システム制御最適化特論

前期後半 月 5, 6限　14:00-16:10　5号館 第16講義室

担当:平田 健太郎

システム工学の諸分野にとって必須である，数理最適理論の概要について講述する. とくにシステム制御との接点に焦点をあてたい.

講義日程(予定)

6/17　第1回　最適化問題と線形計画法(LP)
6/24　第2回　内点法
7/1　第3回　最短経路問題と動的計画法(DP)
7/8　第4回　最適制御
7/18* 第5回　二次計画法(QP)とモデル予測制御(MPC)
7/22　第6回　凸解析と線形行列不等式
7/29　第7回　線形行列不等式(LMI)による制御系解析・設計
8/5　第8回　非線形最適化

* irregular

※ 期末試験はレポートとする予定

- 教科書：特になし.
- 参考書

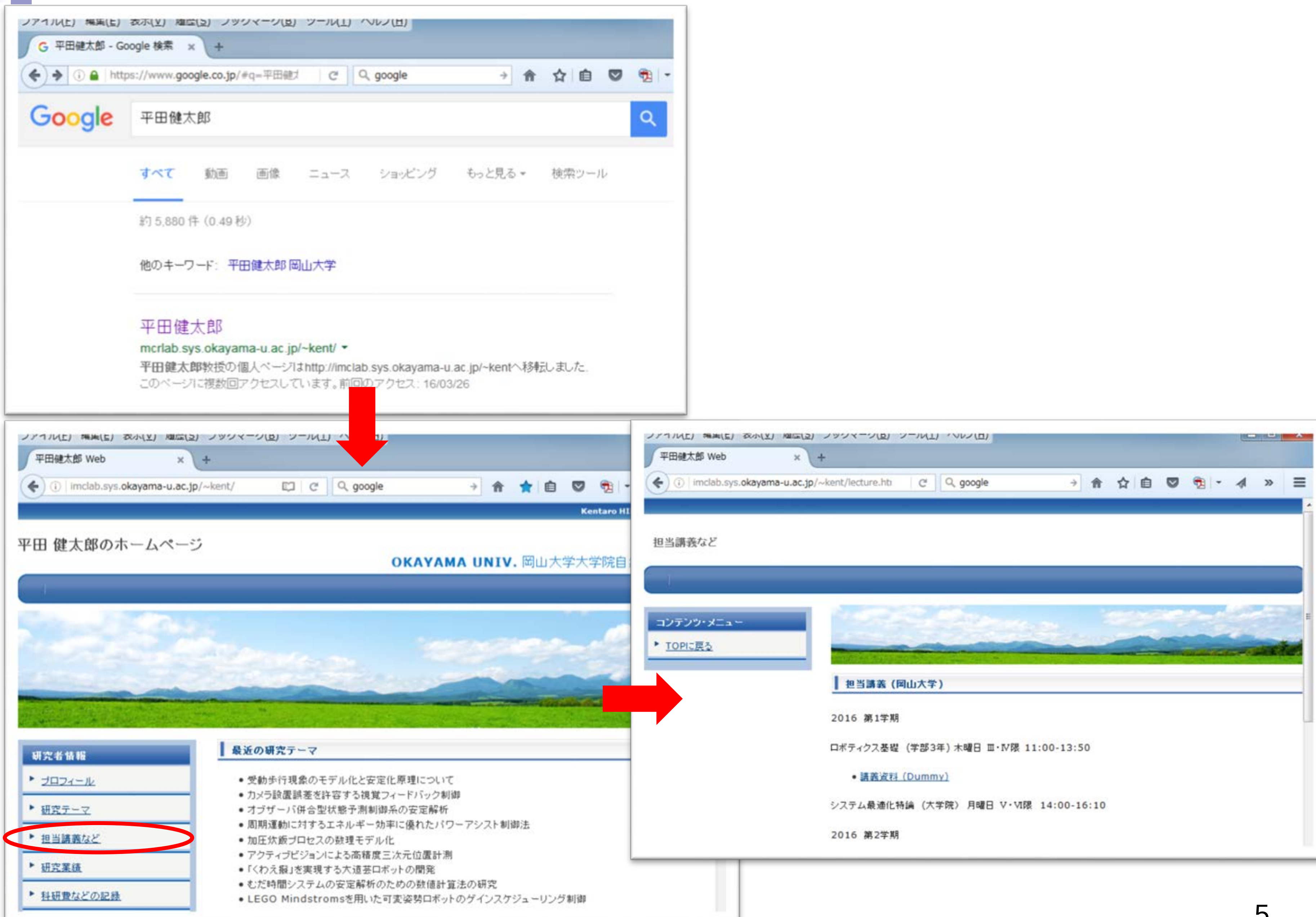
福島： **新版　数理計画入門，朝倉, 2011**

（数理計画入門，朝倉，1996）

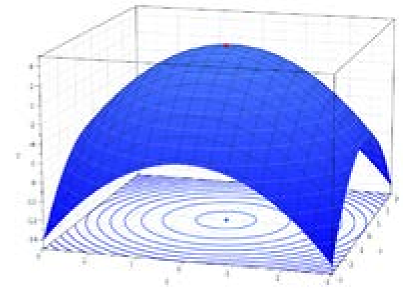
蛯原： LMIによるシステム制御 − ロバスト制御系設計のための体系的アプローチ, 森北出版, 2012

（岩崎： LMIと制御，昭晃堂, 1997）

- 出席は ~~minutes paper で~~ 学生証で
- 適宜, レポートを課す
- 連絡用email address
  kent@sys.okayama-u.ac.jp
- 配布資料 (PDF) は前日までに平田の webページ(「担当講義など」以下) にupload


平田健太郎 - Google 検索
https://www.google.co.jp/#q=平田健太
google
Google
平田健太郎
すべて
動画
画像
ニュース
ショッピング
もっと見る
検索ツール
約 5,880 件 (0.49 秒)
他のキーワード: 平田健太郎 岡山大学
平田健太郎
mcrlab.sys.okayama-u.ac.jp/~kent/
平田健太郎教授の個人ページはhttp://imclab.sys.okayama-u.ac.jp/~kentへ移転しました.
このページに複数回アクセスしています。前回のアクセス: 16/03/26
平田健太郎 Web
imclab.sys.okayama-u.ac.jp/~kent/
平田 健太郎のホームページ
OKAYAMA UNIV. 岡山大学大学院自
研究者情報
プロフィール
研究テーマ
担当講義など
研究業績
科研費などの記録
最近の研究テーマ
受動歩行現象のモデル化と安定化原理について
カメラ設置誤差を許容する視覚フィードバック制御
オブザーバ併合型状態予測制御系の安定解析
周期運動に対するエネルギー効率に優れたパワーアシスト制御法
加圧状態プロセスの数理モデル化
アクティブビジョンによる高精度三次元位置計測
「くわえ掘」を実現する大道芸ロボットの開発
むだ時間システムの安定解析のための数値計算法の研究
LEGO Mindstromsを用いた可変姿勢ロボットのゲインスケジューリング制御
平田健太郎 Web
imclab.sys.okayama-u.ac.jp/~kent/lecture.htm
担当講義など
コンテンツ・メニュー
TOPに戻る
担当講義（岡山大学）
2016 第1学期
ロボティクス基礎 （学部3年） 木曜日 Ⅲ・Ⅳ限 11:00-13:50
講義資料 (Dummy)
システム最適化特論 （大学院） 月曜日 Ⅴ・Ⅵ限 14:00-16:10
2016 第2学期

最適化問題　Optimization Problem



Optimization (mathematics)
From Wikipedia, the free encyclopedia

In mathematics, computer science and economics, **optimization**, or **mathematical programming**, refers to choosing the best element from some set of available alternatives.

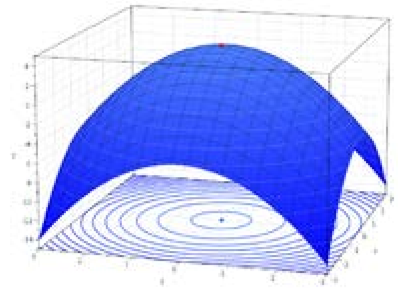
$$\min f(x)$$

$$\text{subject to } x \in S.$$

x：（設計）変数　decision variables

$f(x)$：目的関数　objective function

S：制約集合　constraint set



Optimization (mathematics)

From Wikipedia, the free encyclopedia

（Continued）

In the simplest case, this means solving problems in which one seeks to minimize or maximize a real function by systematically choosing the values of real or integer variables from within an allowed set. This formulation, using a scalar, real-valued objective function, is probably the simplest example; the generalization of optimization theory and techniques to other formulations comprises a large area of applied mathematics. More generally, it means finding "best available" values of some objective function given a defined domain, including a variety of different types of objective functions and different types of domains.

Question: What might be the simplest domain and the simplest real-valued function?

Possibly the simplest domain:

1次元の実数閉区間 $x \in \mathbb{R}^1, \quad x \in [a, b]$

Possibly the simplest real-valued function:

1次多項式 $f(x) = cx + d$

最大化・最小化に d は無関係 ➡ $f(x) = cx$ 線形関数

$$\min cx$$

$$\text{subject to } \; x \in [a, b]$$

Answer (Optimal Solution)?

The next simplest real-valued case…

2次多項式 $\quad f(x) = cx^2 + dx + e$

Answer (Optimal Solution)? How do you know?

連続関数, (高階)微分可能性

$$\min cx$$

$$\text{subject to } x \in \mathbb{R}^1, a < x < b$$

定義域を n 次元の実ベクトル区間に拡張　　$x \in \mathbb{R}^n$

（線形）目的関数, 制約条件をベクトル変数に拡張

$$\min c^T x$$

$$\text{subject to } Ax = b, x \geq 0.$$

⇒ 線形計画問題
(Linear Programming; LP)

最適化問題の種類

講義の冒頭(LP)で扱うのは, xが実ベクトル(有限次元空間の要素)である場合

しかし, より一般的には...

$$\min f(x)$$
$$\text{subject to } x \in S$$

x: 関数空間(無限次元)の要素
$f(x)$: 汎関数
→ 多くの制御問題

xの要素が整数値あるは$0-1$(binary)変数 → ある選択肢をとる･とらない組み合わせ最適化問題

$f(x), S$ が望ましい性質を持つ → 凸最適化問題(最適制御, モデル予測制御, LMI)

$f(x)$ が望ましい性質を持たない → 非線形最適化問題

最適化問題の種類

$$\min f(x)$$

$$\text{subject to } x \in S$$

Optimization problem:
Find $x \in S$ which minimizes the cost function $f(x)$.

(最適化問題)

目的関数値を最小化する解を見つける

Sub-optimization problem:
Given γ, find $x \in S$ which attains $f(x) < \gamma$.

(準最適化問題)

目的関数値がある値以下になるような解を（ひとつ）見つける

Feasibility problem:
Find x which satisfies $x \in S$.

(実行可能性問題)

制約を満たす解を（ひとつ）見つける

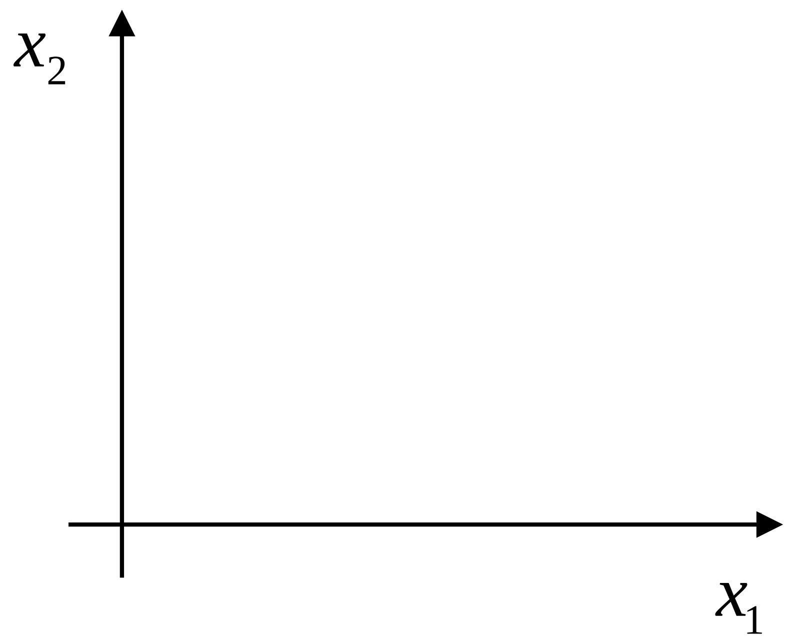
例題 Example

$$\min \quad -x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

等号と不等号の違いは気にしなくてもよい

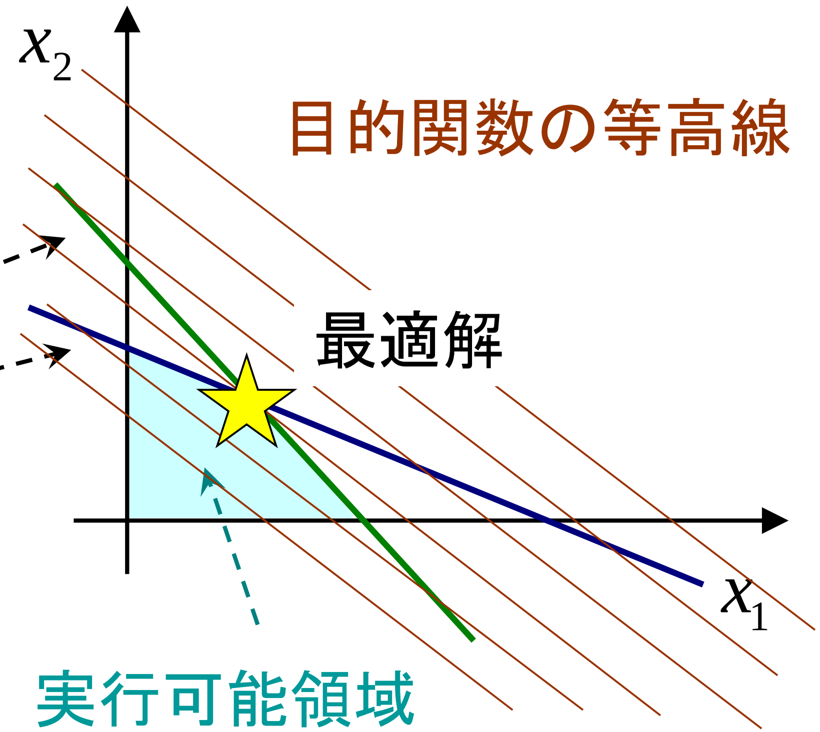
JUST DO IT.



■ 図形的解法

$$\min \ -x_1 - x_2$$

$$\text{subject to} \quad 3x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



$n > 3$ のとき, 図形的解法は適用できない

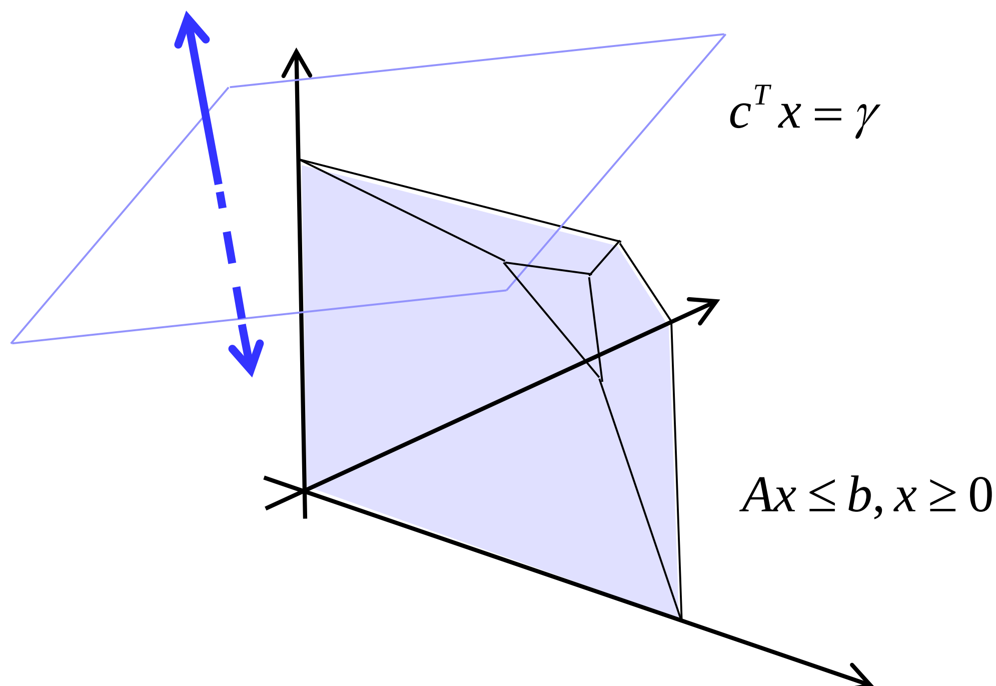
系統的な探索方法？ ⇒ シンプレックス法

制約条件を満たすxの領域 ⇒ 実行可能領域 (feasible region)

一般に実行可能領域は凸多面体であり, 等高線は平面で与えられる. したがって最適値は必ずその頂点で達成される. 多面体の頂点は有限個だから, 原理的に有限回の探索を実行すればよい.

凸多面体 (convex polyhedra)

⇒ 多面体であって, その内部の任意の2点を結ぶ線分上の点がすべて, もとの多面体内部に含まれるもの



線形計画問題 (LP) の標準形

$$\min c^T x$$

$$\text{subject to } Ax = b, x \geq 0.$$

LPに帰着される問題の例:　輸送問題

Transport Problem

Two factories produce a liquid material 90 $k\ell$ and 80 $k\ell$ per day, respectively. This material should be transported to three customers requiring 70, 40 and 60 $k\ell$ each. The transportation cost per unit volume between factory and customer is determined as follows reflecting distance, road condition, etc.

	Customer 1	Customer 2	Customer 3
Factory 1	4	7	12
Factory 2	11	6	3

unit: 10k JPY/ $k\ell$

Determine the way to transport at the lowest total cost.

輸送問題

２つの工場で, ある製品原料（液体）を一日あたりそれぞれ90 $k\ell$, 80 $k\ell$ 生産している. これを3つの取引先の注文量（それぞれ70, 40, 60 $k\ell$ ）に応じて輸送しなければならない. それぞれの工場-取引先間の単位量あたりの輸送コストは, 距離, 道路事情等から, 下記のように定まっている.

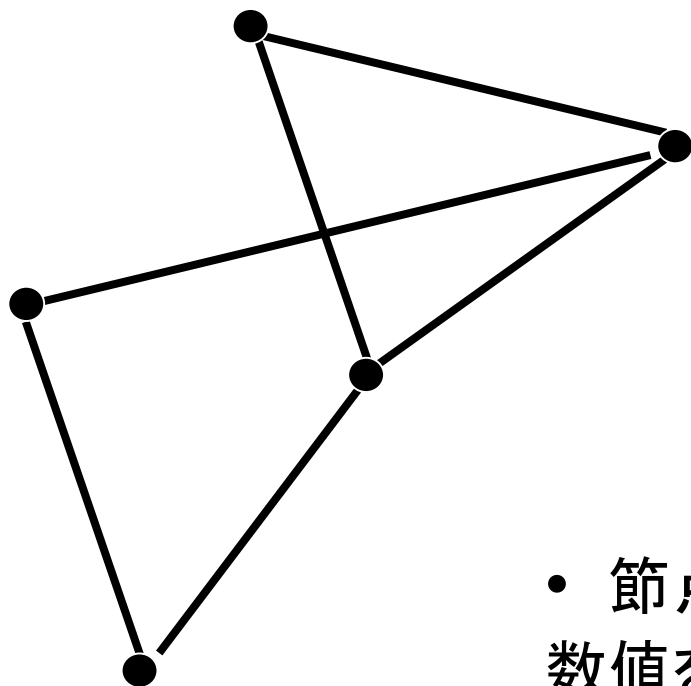
	取引先 松	取引先 竹	取引先 梅
工場 甲	4	7	12
工場 乙	11	6	3

単位: 万円/ $k\ell$

最もコストの安い輸送の仕方を求めよ.

問題の抽象化

graph and network



- 点を線で結べばグラフ
  点：節点，ノード
  線：枝，アーク

- 枝に向きがある/有向グラフ
  ない/無向グラフ

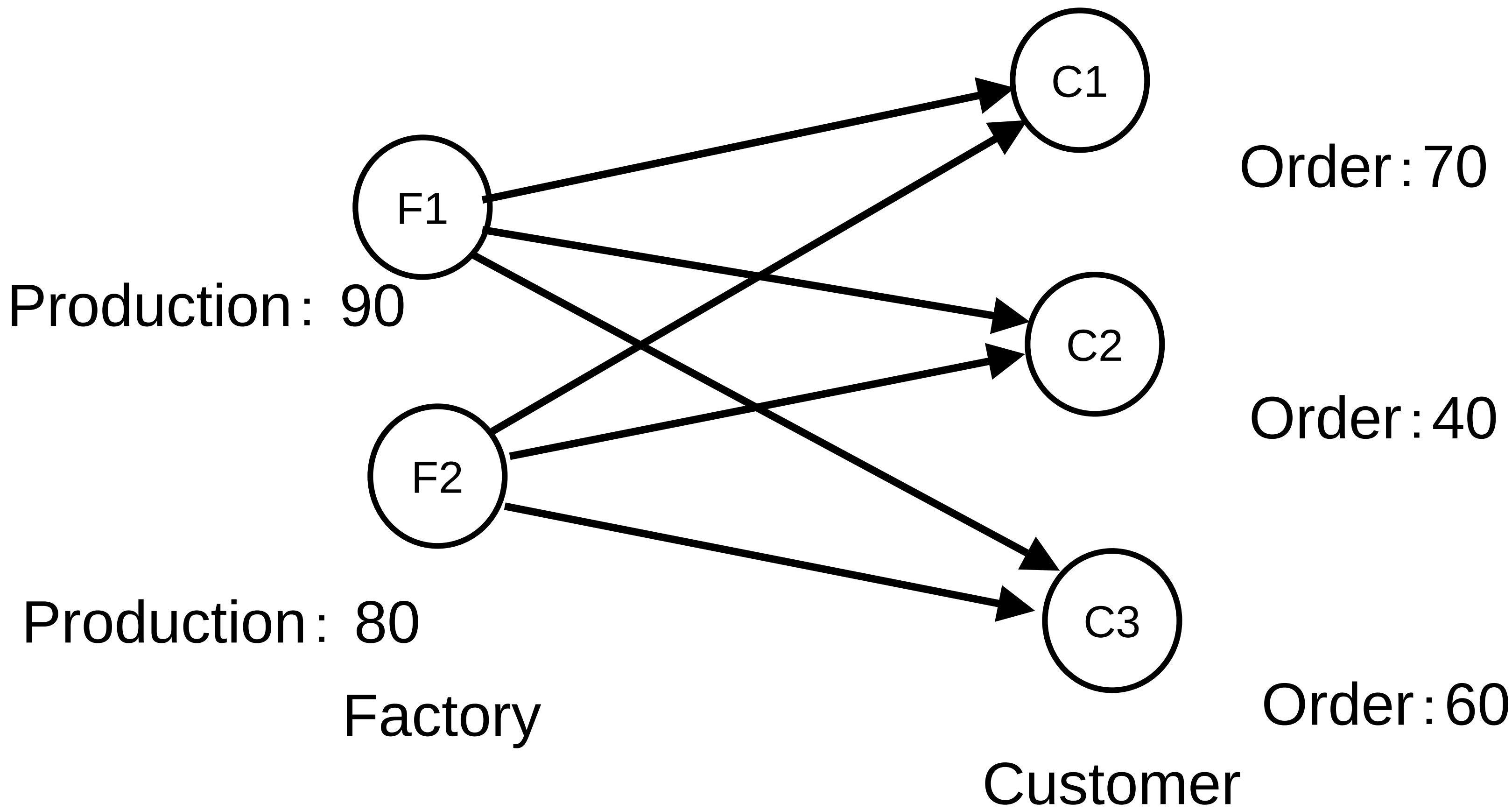
- 節点，枝に距離やコストなどの属性・数値を与える
  ⇒ ネットワーク

記号，グラフを用いて問題を書き表わす

- Graph of Transport Problem

	C1	C2	C3
F1	4	7	12
F2	11	6	3

Transport cost



問題を数学的に定式化

変数, 制約条件, 目的関数を定める

・何を決めなければならないか

⇒ 各工場から各取引先への輸送量

（設計/決定）変数

・評価基準は何か

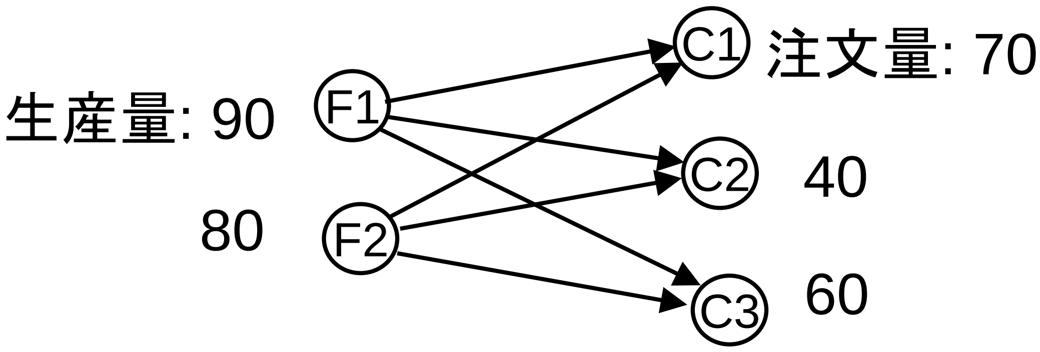
⇒ 輸送に関する総コストを最小に

目的関数

・制約は何か

⇒ 生産量と注文量は与えられており
過不足があってはいけない

制約条件



	C1	C2	C3
F1	4	7	12
F2	11	6	3

輸送コスト

工場 i から取引先 j への輸送量: x_{ij}

工場 i での生産量に関する条件

取引先 j の注文量に関する条件

輸送量

総コスト:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 90 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 80
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} &= 70 \\
x_{12} + x_{22} &= 40 \\
x_{13} + x_{23} &= 60
\end{aligned}
\qquad
x_{ij} \geq 0
$$

$$4x_{11} + 7x_{12} + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23}$$

$$x = [x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{23}]^T,$$

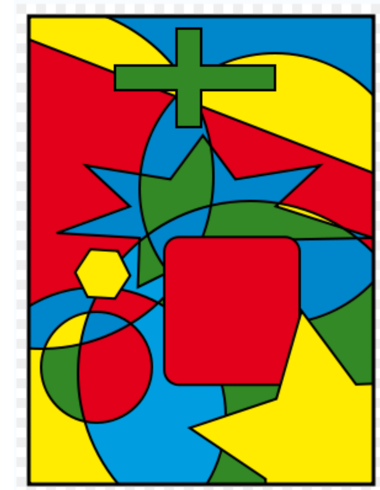
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 90 \\ 80 \\ 70 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad c^T = [4\ 7\ 12\ 11\ 6\ 3],$$

$$\min c^T x$$

$$\text{subject to } Ax = b,\ x \geq 0.$$

要素毎に非負

グラフ理論・位相幾何学



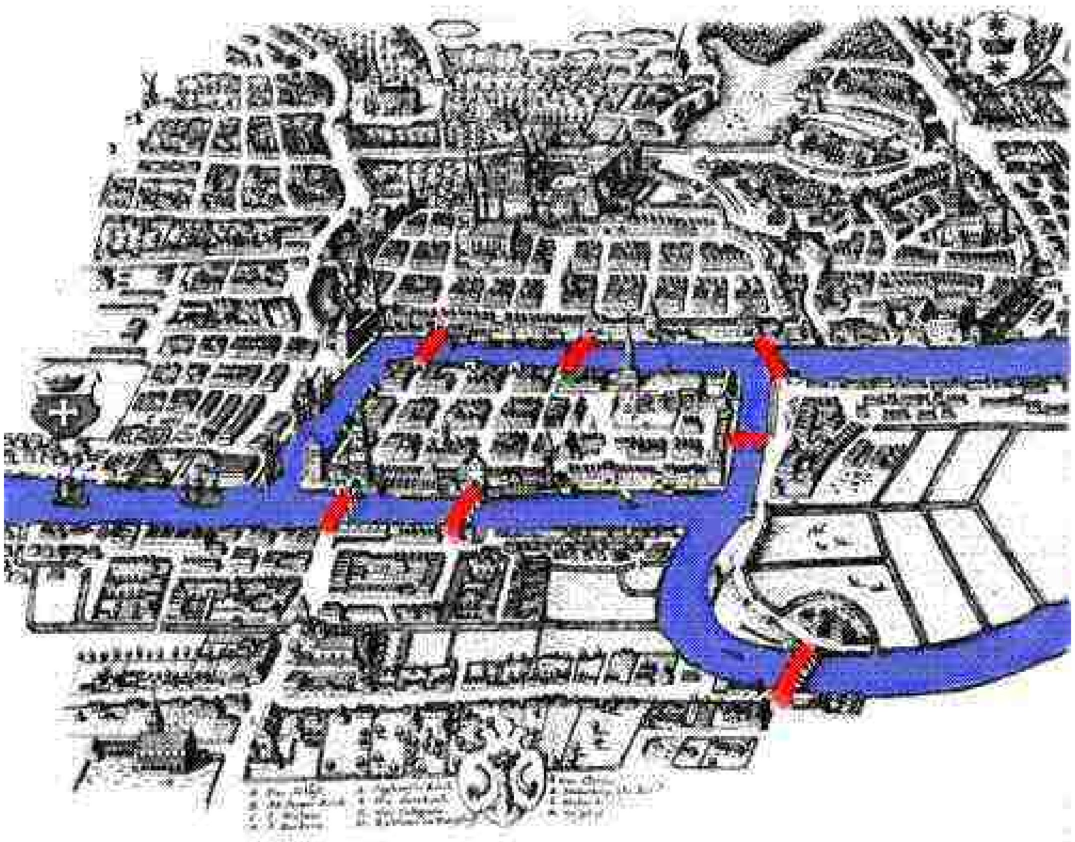
- 四色問題/四色定理

1976年に計算機を使って証明されたことで有名.

- ケーニヒスブルクの橋渡り問題　(1736)

(現在のロシア領カリーニングラード)

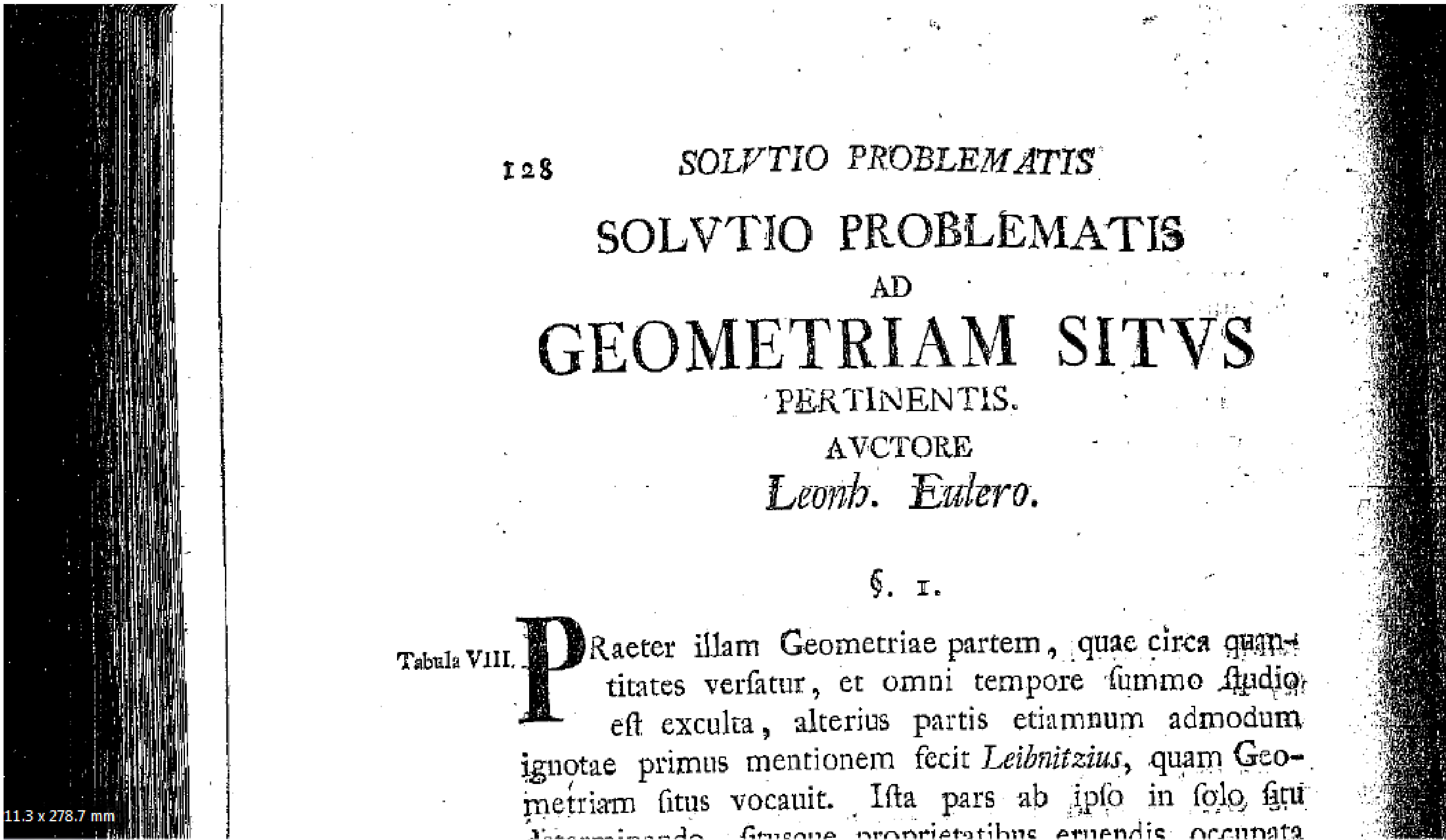
Leonhard Euler
(1707-1783)



頭の体操: 7つの橋のすべてをちょうど一度ずつ渡るように歩く経路は存在するか？

Summary:

This is one of Euler's most famous papers -- the [Konigsberg Bridge problem](). It is often cited as the earliest paper in both topology and graph theory. So much has been written about this paper that it would be foolish to repeat it here.



128 SOLVTIO PROBLEMATIS

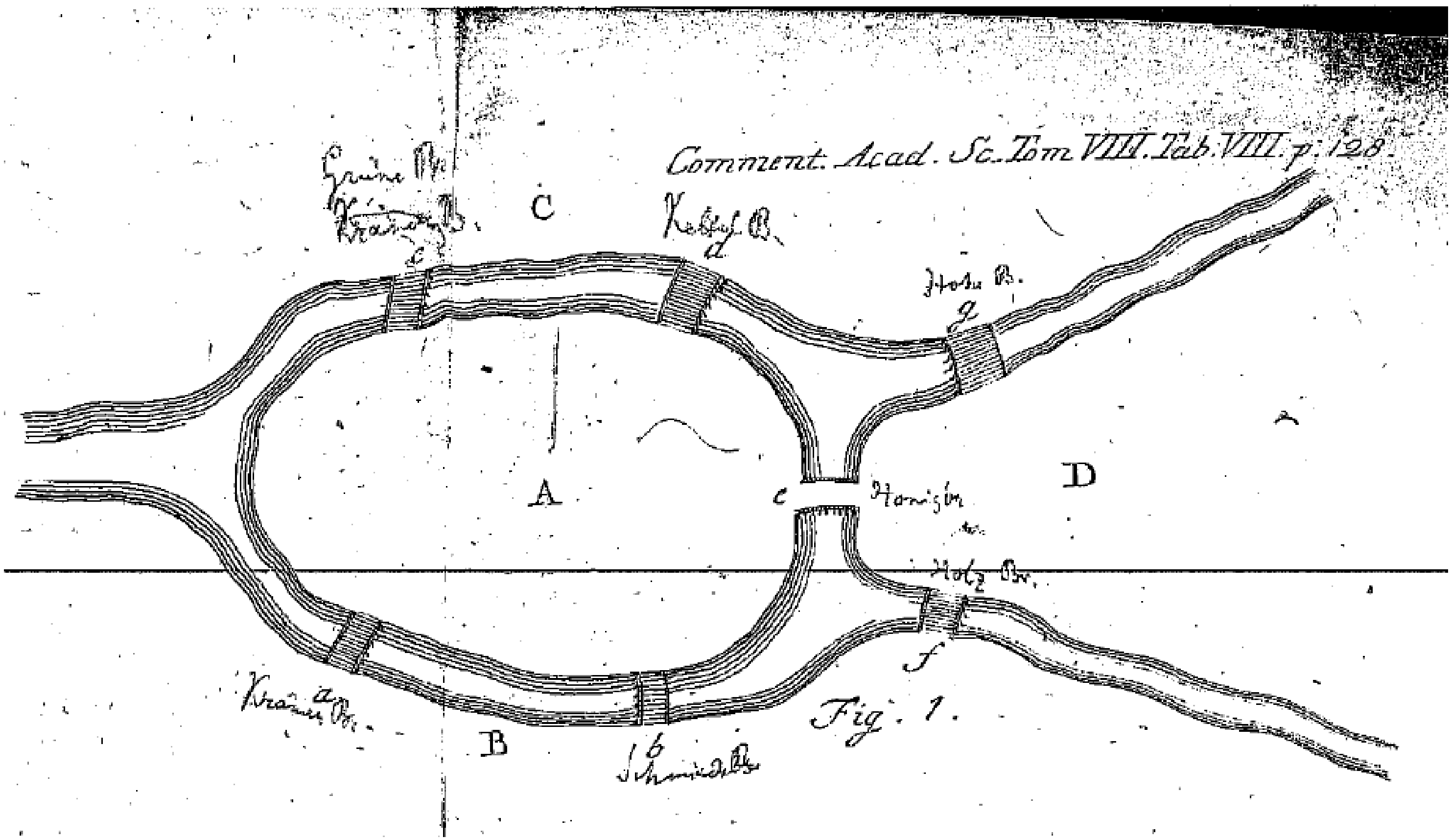
SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. Praeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu

According to the records, it was presented to the St. Petersburg Academy on August 26, 1735.

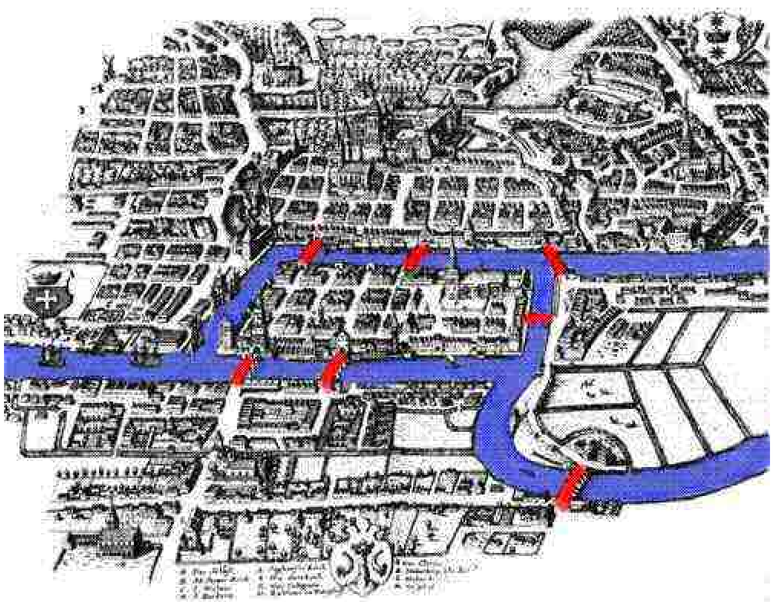
Publication: Originally published in *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1741, pp. 128-140



オイラーの解法 (数理科学2011 年9月号)

- 4つの島をA, B, C, D とする.
- どの橋を通るかは考えずに, AからBの島へ行くルートを選ぶときABと書く.
- 「すべての橋を1回ずつ通るルートがある」と仮定
- Aには x 本の橋 (いま xは奇数) ⇒ Aの出現回数は？
- トータルでは？

一般には，グラフ理論の起源として有名



抽象化

歩道: グラフの中の頂点が順に辺でつながっているとき, その頂点と
辺をその順に並べたもの

道: とくに歩道の頂点がすべて異なっているとき

小道: 歩道の辺がすべて異なっているとき

回路: 歩道で, 最初の頂点と最後の頂点が等しいもの

閉路: 歩道で,最初の頂点と最後の頂点が等しく, 他の頂点はすべて互い
に異なっているもの

オイラー小道: グラフのすべての辺を含む小道

オイラー回路: グラフのすべての辺を含む回路

ケーニヒスブルクの橋の問題はオイラー小道または回路の存在問題

- 定理

連結なグラフがオイラー回路を持つための必要十分条件は, すべての頂点の次数＊が偶数になることである. 連結なグラフがオイラー小道を持つための必要十分条件は, 次数が奇数となる頂点の個数が2以下であることである.

＊ 頂点とつながっている辺の個数をその頂点の次数という

簡単にいえば, いつ一筆書きが可能かどうかということ

レオンハルト･オイラー

オイラーは史上最高の多産型の数学者で、その執筆量は書籍だけで45冊、700編以上の論文数があり、死後 にもたくさん発見されたという。現代になってスイス版"オイラー全集"を出版しようとしたところ全74巻にもなったという。(1911～今なお刊行中)
誰かが計算したところ、オイ ラーは年間800ページの執筆をしていたことになるそうである。

1735年, 右目の視力を失う.
生涯の最後の17年間は全くの盲目で過ごすことになるが、彼の研究と出版の奔流はと どまることがなかった.

1707年4月15日 - 1783年9月18日

F 217
BDOA 469

The Euler Archive:

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

(The solution of a problem relating to the geometry of position)

$x^3 + y^3 = z^3,\quad x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ has no solution.

(Special case of Fermat's Last Theorem)

$$j^2 = -1, \qquad e^{j\pi} = -1$$

$$\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_n \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \sum_n \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945},$$

$$N = \frac{d}{dt} L' + \omega \times L$$

$$\dot{x}\ = f(x),\ x(t + \Delta t) \simeq x(t) + f(x)\Delta\mathrm{t}$$

線形計画問題 (LP) の標準形

$$\min c^T x$$

$$\text{subject to } Ax = b, x \geq 0.$$

LPの例題

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ & x_i \geq 0, \forall i. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\
& x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\
& x_i \geq 0, \forall i.
\end{aligned}
$$

4変数に対して制約式は2つ. ⇒ 解は一意には定まらない.
では, 変数がいくつなら一意に決まるか？

$$Ax = b$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 12 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8
\end{aligned}
$$

4変数に対して制約式は2つ. ⇒ 変数のうち2つを0とすると残りの変数の値が一意に定まる (頂点). 目的関数値が減少するように0とする変数のとり方を変更していく.

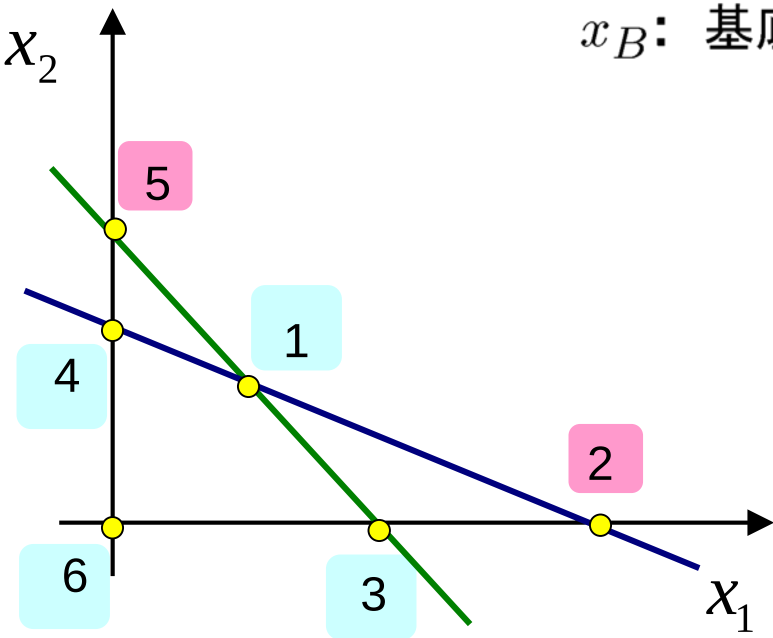
変数の一部を0とすることによって一意的に定まる解 x : 基底解

$x \geqq 0$ を満たす基底解: 実行可能基底解

0とおいた変数: 非基底変数, それ以外: 基底変数

$Q.$ x_1, x_2を基底変数として解いてみよ.

x_B： 基底解， x_N： 非基底解



1. $x = (2, 3, 0, 0)^T$, $x_B = (x_1, x_2)^T$, $x_N = (x_3, x_4)^T$

2. $x = (8, 0, -12, 0)^T$, $x_B = (x_1, x_3)^T$, $x_N = (x_2, x_4)^T$

3. $x = (4, 0, 0, 4)^T$, $x_B = (x_1, x_4)^T$, $x_N = (x_2, x_3)^T$

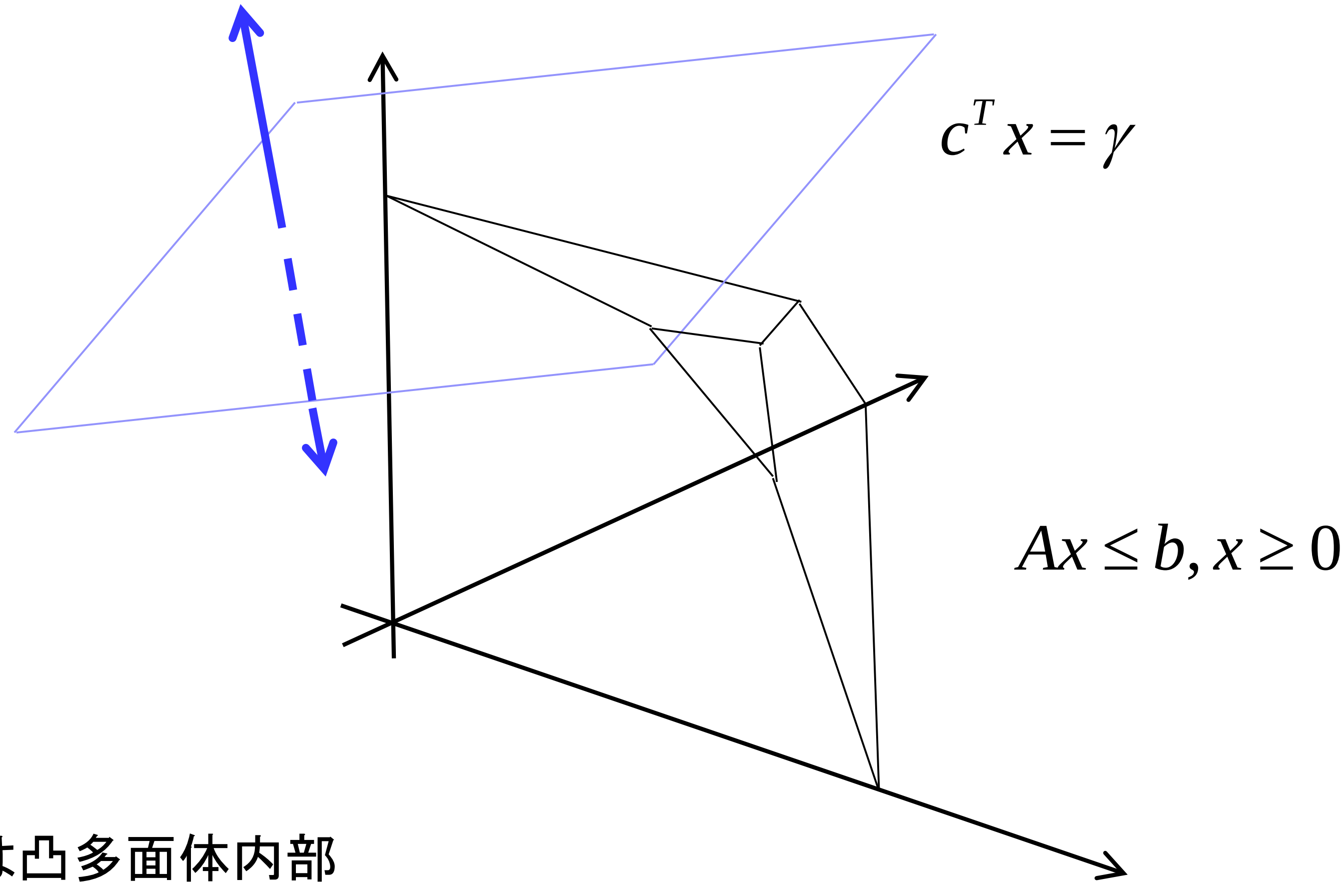
4. $x = (0, 4, 4, 0)^T$, $x_B = (x_2, x_3)^T$, $x_N = (x_1, x_4)^T$

5. $x = (0, 6, 0, -4)^T$, $x_B = (x_2, x_4)^T$, $x_N = (x_1, x_3)^T$

6. $x = (0, 0, 12, 8)^T$, $x_B = (x_3, x_4)^T$, $x_N = (x_1, x_2)^T$

実行可能基底解　　実行不能

アイデア　idea



制約集合は凸多面体内部

切片の最小化⇒共通部分が存在⇒最適解は必ず頂点

頂点は変数のどれかを 0 に固定し,線型方程式を解くことで求まる.

目的関数値が効率的に減少するように0 に固定する変数を選ぶ.

基底/非基底を数式で表現

1. x を基底解 x_B, 非基底解. x_N に分ける

2. 行列 A もそれに応じて, B, N に分割

$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ ならば, $A = [B \quad N]$ として, $Ax = Bx_B + Nx_N = b$

（とびとびに取ることも可能）

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = b$$

x_B：基底解，x_N：非基底解

B：基底行列，N：非基底行列

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = b$$

x_B：基底解，x_N：非基底解

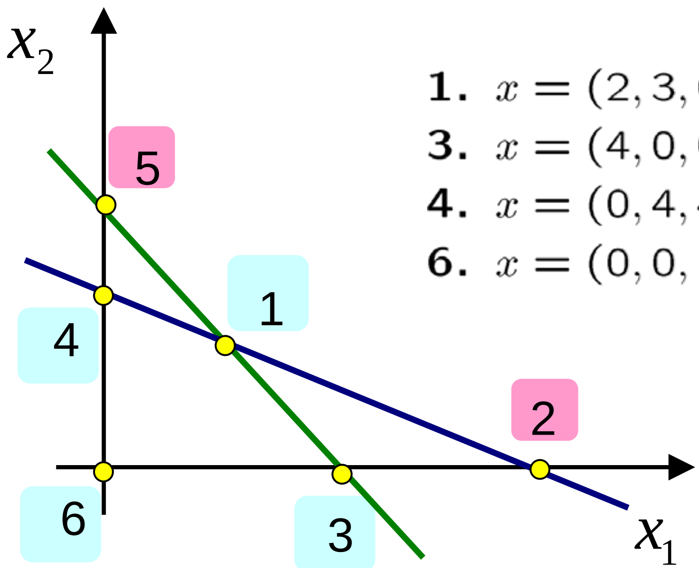
$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{Bx_B + Nx_N = b}$$

Bが正則ならば$x_N = 0$として$x_B = B^{-1}b$．$x_B \geq 0$
ならば実行可能基底解．

ある実行可能基底解に対して，一組の基底変数と非基底変数を入れ替える ⇒ ピボット操作

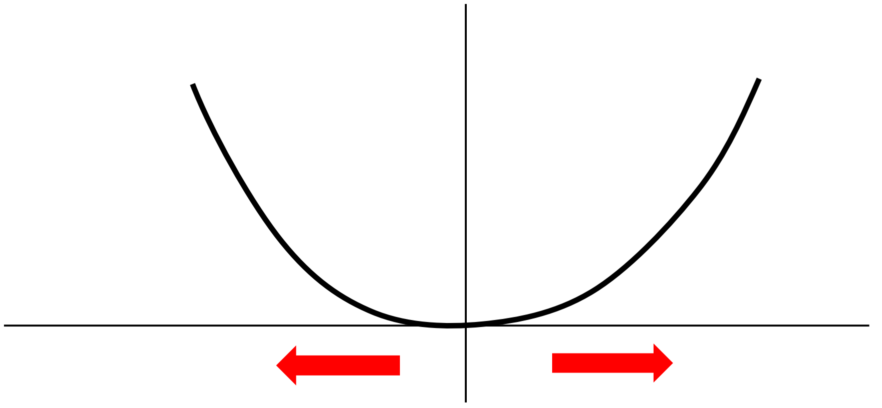
ピボット操作後も実行可能解となるとき，凸多面体のひとつの頂点から隣接する頂点に移動することになる．



1. $x = (2, 3, 0, 0)^T$, $x_B = (x_1, x_2)^T$, $x_N = (x_3, x_4)^T$
3. $x = (4, 0, 0, 4)^T$, $x_B = (x_1, x_4)^T$, $x_N = (x_2, x_3)^T$
4. $x = (0, 4, 4, 0)^T$, $x_B = (x_2, x_3)^T$, $x_N = (x_1, x_4)^T$
6. $x = (0, 0, 12, 8)^T$, $x_B = (x_3, x_4)^T$, $x_N = (x_1, x_2)^T$

ピボット操作を繰り返して最適解を探す手続き ⇒ シンプレックス法

最適性の判定



これ以上基底の入れ替えをしても, 目的関数値が減少しなければ最小.

非基底変数 x_N は0から正の値に変化. 基底変数 x_B は現在の値から減少して, 最終的には0になる.

x_N を微小変化させたときの傾向を見るために, 目的関数値を x_N だけの関数として表現できないか.

基本となる式: $Bx_B + Nx_N = b$

- 基底変数 x_B を非基底変数 x_N を用いて表現

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

現在の非基底変数の値が0でなくても成り立つことに注意

- c も c_B, c_N に分割

- 目的関数の値

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N =$$

x_N を0から正の値に変化させても, 目的関数値が減少しない(増加してしまう)条件は何か？

1. $x = (2, 3, 0, 0)^T$, $x_B = (x_1, x_2)^T$, $x_N = (x_3, x_4)^T$について

check it!

■ 最適でないときの更新方法

最適条件が満たされないとき, 目的関数値が減少するように基底変数を入れ替える.

相対コスト係数: $c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

最適でないので, 相対コスト係数の中に負の要素がある.

対応する非基底変数の値を0から増加させる.

どこまで？ ⇒ 基底変数のどれかが 0 になるまで.

以上がシンプレックス法のアルゴリズムの骨格

- 相対コスト係数の中に負の要素が複数ある場合, 絶対値の大きいものの方が, 減少の割合が大きい. (有望かもしれない)

- 他の非基底変数は0のまま，対応する非基底変数x_kの値を0から増加させる．基底変数x_Bを

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_k x_k$$

と変化させると制約条件$Ax = b$は満たされる.(a_kはx_kに対応するAの列)

$$\because Ax = Bx_B + Nx_N = b$$

- $\bar{b} = B^{-1}b$, $y = B^{-1}a_k$とすると，非基底変数x_kを最大

$$\Delta = \min\left\{\bar{b}_i / y_i \mid y_i > 0\right\}$$

まで増加させても非負条件$x \geq 0$は満たされる.

- x_kをΔまで増加させ，新たに0になった変数を非基底変数とする.

- 最適条件が満たされるまで繰り返す