ロボティクス基礎

第1学期 木 Ⅲ・Ⅳ限 11:00-13:10
1号館 大講義室

担当:平田 健太郎

5/16 第5回 運動学・動力学

講義日程(予定)

4/11	第1回	序論
4/16 *	第2回	運動方程式 （4/25休講分）
4/18	第3回	ラグランジュ法
5/9	第4回	座標変換
5/16	第5回	運動学･動力学
5/21 *	第6回	線形制御との関わり （5/23休講分）
5/30	第7回	サーボ系
6/6	第8回	まとめ/期末試験

＊ 補講

前回のおさらい

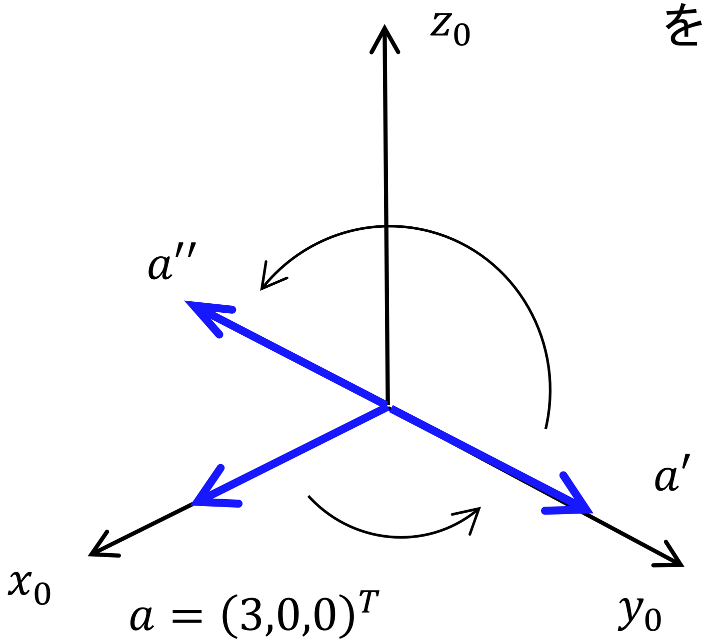
ロボットの姿勢変化を座標変換として
表現し, これをもとに各リンクの物理量
を求める. (→ラグランジュの運動方程式)

⬇

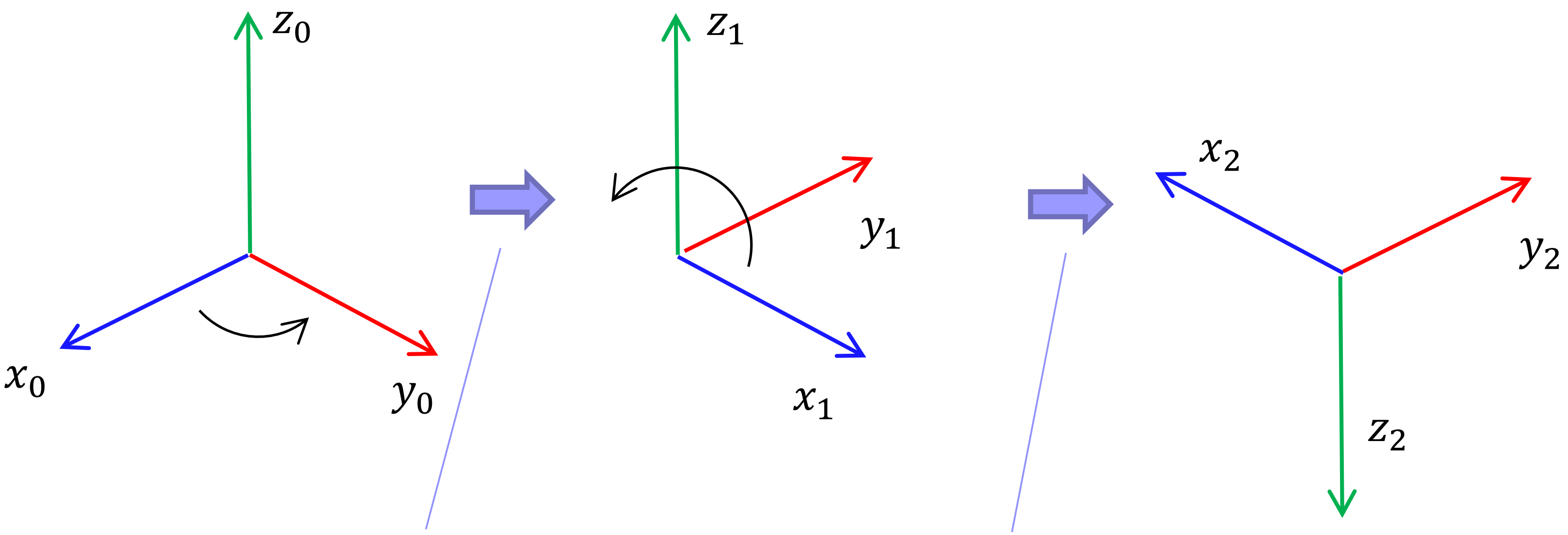
回転変換

例題:

a を z_0 軸まわりに $\pi/2$ 回転し, x_0 軸まわりに π 回転したときの ((x_0, y_0, z_0) 座標系における) 座標を求める.



$a = 3x_0$ $\quad$ $a' = 3x_1$ $\quad$ $a'' = 3x_2$

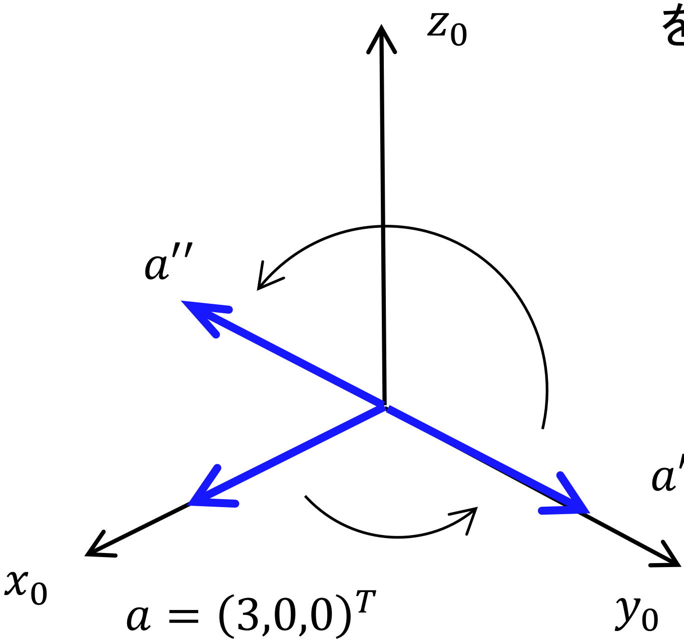


z_0 軸まわりに $\pi/2$ 回転

x_0 軸まわりに π 回転

y_1 軸まわりに $-\pi$ 回転

例題:

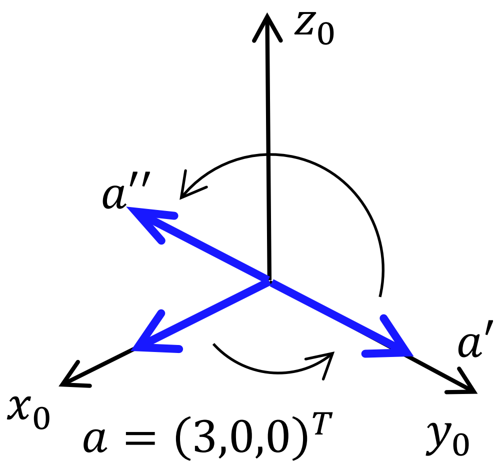


a を z_0 軸まわりに $\pi/2$ 回転し, x_0 軸まわりに π 回転したときの ((x_0, y_0, z_0) 座標系における) 座標を求める.

それぞれの回転後の座標系を (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) とすると

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0)R\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1)R(y_1, -\pi)$$



ベクトル a は座標系ごと回転しているので (x_2,y_2,z_2) 座標系でも $(3{,}0{,}0)^T$ と表される.

$$(x_1,y_1,z_1)=(x_0,y_0,z_0)R\left(z_0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(x_2,y_2,z_2)=(x_1,y_1,z_1)R(y_1,-\pi)$$

$$(x_0,y_0,z_0)a''=(x_2,y_2,z_2)\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$a''=(x_0,y_0,z_0)^{-1}(x_2,y_2,z_2)\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}=(x_0,y_0,z_0)^{-1}(x_1,y_1,z_1)R(y_1,-\pi)\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=(x_0,y_0,z_0)^{-1}(x_0,y_0,z_0)R\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)R(y_1,-\pi)\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\pi) & 0 & \sin(-\pi)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(-\pi) & 0 & \cos(-\pi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-3\\0\end{bmatrix}$$

■ 座標系の逐次変換

回転行列を $A(\theta_i)$ で表すと

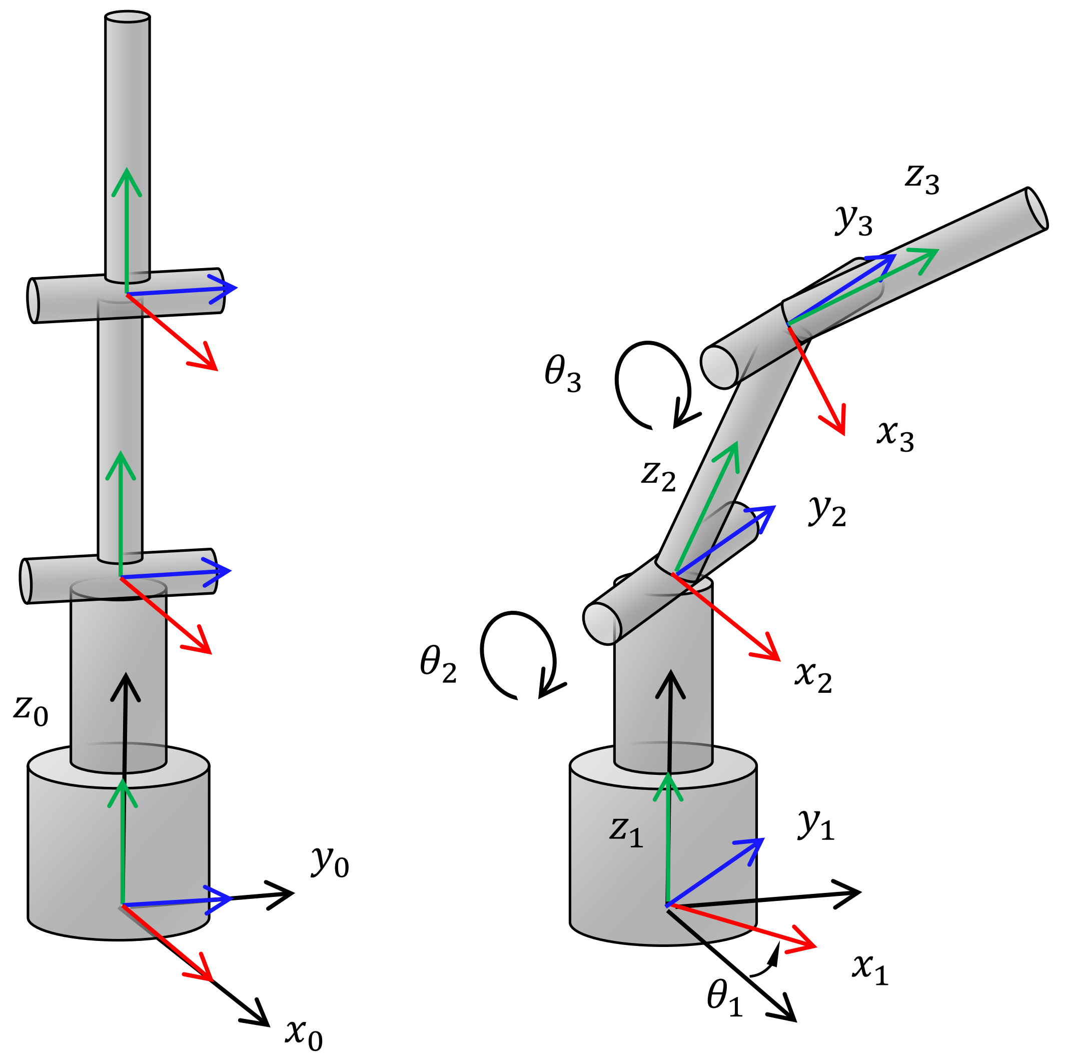
$$(x_i, y_i, z_i) = (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})A(\theta_i) = (x_{i-2}, y_{i-2}, z_{i-2})A(\theta_{i-1})A(\theta_i)$$

$$= (x_0, y_0, z_0)A(\theta_1)A(\theta_2)\cdots A(\theta_{i-1})A(\theta_i) \quad \cdots (a.2)$$

$$(x_0, y_0, z_0) = I$$

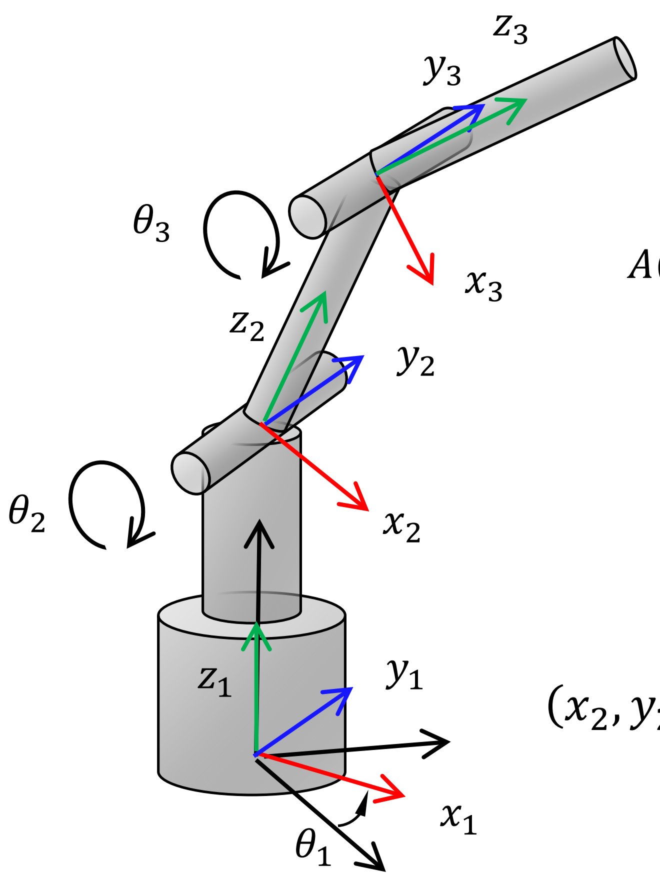
■ R-P-Pロボットの例

Rotation-Pivot-Pivot 型の3自由度
ロボットアーム



$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ のとき,
各リンク座標系の方向と
姿勢は基準座標系と一致
しているものとする.

例題:　$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ を求めよ.



回転軸: $q_1 = z_0, q_2 = y_1, q_3 = y_2$

$$A(\theta_1) = R(z_0, \theta_1) \quad A(\theta_2) = R(y_1, \theta_2) \quad A(\theta_3) = R(y_2, \theta_3)$$

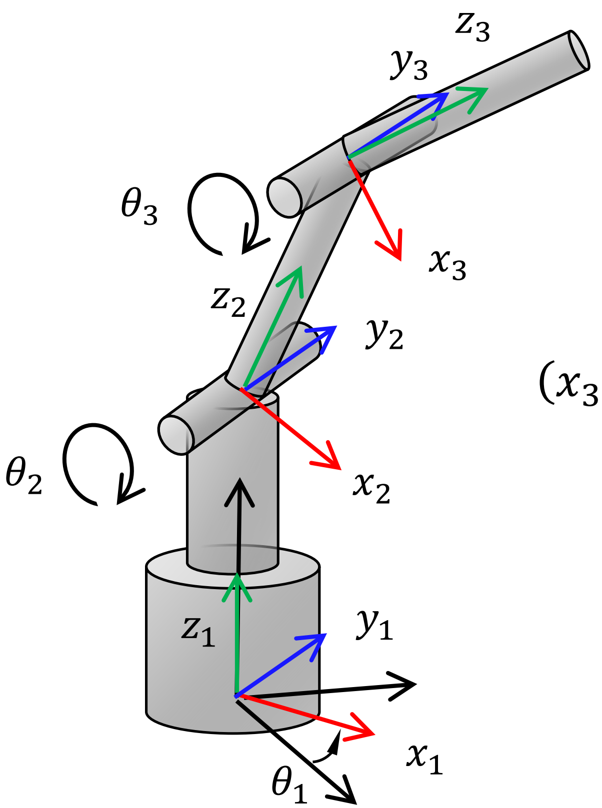
$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0)A(\theta_1)$$
$$= A(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots (a.3)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{c}\,\theta_2 & -\mathrm{s}\,\theta_1 & \mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 \\ \mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{c}\,\theta_2 & \mathrm{c}\,\theta_1 & \mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 \\ -\mathrm{s}\,\theta_2 & 0 & \mathrm{c}\,\theta_2 \end{bmatrix} \cdots (a.4)$$

$\sin \to \mathrm{s}$
$\cos \to \mathrm{c}$ と略記



$$(x_3, y_3, z_3) = A(\theta_1)A(\theta_2)A(\theta_3)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{c}(\theta_2+\theta_3) & -\mathrm{s}\,\theta_1 & \mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2+\theta_3) \\ \mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{c}(\theta_2+\theta_3) & \mathrm{c}\,\theta_1 & \mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2+\theta_3) \\ -\mathrm{s}(\theta_2+\theta_3) & 0 & \mathrm{c}(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix} \cdots (a.5)$$

$A(\theta_2)A(\theta_3) = R(y_1, \theta_2+\theta_3)$ に注意

$\sin \rightarrow \mathrm{s}$
$\cos \rightarrow \mathrm{c}$ と略記

例題: 第 i リンク先端位置を p_{ei} と表す. $p_{e1} = l_1 z_1, p_{e2} = l_1 z_1 + l_2 z_2$ より

手先位置 $p_{e3} = l_1 z_1 + l_2 z_2 + l_3 z_3$ となる. p_{e3} の座標を求めよ.

運動学・動力学

座標変換による物理量の漸化式とラグランジュ法を用いれば, (3次元空間内の)ロボットの運動方程式が導出できるので，ロボットのモデリングに関しての議論は一段落. 次にロボットの制御を考えるにあたって, 運動学・動力学の概念を整理しておく.

運動学 (Kinematics)

- ロボットの手先の位置･速度と各関節の角度･角速度の間の幾何学的関係

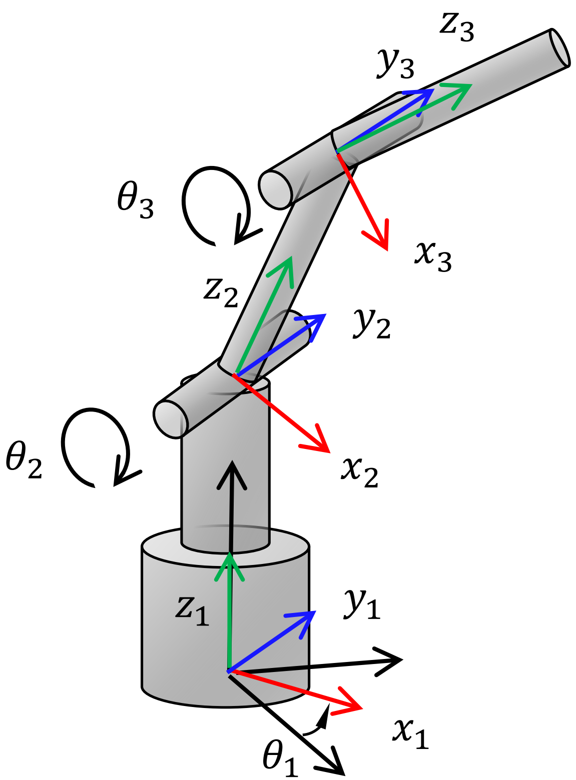
動力学 (Dynamics)

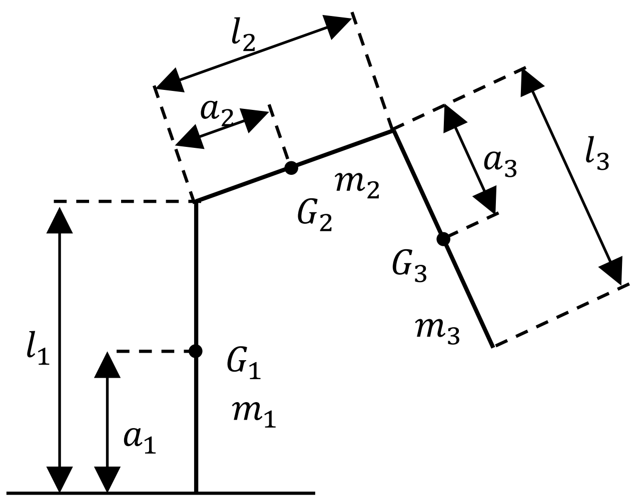
- ロボットに加える力（トルク）とその結果生じる動きの間の関係. 常微分方程式（運動方程式）によって記述される.

通常,（ロボティクス以外の）制御で考えるのはこちら

$l_1 = l_2 = l_3 = 2$ とするとき，
先の例題（R-P-Pマニピュレータ）のロボットの手先位置は次のように求められる．

$$p_{e3} = \begin{bmatrix} x_{e3} \\ y_{e3} \\ z_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2 + \theta_3) \\ 2\,\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2 + \theta_3) \\ 2 + 2\,\mathrm{c}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}$$





- 順運動学

- 各関節の角度･角速度→ロボットの動きの関係

- 逆運動学　(Inverse Kinematics)

- 手先位置･速度→各関節の角度･角速度の関係

$$\begin{bmatrix} x_{e3} \\ y_{e3} \\ z_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2 + \theta_3) \\ 2\,\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2 + \theta_3) \\ 2 + 2\,\mathrm{c}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}$$

順運動学　$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を与えると x_{e3}, y_{e3}, z_{e3} が定まる.

$$x := \begin{bmatrix} x_{e3} \\ y_{e3} \\ z_{e3} \end{bmatrix},\ q := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$ とおくと, $x = f(q)$.

逆運動学　$q = f^{-1}(x)$ を解析的に求めるのは困難. 各動作点近傍で線形近似して求める.

$$x := \begin{bmatrix} x_{e3} \\ y_{e3} \\ z_{e3} \end{bmatrix},\ q := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix},\ x = \bar{x} + \Delta x,\ \ q = \bar{q} + \Delta q$$ とすると

関数のテーラー展開

$y = f(x)$ を $x = a$ のまわりで多項式によって近似することをいう.

$$y = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$\begin{bmatrix} x_{e3} \\ y_{e3} \\ z_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2+\theta_3) \\ 2\,\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2+\theta_3) \\ 2 + 2\,\mathrm{c}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{e3} + \Delta x_{e3} = 2\,\mathrm{c}(\bar{\theta}_1 + \Delta\theta_1)\,\mathrm{s}(\bar{\theta}_2 + \Delta\theta_2) + 2\mathrm{c}(\bar{\theta}_1 + \Delta\theta_1)\,\mathrm{s}(\bar{\theta}_2 + \Delta\theta_2 + \bar{\theta}_3 + \Delta\theta_3)$$

$$\simeq 2(\mathrm{c}\,\bar{\theta}_1 - \mathrm{s}\bar{\theta}_1\,\Delta\theta_1)(\mathrm{s}\,\bar{\theta}_2 + \mathrm{c}\bar{\theta}_2\,\Delta\theta_2)$$
$$+2(\mathrm{c}\,\bar{\theta}_1 - \mathrm{s}\bar{\theta}_1\,\Delta\theta_1)\Big(\mathrm{s}(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3) + \mathrm{c}(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3)\,(\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3)\Big)$$

各三角関数の1次までのテーラー展開をとる

$$\simeq 2\ \mathrm{c}\,\bar{\theta}_1\,\mathrm{s}\bar{\theta}_2 - 2\mathrm{s}\bar{\theta}_1\,\mathrm{s}\bar{\theta}_2\,\Delta\theta_1 + 2\,\mathrm{c}\,\bar{\theta}_1\,\mathrm{c}\bar{\theta}_2\,\Delta\theta_2$$
$$+2\ \mathrm{c}\,\bar{\theta}_1\,\mathrm{s}(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3) + 2\mathrm{s}\bar{\theta}_1\mathrm{s}(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3)\Delta\theta_1 + 2\ \mathrm{c}\,\bar{\theta}_1\,\mathrm{c}(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3)(\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3)$$

高次項は無視する

$$= \bar{x}_{e3} + 2\{\mathrm{s}\bar{\theta}_1\mathrm{s}(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3) - \mathrm{s}\bar{\theta}_1\,\mathrm{s}\bar{\theta}_2\}\,\Delta\theta_1$$
$$+2\{\mathrm{c}\,\bar{\theta}_1\,\mathrm{c}\bar{\theta}_2 + \mathrm{c}\,\bar{\theta}_1\,\mathrm{c}(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3)\}\,\Delta\theta_2 + 2\,\mathrm{c}\,\bar{\theta}_1\,\mathrm{c}(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3)\Delta\theta_3$$

$$=: \bar{x}_{e3} + a_{11}\,\Delta\theta_1 + a_{12}\,\Delta\theta_2 + a_{13}\Delta\theta_3$$

$\Delta\theta_i$ の係数を整理

同様にして, $\Delta\bar{y}_{e3} = a_{21}\,\Delta\theta_1 + a_{22}\,\Delta\theta_2 + a_{23}\Delta\theta_3$,
$\Delta\bar{z}_{e3} = a_{31}\,\Delta\theta_1 + a_{32}\,\Delta\theta_2 + a_{33}\Delta\theta_3$ を求める.

$\bar{J} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ とおくと, $\Delta x = \bar{J}\Delta q$. これより　$\Delta q = \bar{J}^{-1}\Delta x$

とすれば, 現在の手先位置の微小変化に対応する関節角度の操作量が分かる.

速度の対応は　　$\Delta q/\Delta t = \bar{J}^{-1}\Delta x/\Delta t$

一般論　$\dfrac{\partial f}{\partial q} =: J(q)$　ヤコビアン　　$\dfrac{dq}{dt} = J^{-1}(q)\dfrac{dx}{dt}$

現在の動作点近傍では　$J(q) = \dfrac{\partial f}{\partial q} = \dfrac{\Delta x}{\Delta q} = \bar{J}$　　$\dfrac{dq}{dt} = \bar{J}^{-1}\dfrac{dx}{dt}$

$$x = f(q) = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \\ f_3(q) \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_{e3} \\ y_{e3} \\ z_{e3} \end{bmatrix}, \; q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

別の言い方をすれば, これはベクトル変数に対してベクトル値を返す関数 f のテーラー展開

$$\bar{x} = f(\bar{q}) \qquad \bar{x} + \Delta x = f(\bar{q} + \Delta q) \simeq f(\bar{q}) + \bar{J}\Delta q$$

定数項　1次項

$$[\bar{J}]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}$$

1次導関数の値（微係数）

例題: $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_3 = \pi/6$ のときのヤコビアンを求めよ.

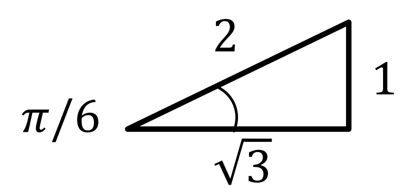
例題: $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_3 = \pi/6$ のときのヤコビアンを求めよ.

$$f(q) = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \\ f_3(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2+\theta_3) \\ 2\,\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2+\theta_3) \\ 2 + 2\,\mathrm{c}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix} \qquad [\bar{J}]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}$$

$$[\bar{J}]_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} = -2s\theta_1 s\theta_2 - 2s\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) \to -2\frac{1}{2}\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$[\bar{J}]_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} = 2c\theta_1 c\theta_2 + 2c\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) \to \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$[\bar{J}]_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} = 2c\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) \to \frac{\sqrt{3}}{2}$$

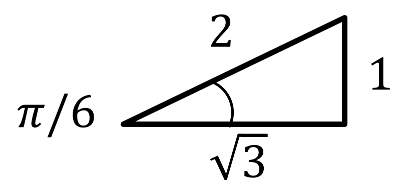


$$f(q) = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \\ f_3(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2+\theta_3) \\ 2\,\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2+\theta_3) \\ 2 + 2\,\mathrm{c}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}(\theta_2+\theta_3) \end{bmatrix} \qquad [\bar{J}]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}$$

$$[\bar{J}]_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} = 2c\theta_1 s\theta_2 + 2c\theta_1 s(\theta_2+\theta_3) \to \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$$

$$[\bar{J}]_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} = 2s\theta_1 c\theta_2 + 2s\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) \to \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$[\bar{J}]_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} = 2s\theta_1 c(\theta_2+\theta_3) \to \frac{1}{2}$$

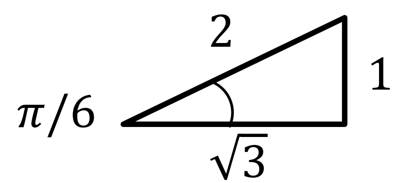


$$f(q) = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \\ f_3(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2 + \theta_3) \\ 2\,\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}\,\theta_2 + 2\mathrm{s}\,\theta_1\,\mathrm{s}(\theta_2 + \theta_3) \\ 2 + 2\,\mathrm{c}\,\theta_2 + 2\mathrm{c}(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} \qquad [\bar{J}]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}$$

$$[\bar{J}]_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial \theta_1} = 0 \to 0$$

$$[\bar{J}]_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial \theta_2} = -2s\theta_2 - 2s\,(\theta_2 + \theta_3) \to -1 - \sqrt{3}$$

$$[\bar{J}]_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial \theta_3} = -2s\,(\theta_2 + \theta_3) \to -\sqrt{3}$$



$$\bar{J} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 - \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -2 - 2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} =: \frac{M}{2}$$

$\Delta x = \bar{J}\Delta q$. これより　$\Delta q = \bar{J}^{-1}\Delta x$ とすれば, 現在の手先位置の微小変化に対応する関節角度の操作量が分かる.

$$\bar{J}^{-1} = 2M^{-1}$$

$$\begin{aligned} |M| &= \left(-1 - \sqrt{3}\right)\left[-2\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{3}\right) + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)\right] - \left(3 + \sqrt{3}\right)\left[-2\sqrt{3}\left(3 + \sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)\right] \\ &= 16(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

正方行列から第 i 行と第 j 列を取り除いた小行列の行列に符号数 $(-1)^{i+j}$ をかけたものを (i,j)要素の余因子という.

行列 M に対して, その(i,j)要素が M の(j,i) 要素の余因子となっている行列を M の余因子行列といい, $adj(M)$ で表す.

M の行列式を $|M|$ で表すとき, M の逆行列は次式で与えられる:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} adj(M)$$

あとは(粛々と) M の余因子行列を計算すれば $\bar{J}^{-1}$ が求まる.

$$\bar{J}^{-1} = 2 \begin{bmatrix} -0.0915 & 0.1585 & 0 \\ 0.3750 & 0.2165 & 0.2500 \\ -0.5915 & -0.3415 & -0.6830 \end{bmatrix}$$

（前出）2リンクアームの運動方程式：

$$\begin{bmatrix} J_1 & \beta\cos(\theta_2-\theta_1) \\ \beta\cos(\theta_1-\theta_2) & J_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta\sin(\theta_1-\theta_2) \\ \beta\sin(\theta_2-\theta_1) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} D_1+D_2 & -D_2 \\ -D_2 & D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (m_1+2m_2)g\ell_1\sin\theta_1 \\ m_2 g\ell_2\sin\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1-\tau_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

⇩

一般のロボットの運動方程式：

θ: 関節角ベクトル

$$J(\theta)\ddot{\theta} + C\left(\dot{\theta},\theta\right) + D\dot{\theta} + P(\theta) = \tau$$

慣性力項

遠心力・コリオリ力項

粘性摩擦力項

重力項

駆動トルク

- 順動力学

- 各関節に作用するトルク→ロボットの動きの関係

- 逆動力学 (Inverse Dynamics)

- ロボットの姿勢（各関節の角度の時間関数）→各関節に作用しているトルクの関係

通常, フィードバック制御で考えるのは順動力学

- 順動力学

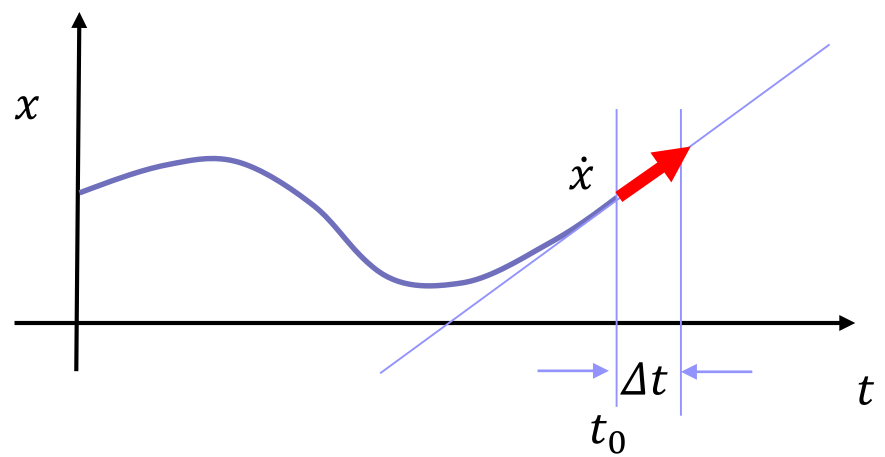
与えたトルクに対するロボットの動きをシミュレーションする際に用いられる.

数値計算法:　オイラー法

$\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0$に対して

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \dot{x}(\tau)d\tau = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t,x)d\tau$$

$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t,x)d\tau \simeq \Delta t f\big(t_0, x(t_0)\big)$ なる近似を用いる



一般のロボットの運動方程式:　$J(\theta)\ddot{\theta} + C(\dot{\theta}, \theta) + D\dot{\theta} + P(\theta) = \tau$

⇩

$$\frac{d}{dt}\dot{\theta} = \ddot{\theta} = J(\theta)^{-1}\left[\tau - C(\dot{\theta}, \theta) - D\dot{\theta} - P(\theta)\ \right]$$

$$\frac{d}{dt}\theta = \dot{\theta}$$

⇩

$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$, $f(x,t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ J(\theta)^{-1}\left[\tau - C(\dot{\theta}, \theta) - D\dot{\theta} - P(\theta)\ \right] \end{bmatrix}$ とおくと

$\dot{x} = f(t, x)$ であるので, 初期値 $\theta(0), \dot{\theta}(0)$ と $\tau(t)$ が与えられれば解軌道 $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ を計算できる.

- 逆動力学 (Inverse Dynamics)

望ましいロボットの姿勢（各関節角度）を時間関数として与え, 各関節に加えるべきトルクを計算

一般のロボットの運動方程式: $J(\theta)\ddot{\theta} + C\left(\dot{\theta}, \theta\right) + D\dot{\theta} + P(\theta) = \tau$

$\theta(t)$が与えられているとき, $\dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)$ が計算できる.

これらを左辺に代入すれば, 加えるべきトルク $\tau(t)$ が求められる.

⇩

正確なモデルに依存したフィードフォワード制御なので,
通常これだけで, うまくいくとは考えにくい.

(動力学でなく) 運動学に基づいてロボットを制御する場合も多い.

- ロボットの運動は複雑なので, 静的な姿勢の問題, あるいは準静的な速度の問題として考える.

- 各関節毎に（モデルレスの）ハイゲインフィードバックを施せば, 角度（角速度）の指令値に実際の角度（角速度）が追従するとみなしてよい場合がある.