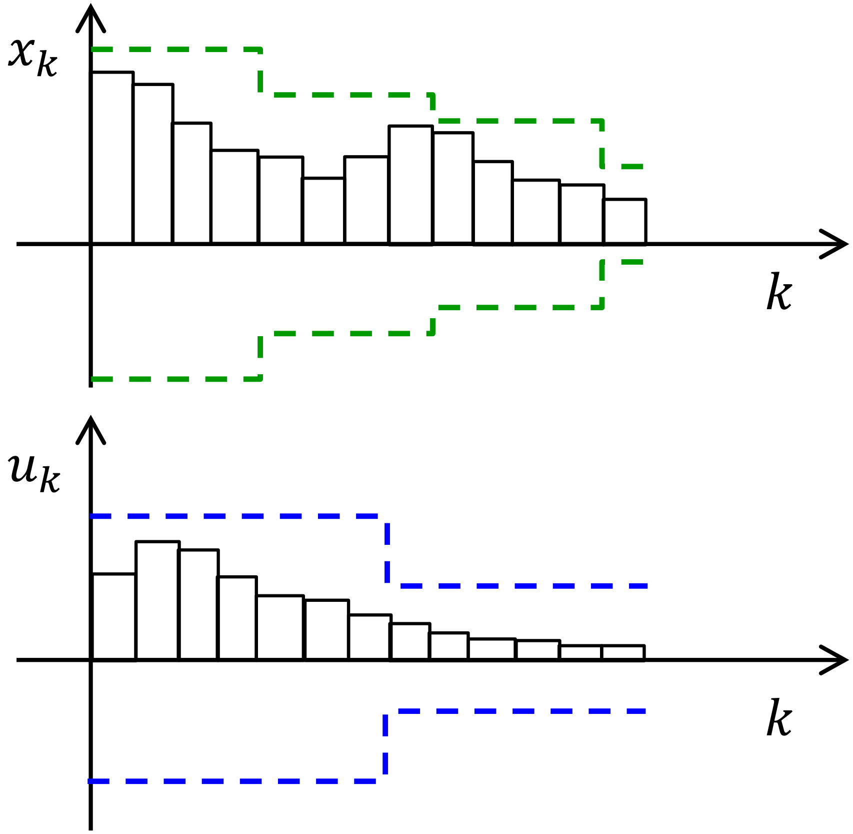

イメージ図
（一般には$x_k, u_k$はベクトル量）

区間内での評価関数 $\phi_{0,N}$ が最小となるように $u_k,\ k = 0, \cdots, N$ を決定し，
$u_0$ を制御入力として印加

次の時点 $k=1$ では, 現在の状態量 $x_1$ を初期値として, $k=1,\cdots,N+1$ を評価区間として $u_k,\ k=1,\cdots,N+1$ を決定し, $u_1$ を制御入力として印加




評価区間が現時点から見て時間方向(未来)に向かって後退するため,
Receding Horizon Control とも呼ばれる.




$x_k, u_k$ に対して制約条件（上下限値）が設定されることもある.

## なぜモデル予測制御がQPになるのか？

簡単のためスカラシステムで説明

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k \qquad \phi_{0,3} = \sum_{k=0}^{3} \left( qx_k^2 + ru_k^2 \right) \qquad P_4 = 0$$

$x_0$: 初期値 (given)

$$x_1 = ax_0 + bu_0$$
$$x_2 = ax_1 + bu_1 = a(ax_0 + bu_0) + bu_1 = a^2x_0 + abu_0 + bu_1$$
$$x_3 = ax_2 + bu_2 = a(a^2x_0 + abu_0 + bu_1) + bu_1$$
$$= a^3x_0 + a^2bu_0 + abu_1 + bu_2$$

状態 $x_k$ は入力 $u_k$ の1次関数 （線形システムなので）

$$\Rightarrow \quad \phi_{0,3} = qx_0^2 + q(ax_0 + bu_0)^2 + q(a^2x_0 + abu_0 + bu_1)^2 + q(a^3x_0 + a^2bu_0 + abu_1 + bu_2)^2 + r(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

評価関数は入力 $u_0, u_1, u_2$ に関する2次関数 (評価関数が2乗和なので)

制約条件がなければ, モデル予測制御は制約なしの2次計画問題

制約条件がある場合

$\underline{x}_k \le x_k \le \bar{x}_k$

状態 $x_k$ は入力列 $\{u_k\}$ の1次関数なので
これは $\{u_k\}$ に対する線形制約

$\underline{u}_k \le u_k \le \bar{u}_k$

これも明らかに $\{u_k\}$ に対する線形制約

$\min$ $\{u_k\}$に関する2次関数

$s.t.$ $\{u_k\}$ に対する線形制約

→ QP

結局, 2次計画問題となるのはノルムの取り方に依存している.

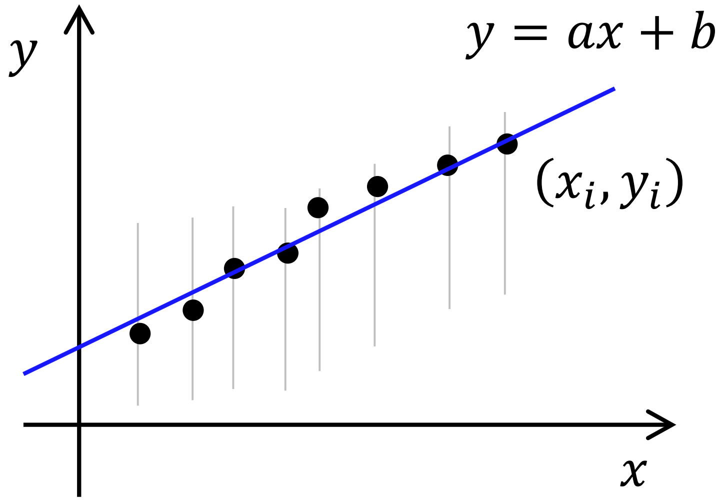
数列の $\ell_2$-ノルム $\|x_i\|_2 := \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^T x_k\right)^{1/2}$

拡張 $\sum_{k=0}^{n} x_k^T Q x_k$

時間関数の $L_2[0,\infty)$-ノルム $\|x(t)\|_2 := \left(\int_0^\infty |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$

例: 最小二乗法

例：　最小二乗法




点列データを最もよく近似する直線を求めよ.

誤差: $e_i = y_i - (ax_i + b)$

$$J = \|e_i\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} e_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b\ )^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - 2a \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k + a^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2b \sum_{k=1}^{n}\ y_k + 2ab \sum_{k=1}^{n}\ x_k + nb^2$$

$$J = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - 2a \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k + a^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2b \sum_{k=1}^{n} y_k + 2ab \sum_{k=1}^{n} x_k + nb^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k + 2a \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2b \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

2元連立方程式

$$\frac{\partial J}{\partial b} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \sum_{k=1}^{n} y_k + 2a \sum_{k=1}^{n} x_k + 2nb = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_k \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_k \end{bmatrix}$$

もっとスマートに

$$E := \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} =: Y - Xp$$

$$J = E^T E = (Y - Xp)^T (Y - Xp) = Y^T Y - p^T X^T Y - Y^T X p + p^T X^T X p$$

$$\frac{\partial J}{\partial p} = -2Y^T X + 2X^T X p = 0$$

2次式の偏微分が0となる条件は（1次）線形方程式に帰着される.

$$p = (X^T X)^{-1} Y^T X$$

2乗和ノルムで誤差評価し, モデルが1次式（線形）だから.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}$$