ロボティクス基礎

第1学期 木 Ⅲ・Ⅳ限 11:00-13:10
1号館 大講義室

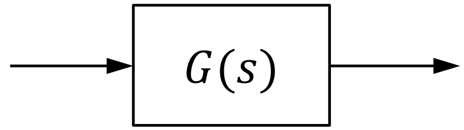
担当:平田 健太郎

5/30　第7回 サーボ系

フィードバック制御系に求められること

- 安定性
- 定常特性（定常偏差）
- 過渡特性（即応性, 減衰性）
- 周波数特性

伝達関数の安定性



任意の有界入力に対して出力が有界となるとき, 伝達関数は
BIBO（Bounded Input Bounded Output）安定, または単に安定であるという.

伝達関数 $G(s)$ が安定であるための必要十分条件は, インパルス応答
$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ が絶対可積分, すなわち

$$\int_0^\infty |g(t)| dt \leq M < \infty$$

が成り立つことである.

伝達関数 $G(s)$ が有理伝達関数（多項式の比）であるとき,

（簡単のため, 重極はないとする）

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k \prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)}$$

と書ける. ここで z_i は$G(s)$の零点, p_i は$G(s)$の極である. このとき $G(s)$ を

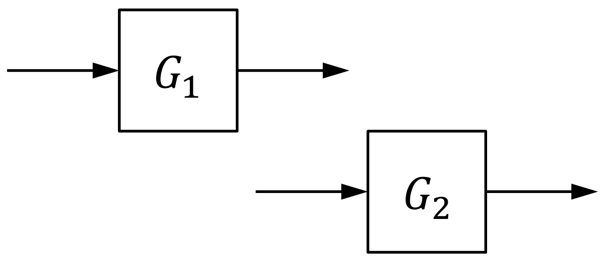
$$G(s) = \sum_j \frac{A_j}{s - p_j}$$

と部分分数に展開できる. よって

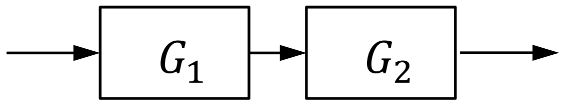
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] =$$

したがって, 安定であるための必要十分条件は…

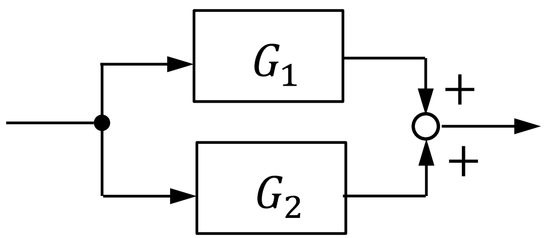
結合系の伝達関数:



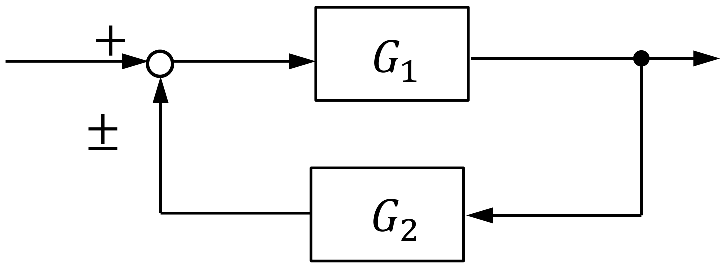
直列結合



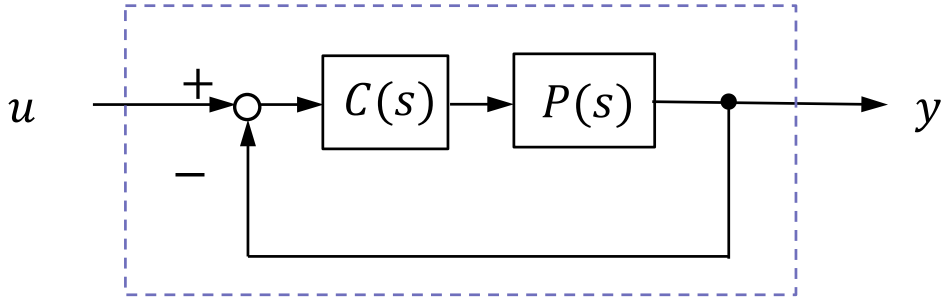
並列結合



フィードバック結合



フィードバック制御系の安定条件:



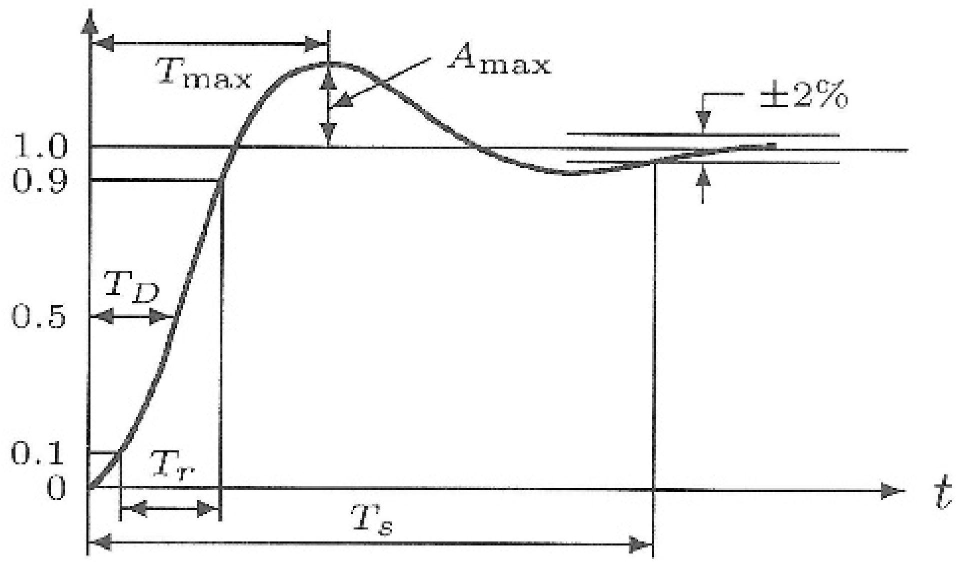
$$y = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}u$$

閉ループ伝達関数の極　　$1+P(s)C(s)=0$　　を満たす $s \in \mathbb{C}$

解ける場合:　実部の符号を調べる
解けない場合:　係数列から不安定根があるか判定
（Routh-Hurwitzの安定判別法）

過渡特性（即応性, 減衰性）

閉ループ系の時間応答（ステップ応答）に対する要求



T_r: 立上り時間 (rise time) 応答が定常値の10%から90%に達するまでの時間

T_D: 遅延時間 (delay time) 応答が最終値の50%に達するまでの時間

$A_{\max}$: 最大オーバーシュート (maximum overshoot) 最終値からの最大行き過ぎ量

$T_{\max}$: 行き過ぎ時間 (peak time) 最大オーバーシュートに達する時間

T_s: 整定時間 (settling time) 応答が最終値の±2%の範囲に落ち着くまでの時間

一般論として伝達関数のパラメータと応答指標を結びつけるのは困難

⬇

（閉ループ伝達関数を）2次系に限定して考える.

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

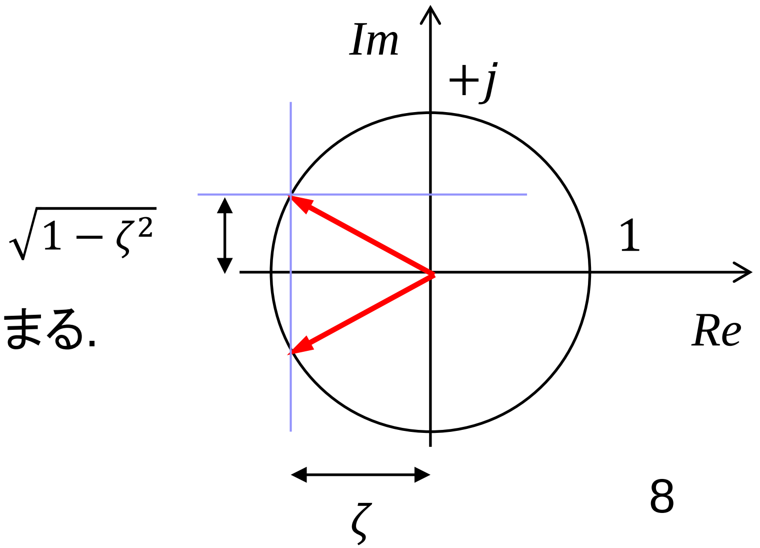
$$p_1, p_2 = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

ζ: 減衰係数, ω_n: 自然角周波数

$\zeta \geq 1$ なら実根, $0 < \zeta < 1$ なら共役複素根

複素根 $-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}$ は単位円周上

実部, 虚部のバランスは ζ, 拡大率は ω_n で決まる.



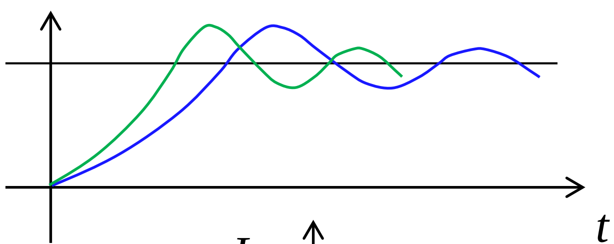
$$g_{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s] = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 1(t)$$

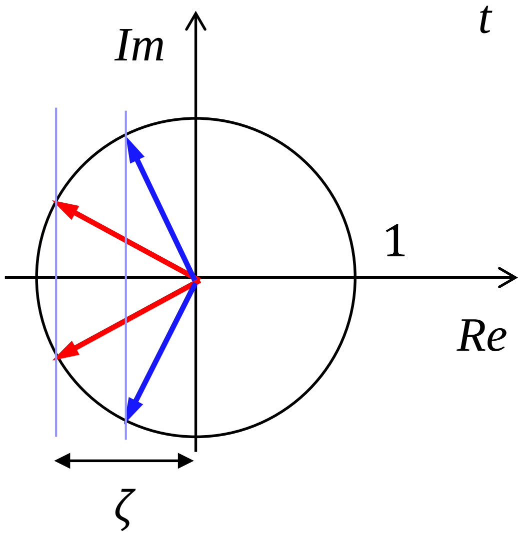
$$e^{p_1 t} = e^{\omega_n \left(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}\right)t}$$

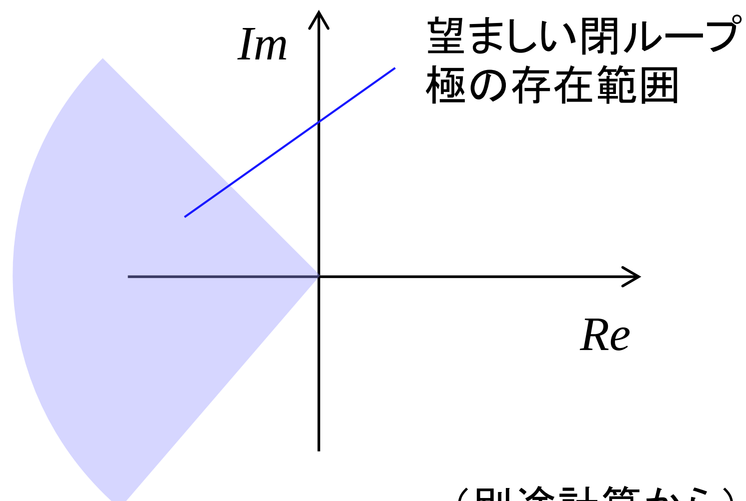
ω_n は時間方向のスケーリングなので応答高さに影響しない

$$e^{-\zeta t} e^{j\sqrt{1-\zeta^2}t}$$

減衰項　　複素正弦波







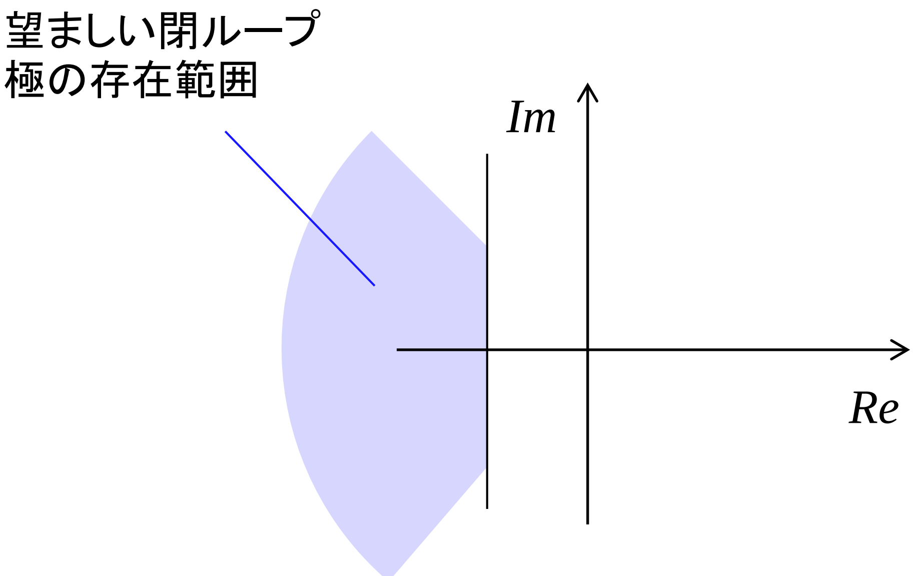
ζ: 大 ⇒ 減衰大, ζ: 小 ⇒ 減衰小

$A_{\max} \leq 5\%$ ⇒ （別途計算から） $\zeta = \cos\phi \geq 0.69$

$$g_{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s] = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 1(t)$$

$$e^{p_1 t} = e^{\omega_n\left(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}\right)t}$$

実際の応答速度は $-\omega_n \zeta$ によって決まる. ➡ $-\omega_n \zeta \le -\beta$



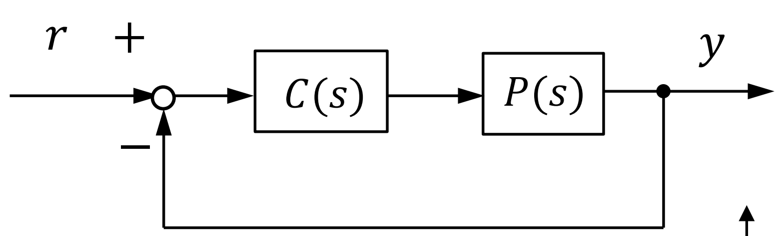
- サーボ系(追従制御) : $\zeta = 0.6 \sim 0.8$
- プロセス制御系(定値制御) : $\zeta = 0.2 \sim 0.5$

定常特性

過渡特性が, 比較的早い時刻の時間応答に関するものであったのに対し,
テスト信号を入力して時間が十分に経過したあとの振る舞いを定常特性という.

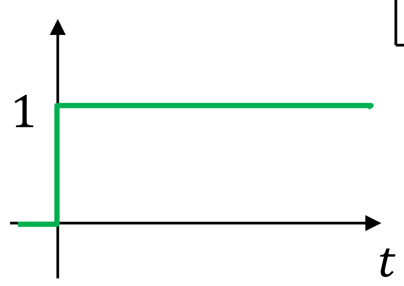
$r(t)$: 目標値, $y(t)$: 出力, $e(t)$: 偏差, e_s: 定常偏差

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} (r(t) - y(t))$$

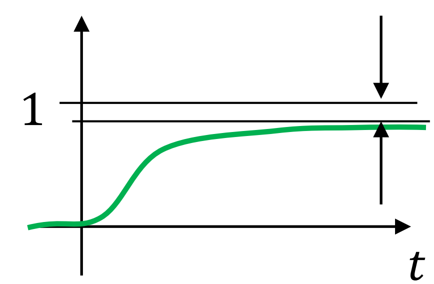


どれだけ時間が経過
しても1に届かない

＝定常偏差が存在

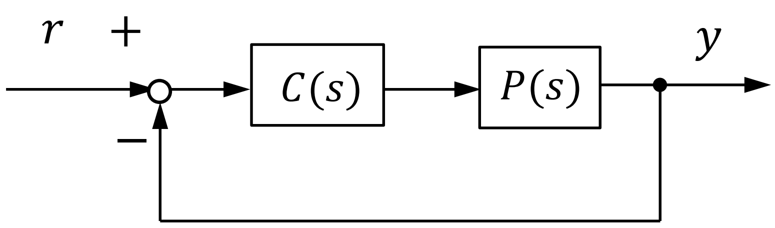


ステップ目標値



閉ループ系の応答

・定常偏差



ラプラス変換の最終値定理

信号 $y(t)$ の最終値は $\lim_{s\to 0} sY(s)$で与えられる.

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$$

$$r = \frac{1}{s}, C = K, P = \frac{1}{Ts+1}$$

$$\frac{PC}{1+PC} = \frac{\frac{K}{Ts+1}}{1+\frac{K}{Ts+1}} = \frac{K}{Ts+1+K}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} \ s\frac{PC}{1+PC}r(s)$$

ラプラス変換の最終値定理より

$$= \lim_{s\to 0} \frac{sK}{Ts+1+K}\frac{1}{s} = \frac{K}{1+K} = 1 - \frac{1}{1+K}$$

有限のK では定常偏差は 0 にならない.

ラプラス変換の性質

定義 $$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

部分積分

$$\frac{d}{dt}[f(t)g(t)] = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

$$\Rightarrow \quad [f(t)e^{-st}]_0^\infty = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt - s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

（導関数のラプラス変換）

（厳密ではないが）直観的な説明

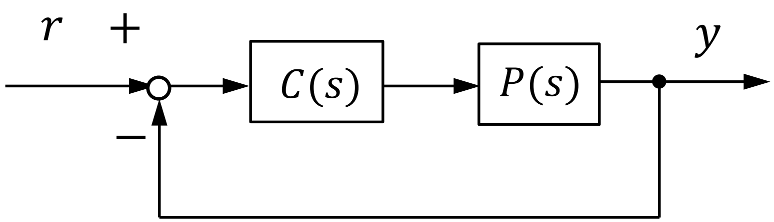
$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

$s \to 0$ なる極限を考えるとき, $e^{-st} \to 1$ なので左辺の積分は

$$\int_0^\infty f'(t)dt$$

と見なせ, その積分値は $f(\infty) - f(0)$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty)$$ （最終値定理）



$$r=\frac{1}{s}, C=\frac{K}{s}, P=\frac{1}{Ts+1}$$

$$\frac{PC}{1+PC}=\frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1+\frac{K}{s(Ts+1)}}=\frac{K}{s(Ts+1)+K}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0}\frac{sPC}{1+PC}r(s) \quad =\lim_{s\to 0}\frac{sK}{s(Ts+1)+K}\frac{1}{s}=1$$

有限のK でも 定常偏差は 0 になる． 制御器が積分器を含んでいる（サーボ系）

制御器がステップ信号 $\frac{1}{s}$ のモデルを含んでいるため, 定常偏差なし

一巡伝達関数PCが積分器を1つ含んでいる ⟹ １型の制御系

t の 0次多項式（ステップ）には追従可
(定常偏差0)

$C = K, P = \dfrac{1}{Ts+1}$ の場合は

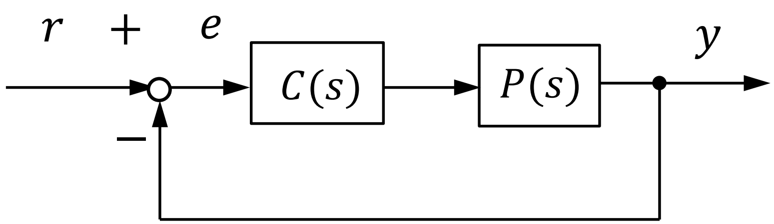
一巡伝達関数PCが積分器を1つも含まない

⇒

0型の制御系

t の 0次多項式(ステップ)には
追従できず，定常偏差が残る

ランプ信号 $r(t)=t, t\geq 0,\ r(s)=\mathcal{L}[r(t)]=1/s^2$ の場合は？



$$r=\frac{1}{s^2}, C=\frac{K}{s}, P=\frac{1}{Ts+1}$$

$$e(s)=\frac{1}{1+PC}r(s)=\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}r(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+PC}r(s) \quad =\lim_{s\to 0}\frac{s^2(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\frac{1}{s^2}=1/K$$

有限のK では 定常偏差は 0 にならない

1型の制御系 ⇒ t の 0次多項式（ステップ）には追従可 (定常偏差0)

t の 1次多項式（ランプ）には追従不可 (定常偏差が残る)

積分器を2つ持つ
2型の制御系

⇒

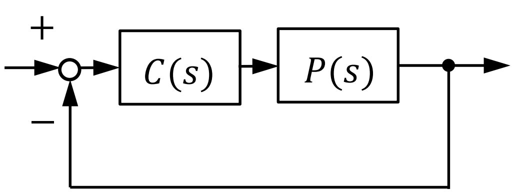
t の 0次多項式(ステップ)には追従可 (定常偏差0)
t の 1次多項式(ランプ)にも追従可 (定常偏差0)
t の 2次多項式には追従不可 (定常偏差が残る)

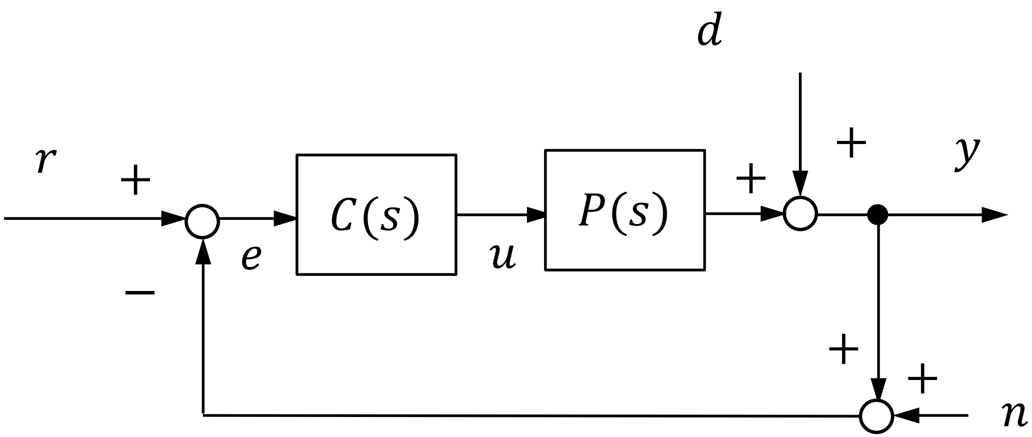
一巡伝達関数が追従したい目標信号のモデルを含んでいるとき, 定常偏差なし

⇓

内部モデル原理

周波数特性：





r: 目標値, e: 偏差, u: 制御入力, d: 外乱, y: 出力, n: 雑音

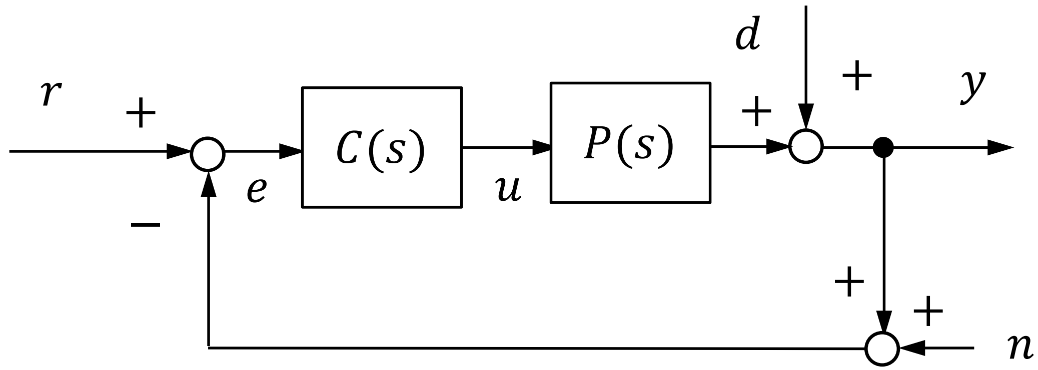
r から e への伝達関数

他の入力信号 $n = d = 0$ とおく.

$$e = r - PCe \quad \Rightarrow \quad e = \frac{1}{1 + PC} r$$

感度関数

$$S(s) := \frac{1}{1 + P(s)C(s)}$$



r: 目標値, e: 偏差, u: 制御入力, d: 外乱, y: 出力, n: 雑音

r から e への伝達関数　　$e = S(s)r$

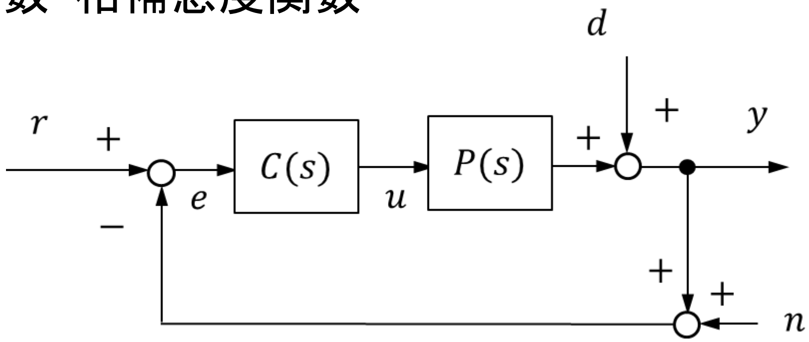
d から y への伝達関数　　$y = PC(-y) + d$ ➡ $y = S(s)d$

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)}$$ 感度関数

r から y への伝達関数
(n から y)

$$T(s) := \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$$ 相補感度関数

感度関数・相補感度関数



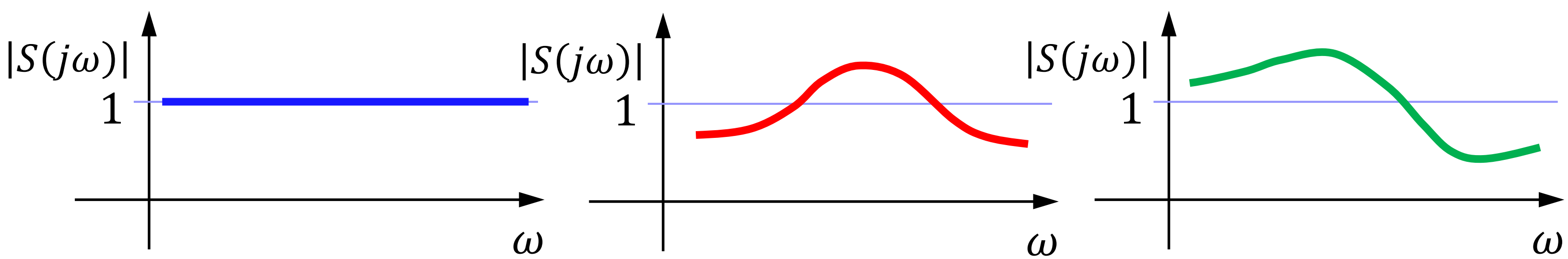
$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)}$$

$$e = S(s)\,r, y = S(s)\,d$$

一巡伝達関数 $P(s)C(s)$ が安定, 相対次数が2以上, 閉ループ系が安定

ボーデの定理

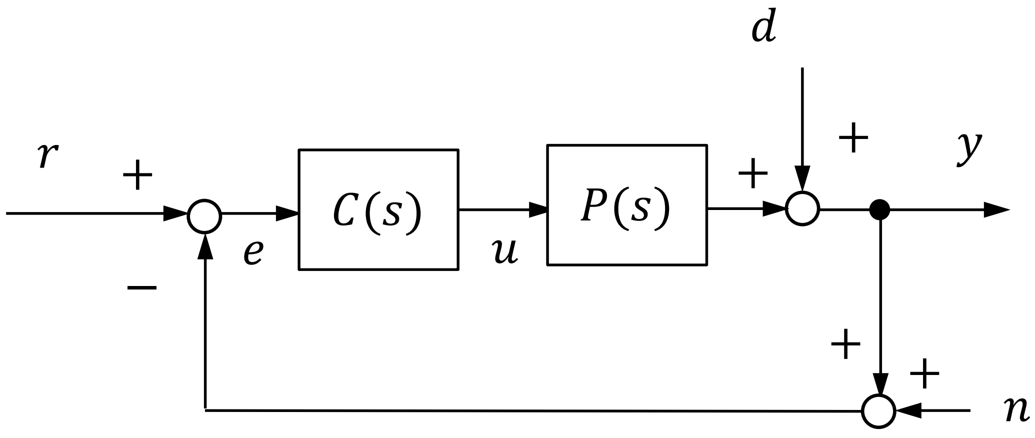
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \log|S(j\omega)|\,d\omega = 0$$



$C(s)$をどのようにに選んでも$|S(j\omega)|$ を全周波数帯域で小さくすることは出来ない

性能の限界

感度関数・相補感度関数



$$S(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)}$$

$$T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}$$

$$y = T(s)\, r, y = T(s)\, n$$

$$S(s) + T(s) = 1$$

独立に性能を選ぶことは出来ない

⬇

性能のトレードオフ

感度関数・相補感度関数の設計

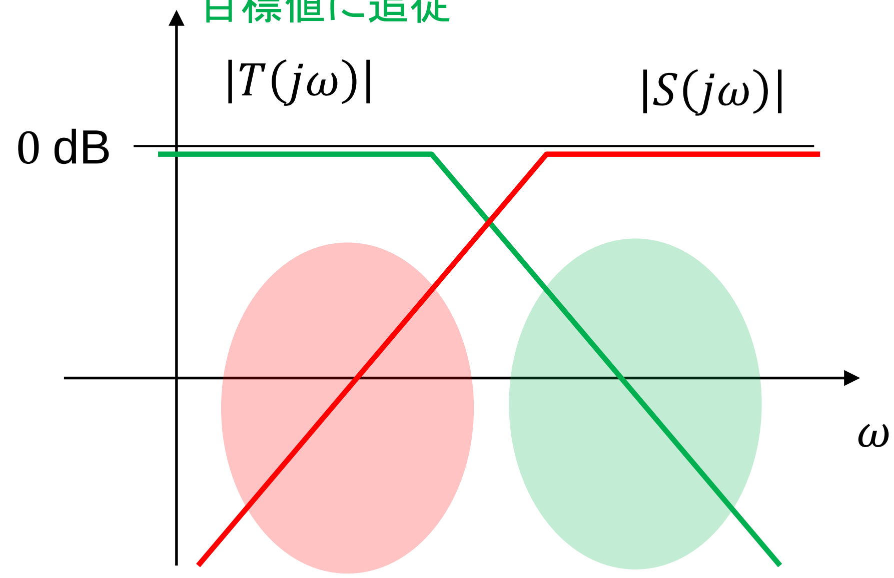
$$S(s) + T(s) = 1$$

独立に性能を選ぶことは出来ない

⬇

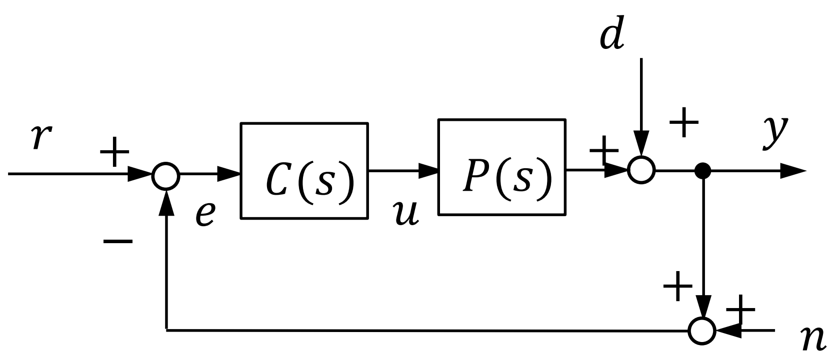
性能のトレードオフ

低周波域では
目標値に追従



低周波外乱の
影響を除去

高周波雑音の
影響を低減



$$e = S(s)\, r, y = S(s)\, d \qquad y = T(s)\, r, y = T(s)\, n$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \qquad e(s) = S(s)\,r(s)$$

サーボ系の場合は $P(s)C(s)$ が $s = 0$ に極を持つ.

$$\Downarrow$$

$s = j\omega, \omega \to 0$ で $P(j\omega)C(j\omega) \to \infty$. よって $S(j\omega) \to 0$

ステップ目標値 (周波数 0) に対する追従偏差は 0 になる.