ロボティクス基礎

第1学期 木 Ⅲ・Ⅳ限 11：00-13：10
1号館 大講義室

担当：平田 健太郎

5/9　　第4回 座標変換

講義日程(予定)

4/11		第1回	序論
4/16	*	第2回	運動方程式 （4/25休講分）
4/18		第3回	ラグランジュ法
5/9		第4回	座標変換
5/16		第5回	運動学･動力学
5/21	*	第6回	線形制御との関わり （5/23休講分）
5/30		第7回	サーボ系
6/6		第8回	まとめ/期末試験

* 補講

座標変換の前に

一次変換
Linear transformation

2次元の例：座標 (α,β) を座標 (α',β') に移す線形な変換

$$\alpha' = f_1(\alpha,\beta),\ \beta' = f_2(\alpha,\beta)$$

線形なので $\alpha' = a\alpha + b\beta,\ \beta' = c\alpha + d\beta$ と書かれる.
a,b,c,d は定数.

まとめて書くと

$$\begin{bmatrix}\alpha' \\ \beta'\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}$$

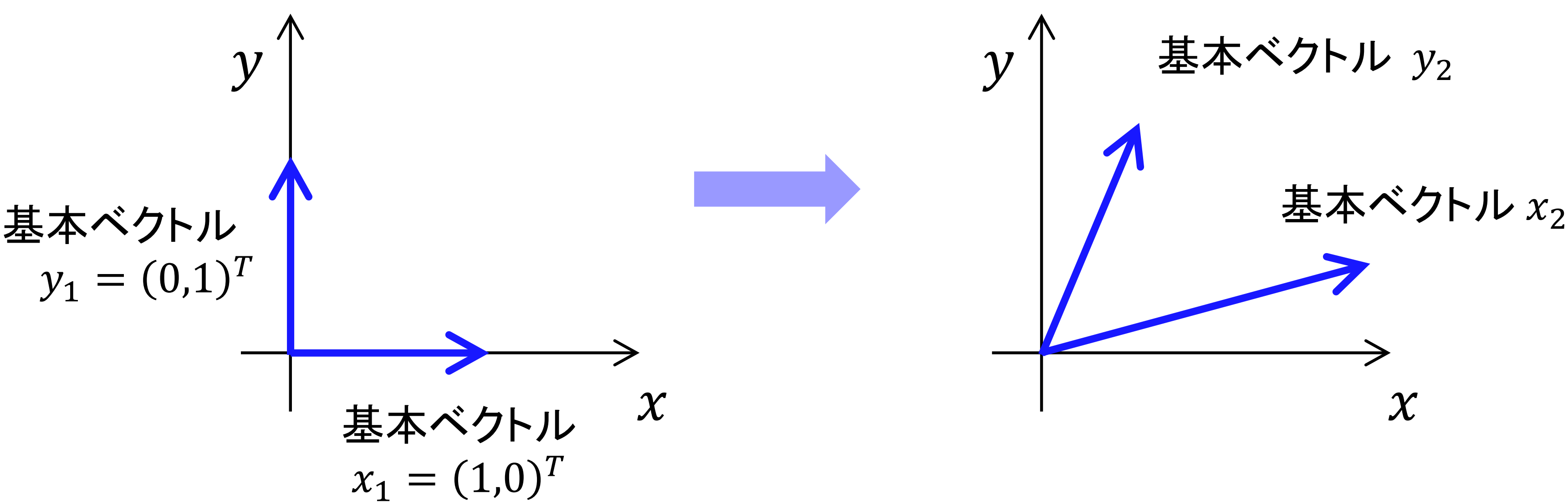
（正方）行列 A が一次変換に対応

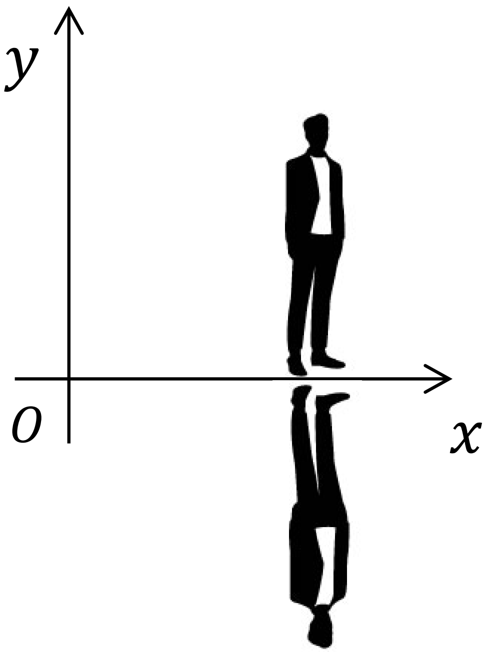
$u = (\alpha, \beta), v = (\alpha', \beta') \Rightarrow v = f(u)$

$$f(\alpha x_1 + \beta y_1) = \alpha f(x_1) + \beta f(y_1) = \alpha x_2 + \beta y_2$$

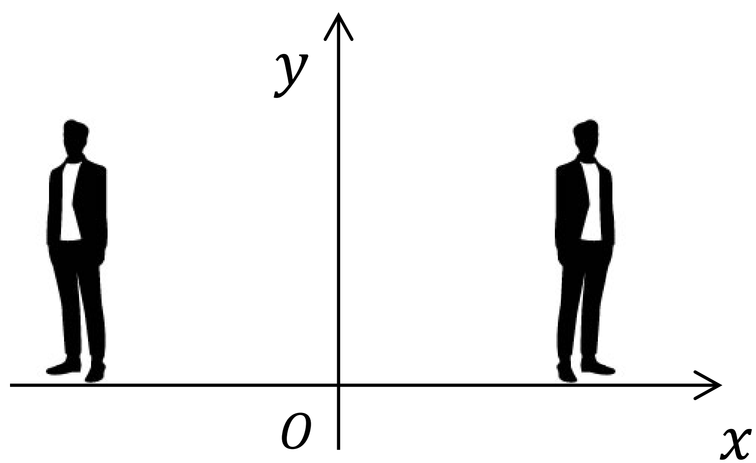
α, β はスカラーなので, 線形性の定義からこうなる.

任意のベクトルは基本ベクトルの線形和で記述できるので,
1次変換によって基本ベクトルがどこに写像されるかが重要.

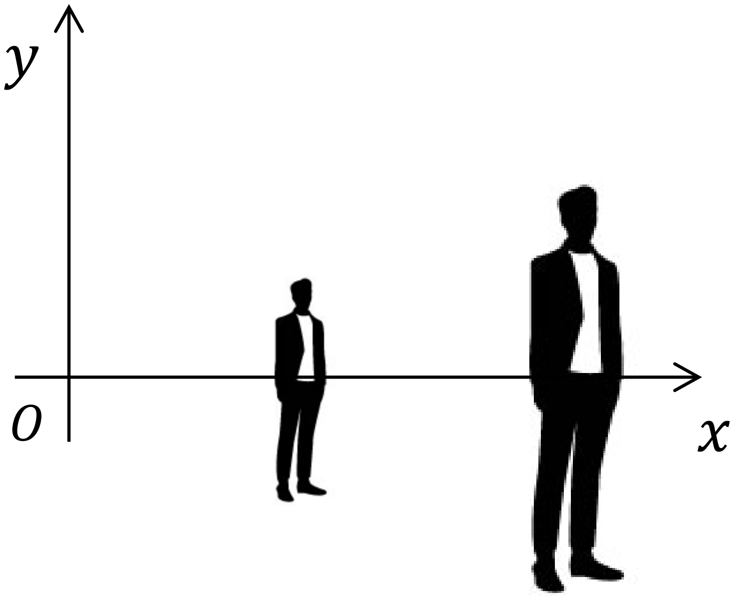




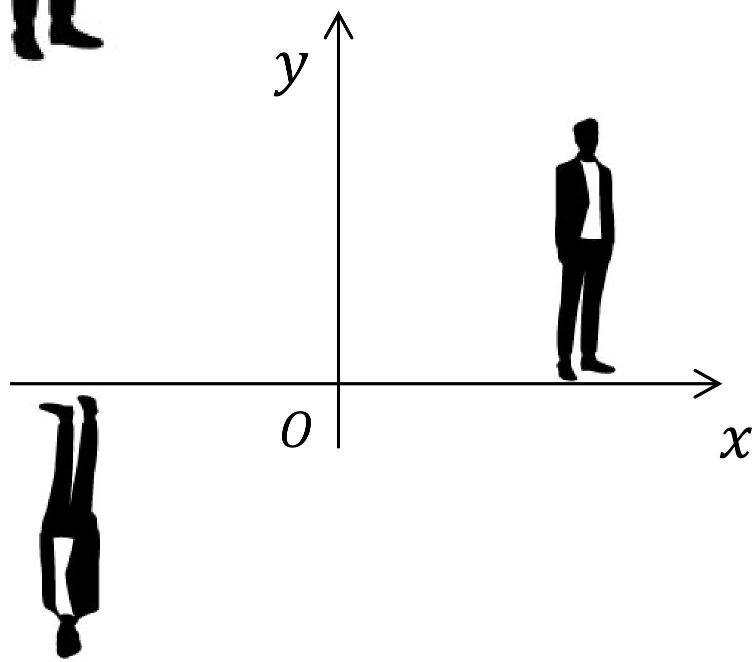
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



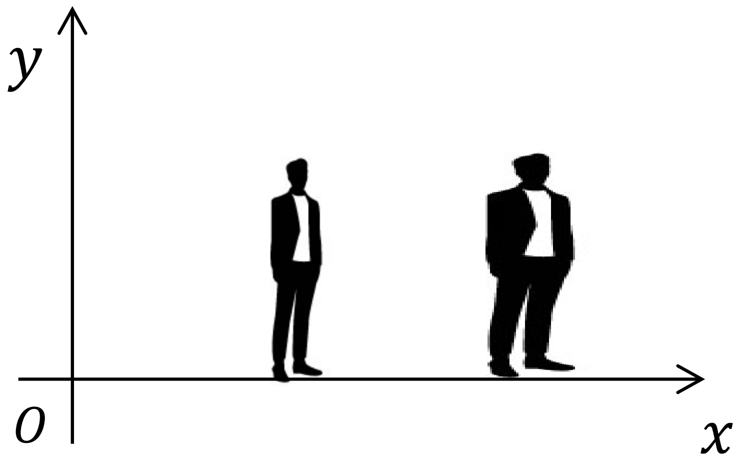
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



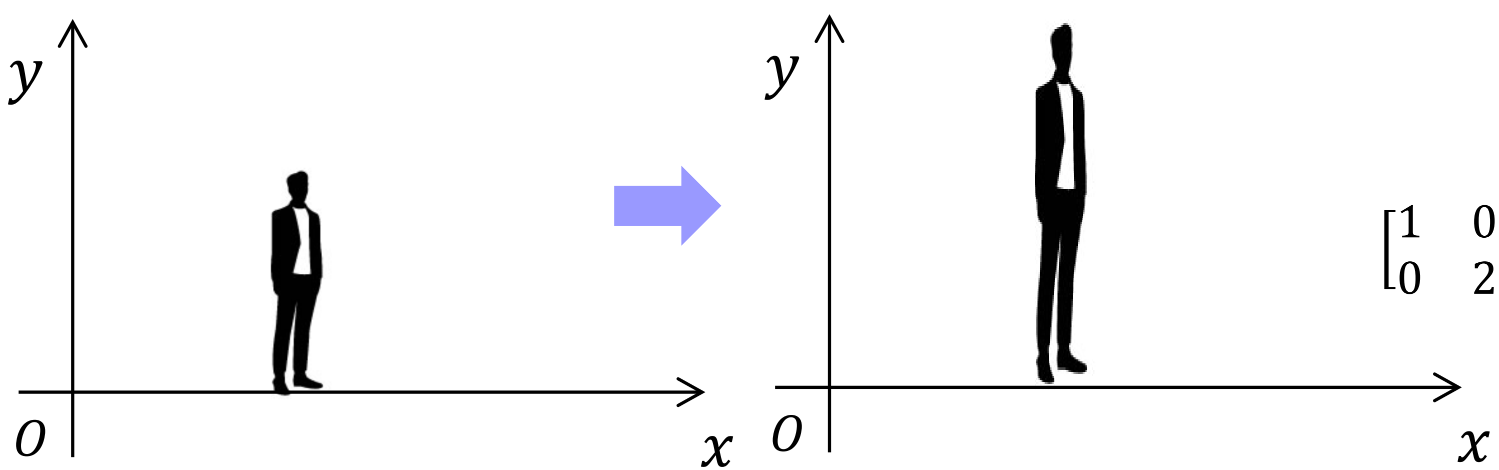
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



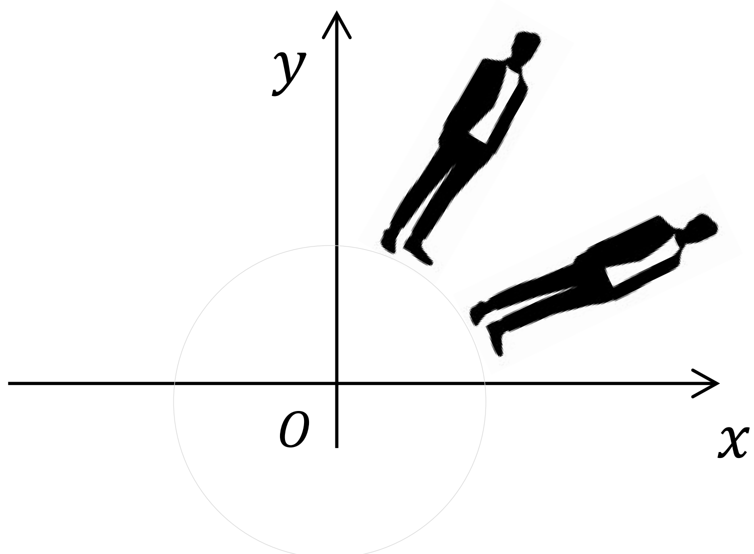
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

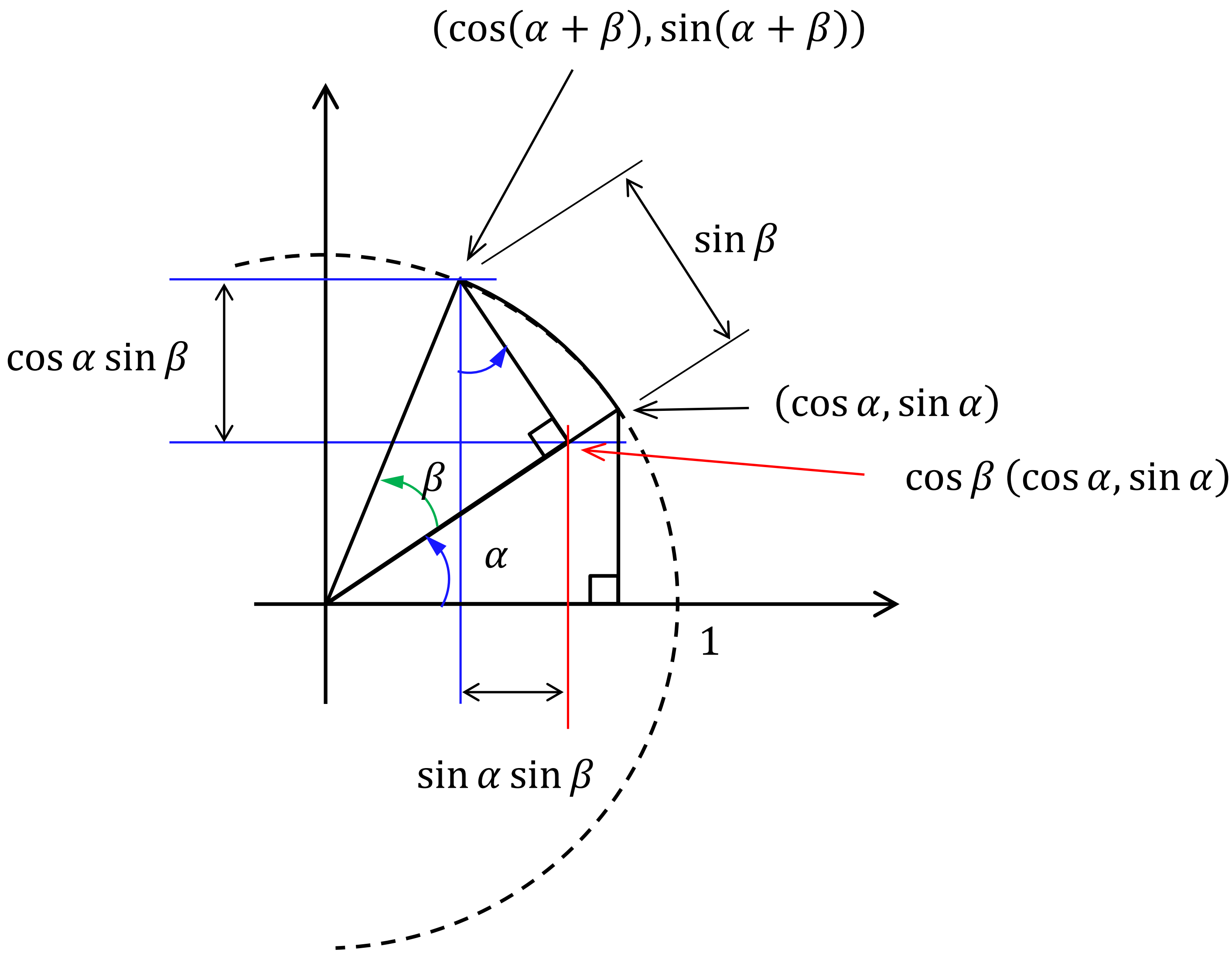


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

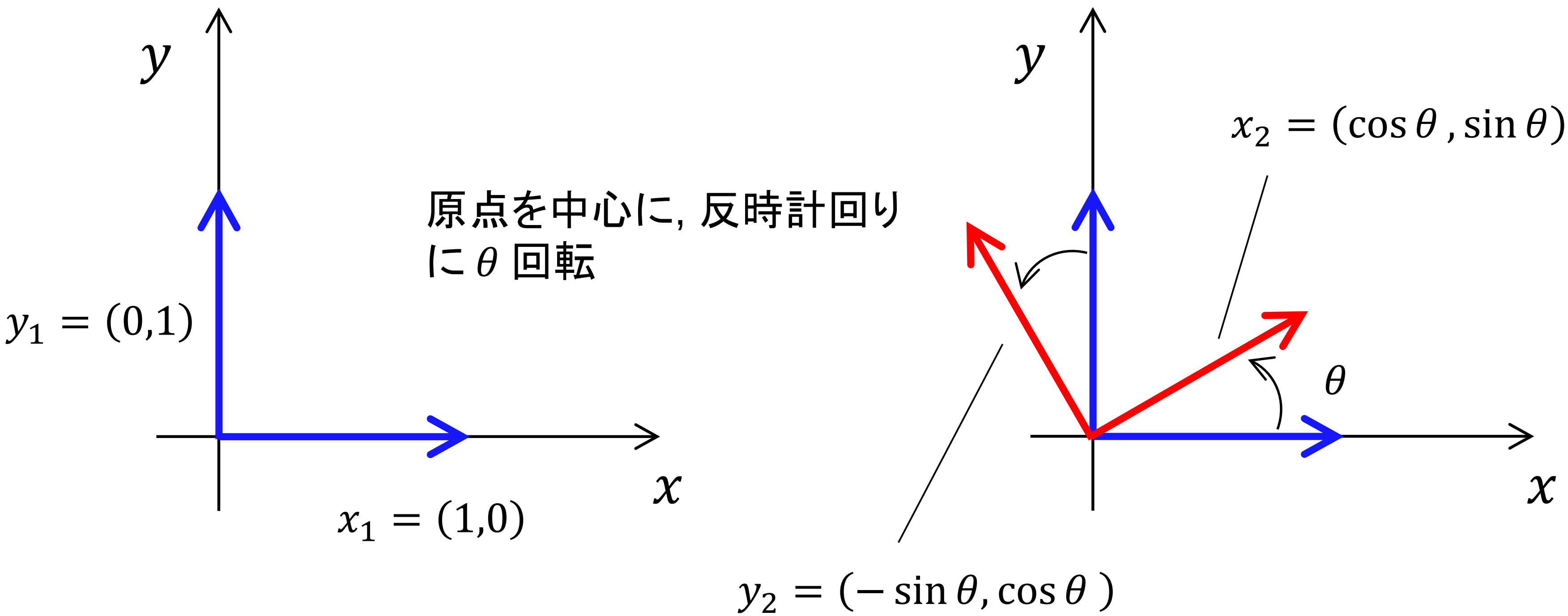

y
O
x

一次変換の特殊ケースが, 以下でいうところの座標変換(回転)である.

三角関数の加法定理を導出せよ.

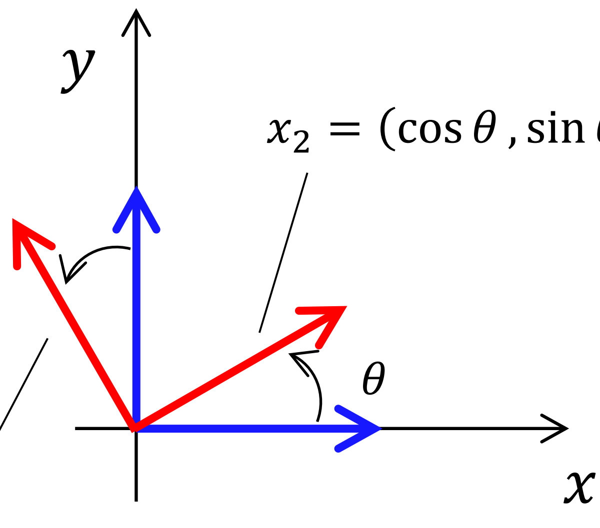

$(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$
$\sin\beta$
$\cos\alpha\sin\beta$
$(\cos\alpha, \sin\alpha)$
$\cos\beta\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$
β
α
1
$\sin\alpha\sin\beta$

■ 回転の行列表現 (2D)



y
x
$y_1 = (0,1)$
$x_1 = (1,0)$
原点を中心に, 反時計回り
に θ 回転
y
x
$x_2 = (\cos\theta, \sin\theta)$
θ
$y_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$

回転行列を $R(\theta)$ とする。後ろから掛けたいので, 座標を縦ベクトルで表す.



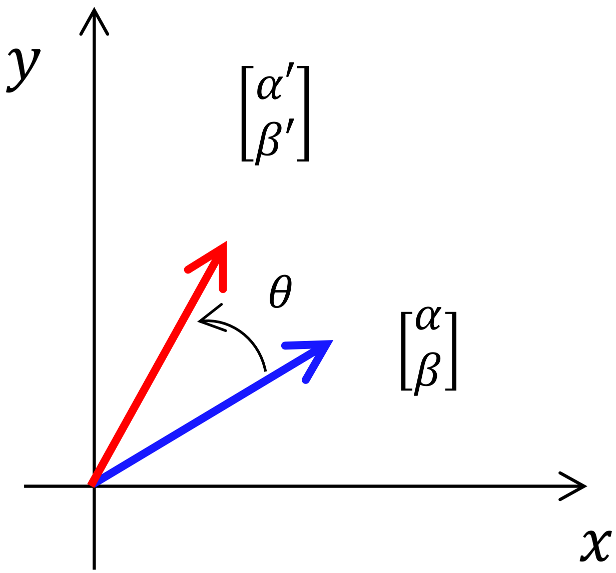
$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to x_2 = \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to y_2 = \begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

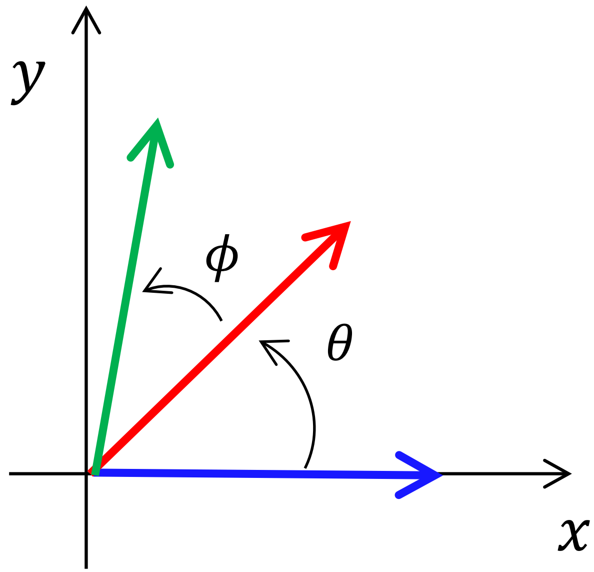
上の関係を横に並べて書くと $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = R(\theta)$



回転前後の座標値

$$\begin{bmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$

■ 回転行列の性質



$$\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos(\phi+\theta)\\ \sin(\phi+\theta)\end{bmatrix} = R(\phi)\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

$$= R(\phi+\theta)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$= R(\phi)R(\theta)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$R(\phi+\theta) = R(\phi)R(\theta)$$

$$\begin{bmatrix}\cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta)\\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta)\\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & ?\\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta & ?\end{bmatrix}$$

1列目のみを取り出すと

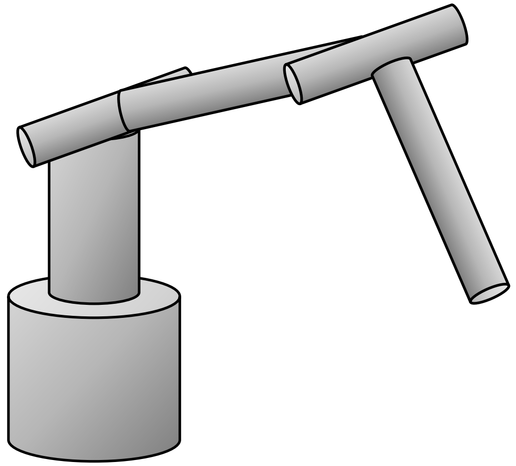
$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\cos(\phi+\theta)\\ \sin(\phi+\theta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta\\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta\end{bmatrix}$$

➡ 加法定理！

複素数のオイラー表示を使うと？

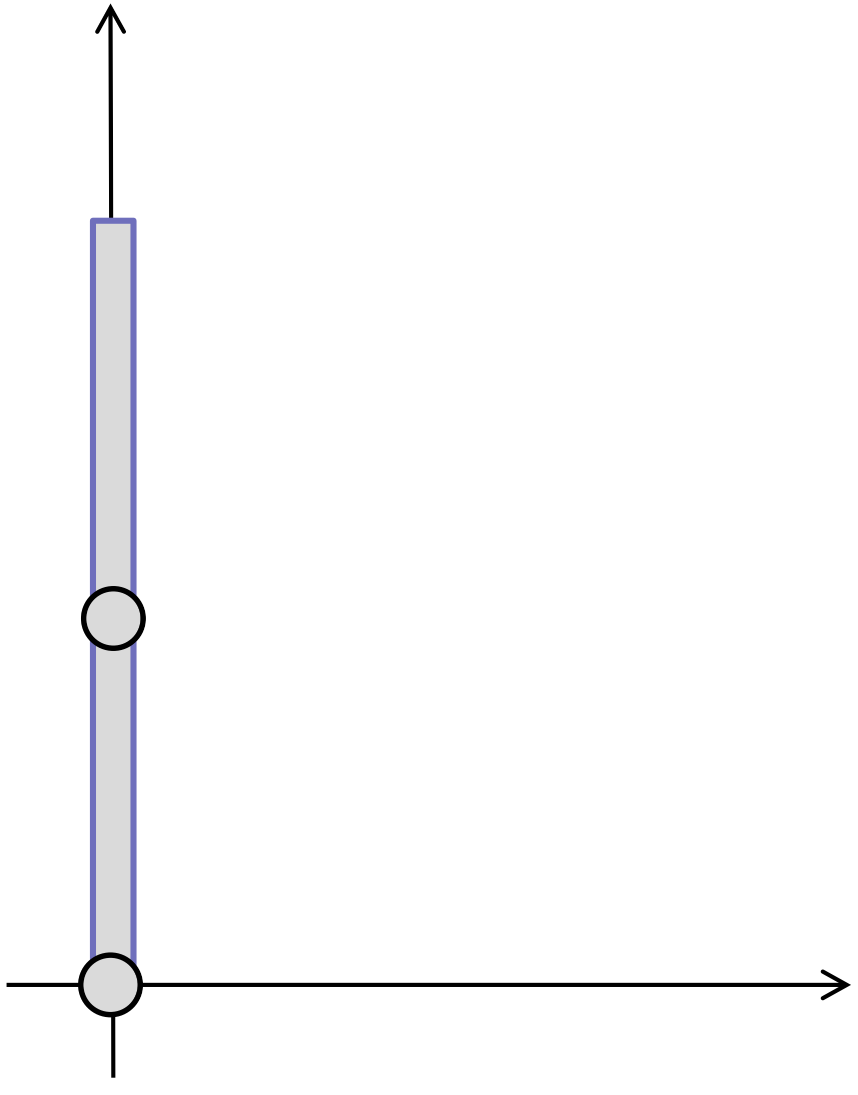
座標変換

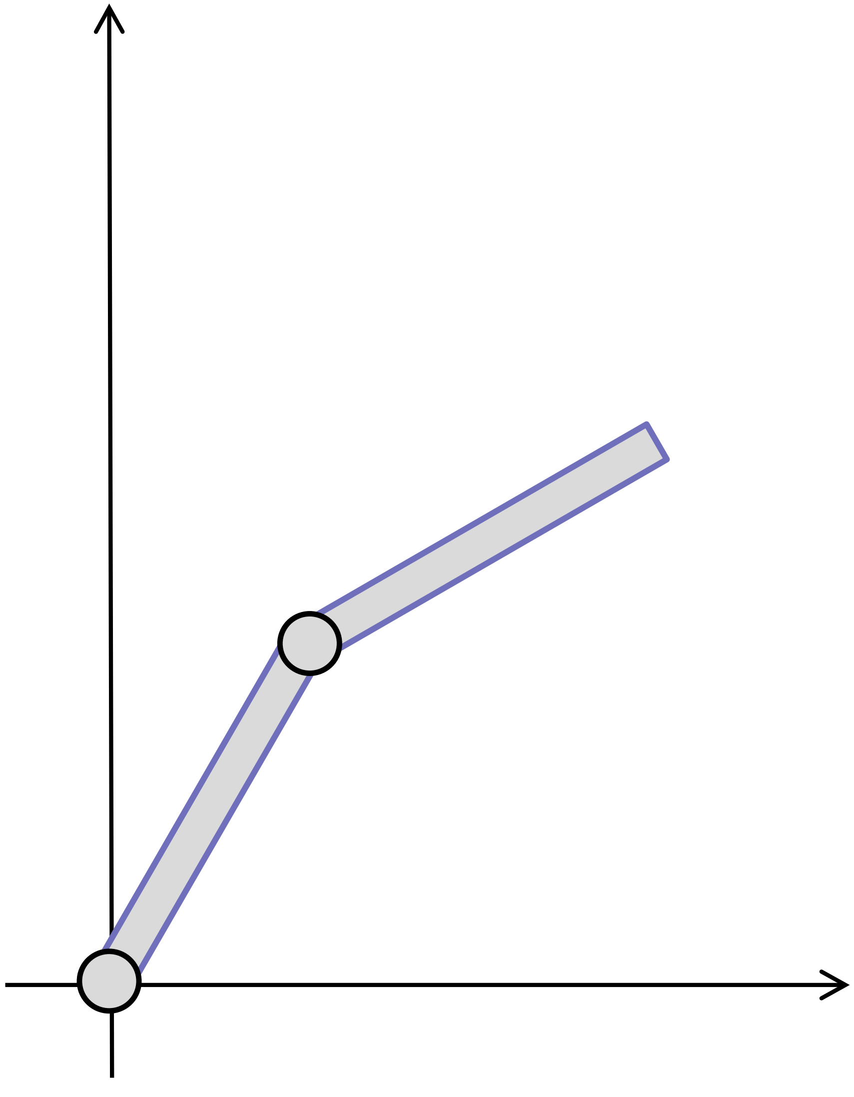
■ 座標変換に至る基本的考え方

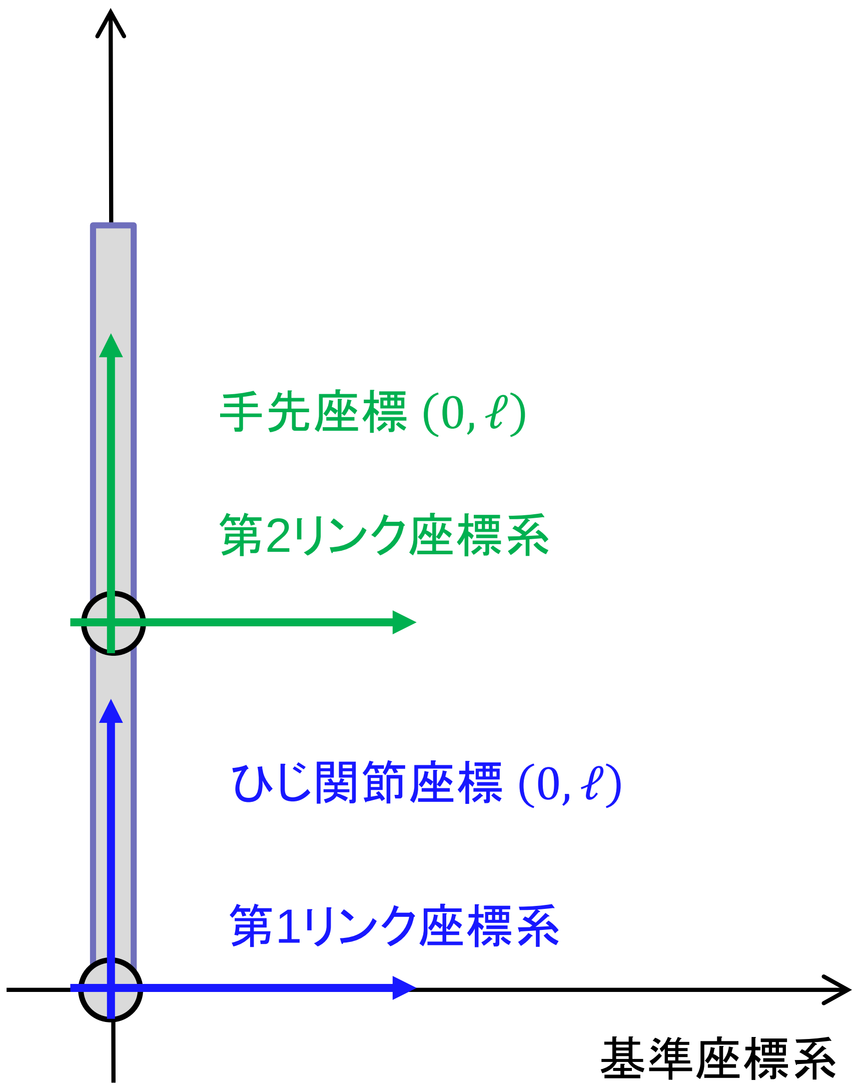


ロボットに対するラグランジュの運動方程式を導出するには, 各リンクの重心位置, 角速度(ベクトル)を求めなければならない. しかし, リンク数が多くなると, 基準座標系に対する各リンクの物理量を直接求めるのは困難になる.

一方, ロボットの自由度は回転であることが多い. そこで, ロボットの姿勢変化を, 各リンクに貼り付けた運動座標系間の回転とみなして, 根本側から順次, 手先側の幾何学情報 (位置, 速度, 加速度, 角度, 角速度, 角加速度など)を求めていく. そのために座標変換が必要となる.

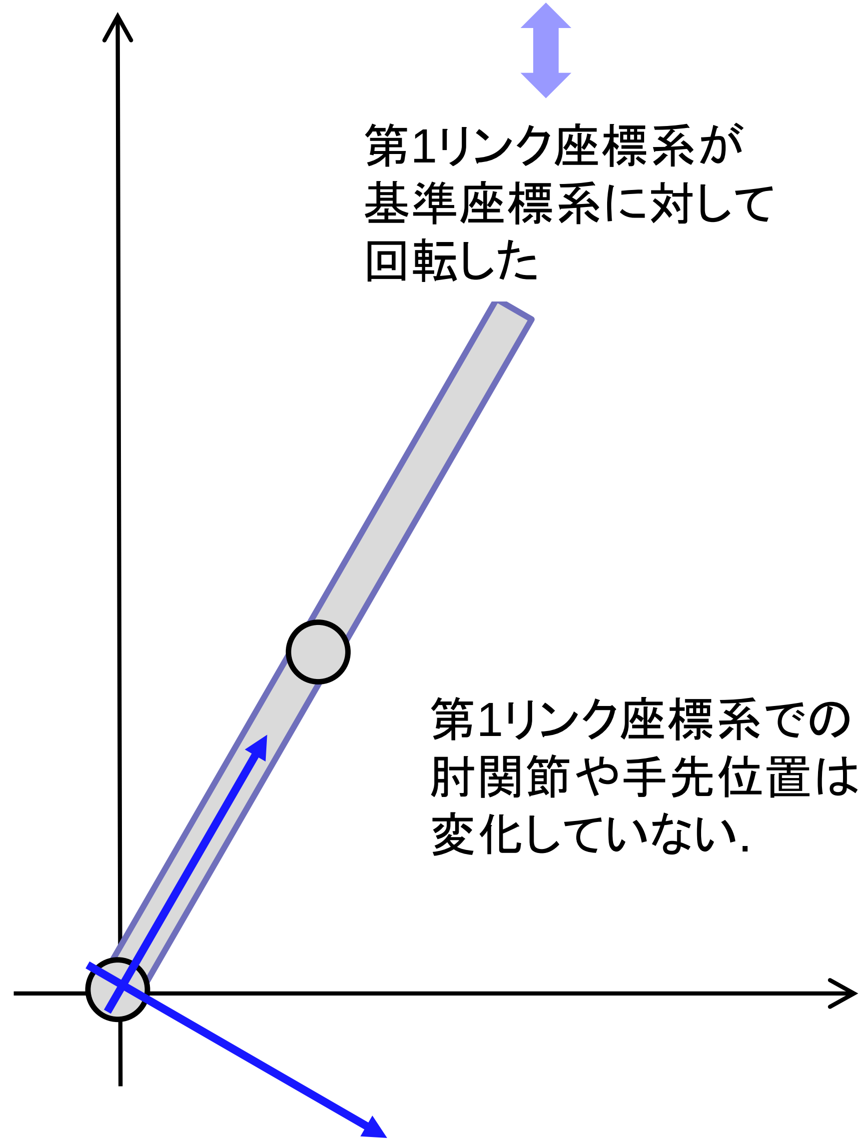






第1リンクが動いた

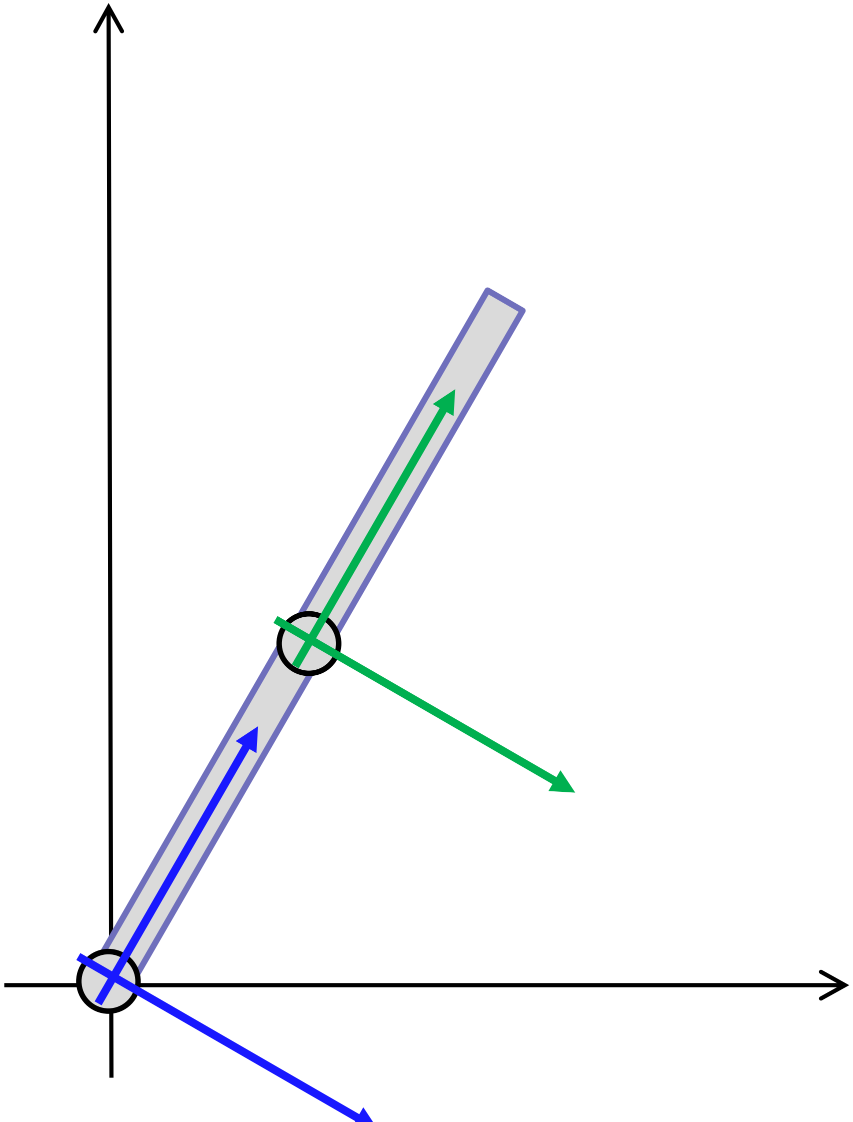
第1リンク座標系が
基準座標系に対して
回転した

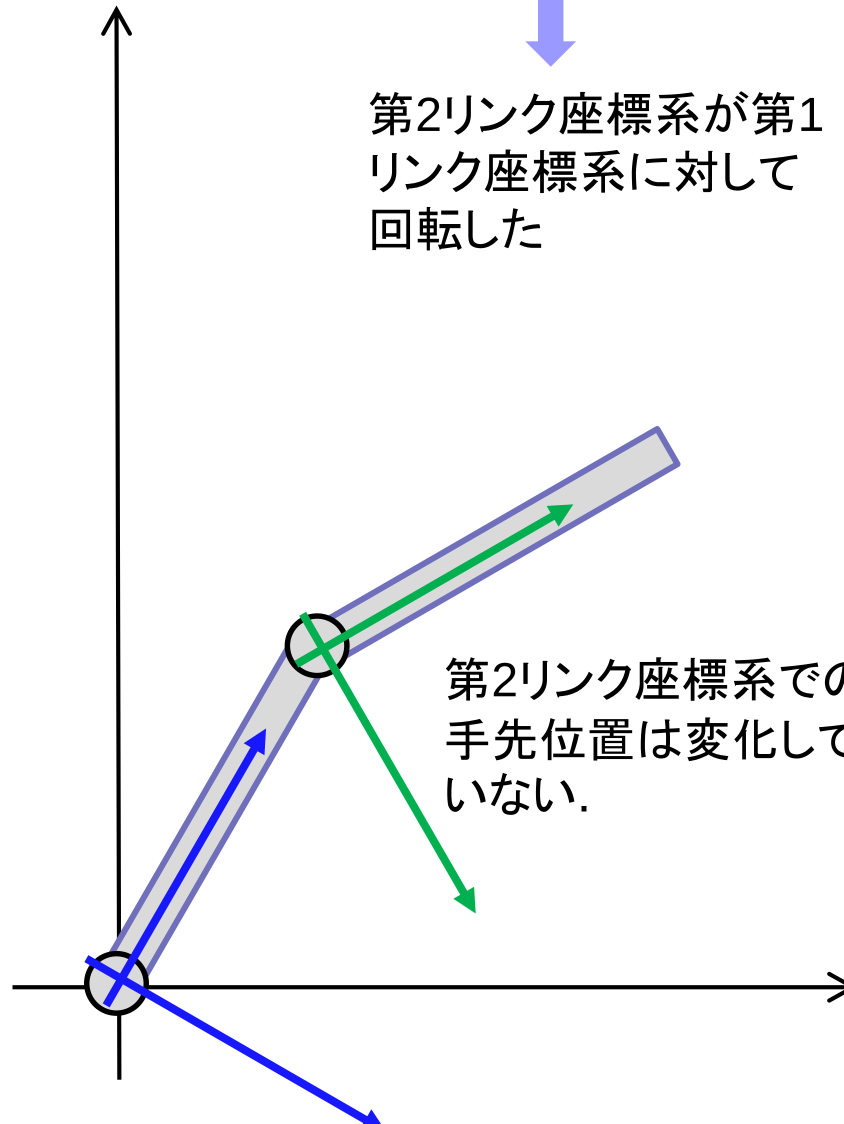


第1リンク座標系での
肘関節や手先位置は
変化していない．

第2リンクが動いた

第2リンク座標系が第1リンク座標系に対して回転した



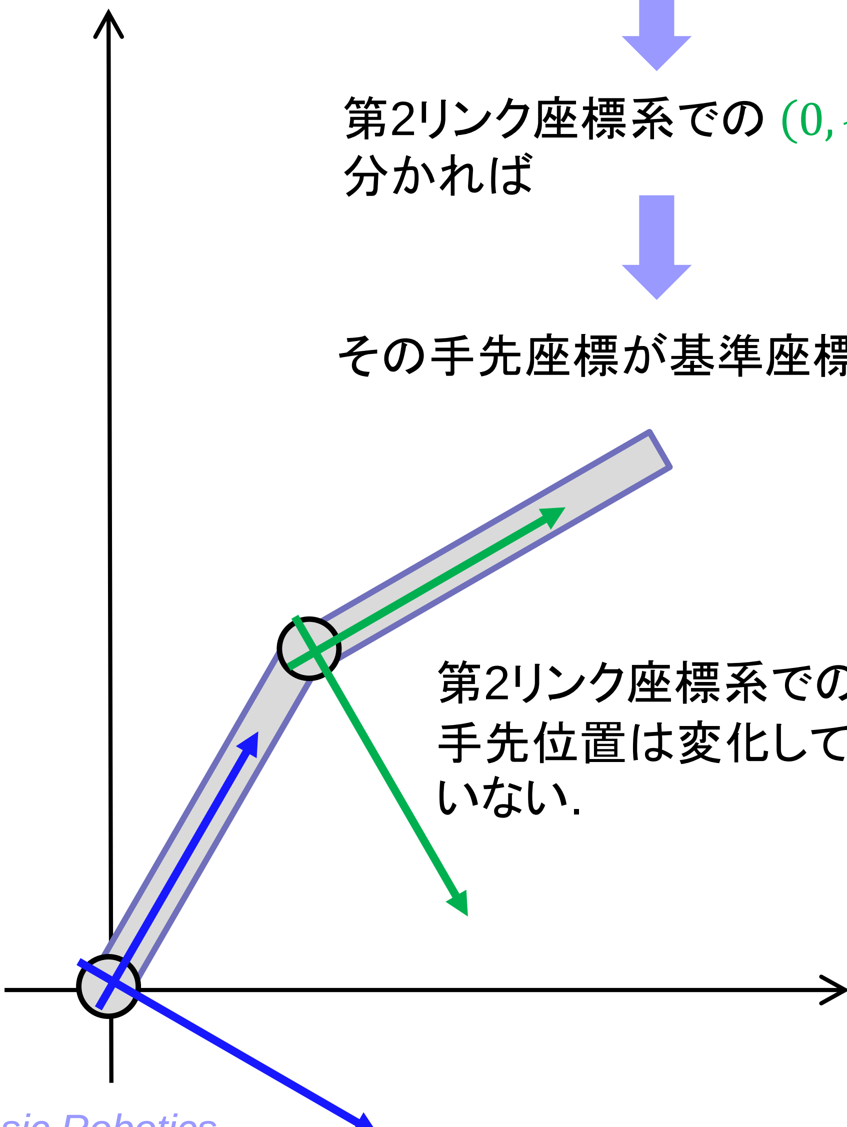


第2リンク座標系での手先位置は変化していない.

手先の座標が知りたいとき

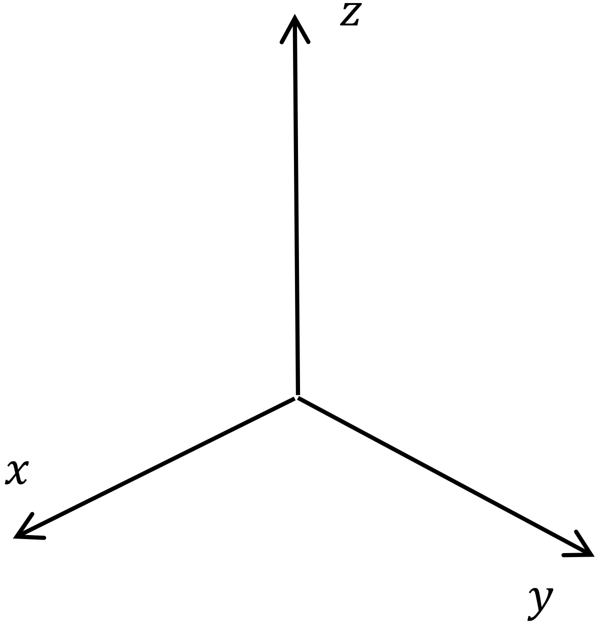
第2リンク座標系での $(0, \ell)$ は第1リンク座標系でどう表されるかが分かれば

その手先座標が基準座標系でどう表されるかを考えればよい.

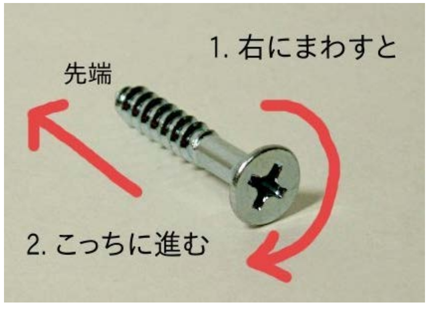


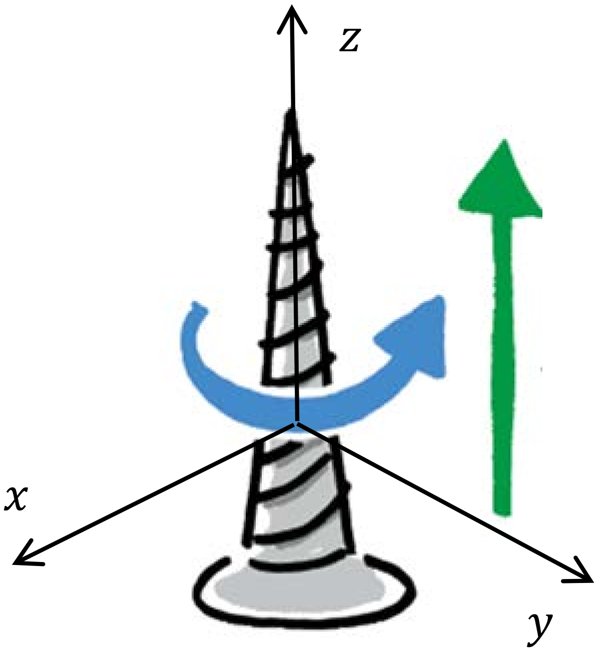
第2リンク座標系での手先位置は変化していない.

■ 座標変換



右手系を考える.

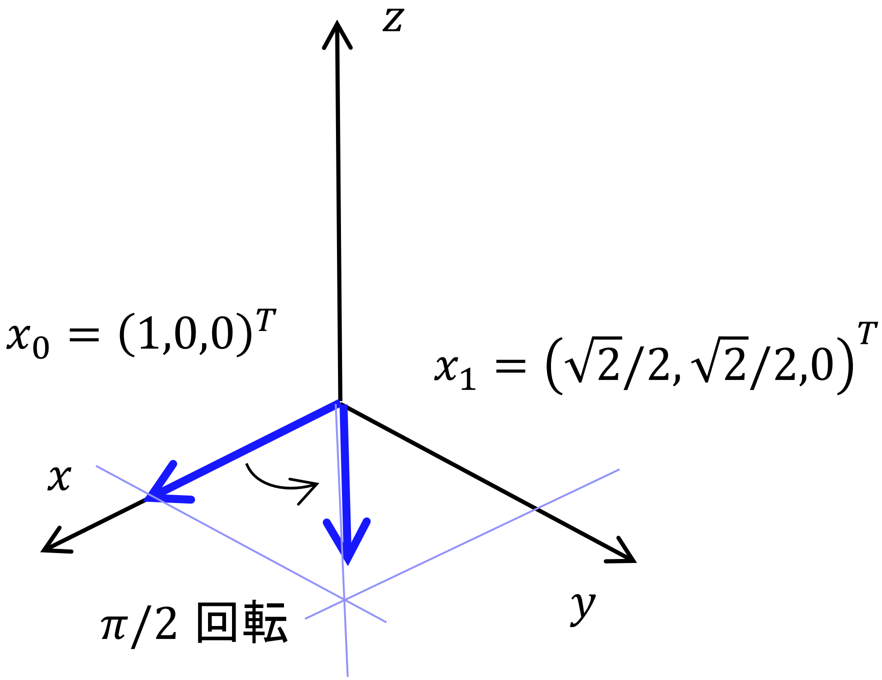




例) 右手系を考えた場合の, z 軸まわりの正の回転方向は, 青い矢印. 回転軸 (z 軸) の正の向きをネジの進行方向にとる.

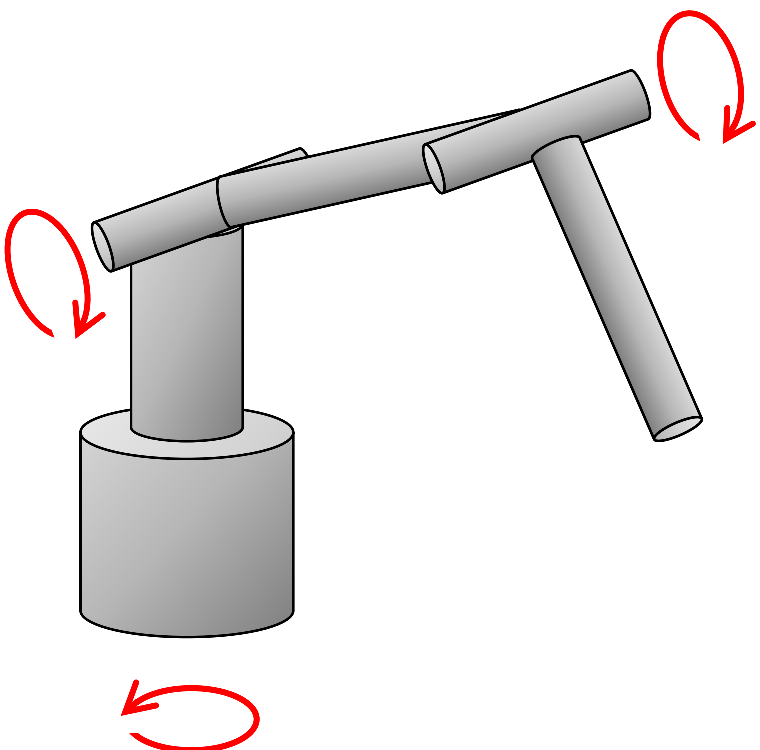
「ある（直交）座標系が与えられている」ということと, それを構成する3本の基本ベクトルが与えられていることは同義である.

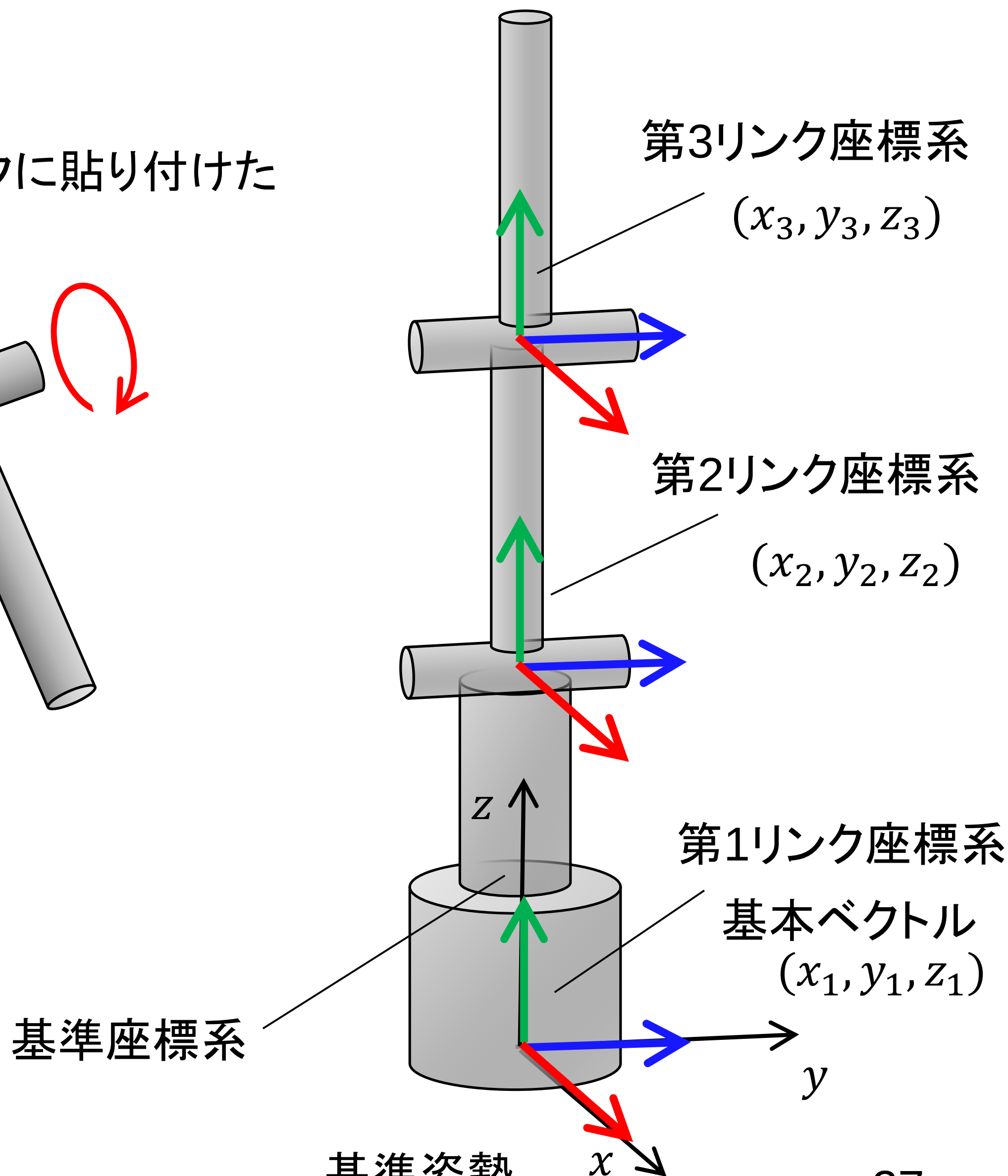
第 i 番目の座標系を, 基本ベクトルの組 (x_i, y_i, z_i) で表す. 各ベクトルを縦ベクトルとすれば, (x_i, y_i, z_i) は3次の正方行列である. 基準座標系（固定座標系, 慣性系）は $i = 0$ として (x_0, y_0, z_0) とする. $i = 1$ 以降のベクトルの表現はすべて, 基準座標系に基いて与えることに注意.



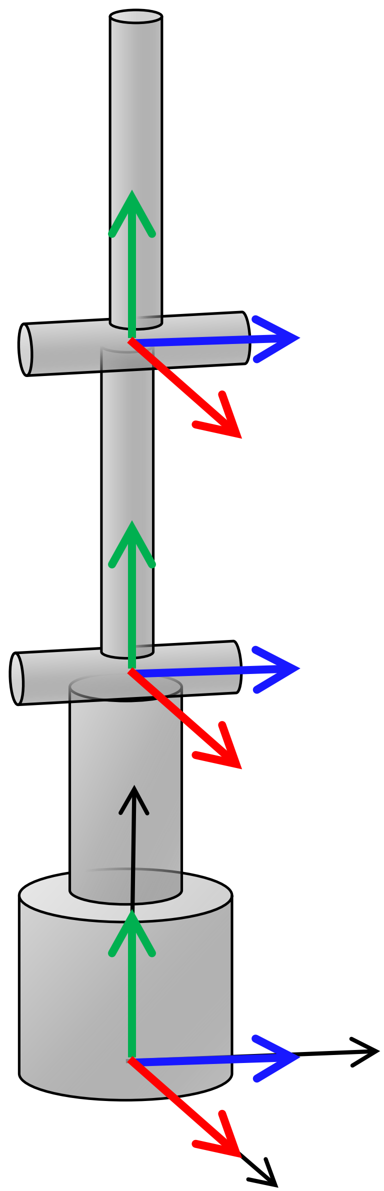
■ 座標変換

ロボットの各関節の回転を, 各リンクに貼り付けた
座標系の回転とみなす.

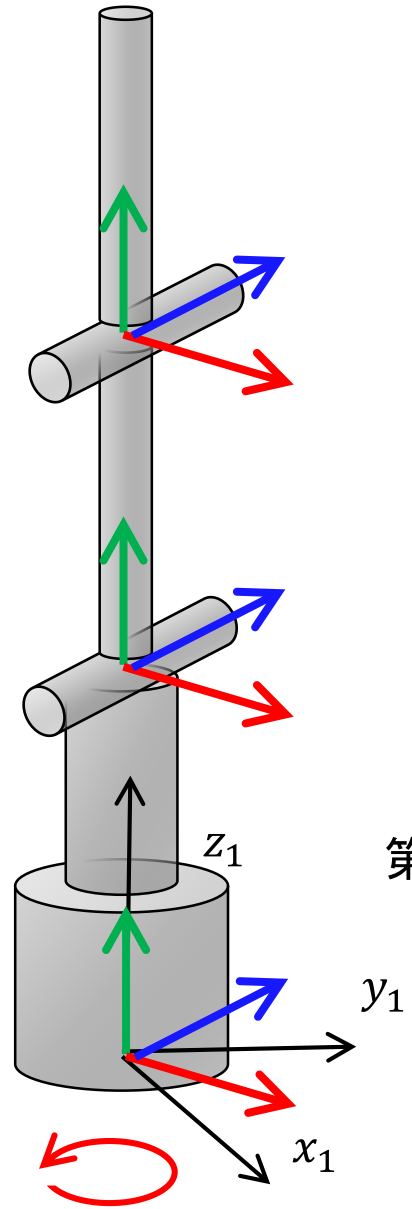


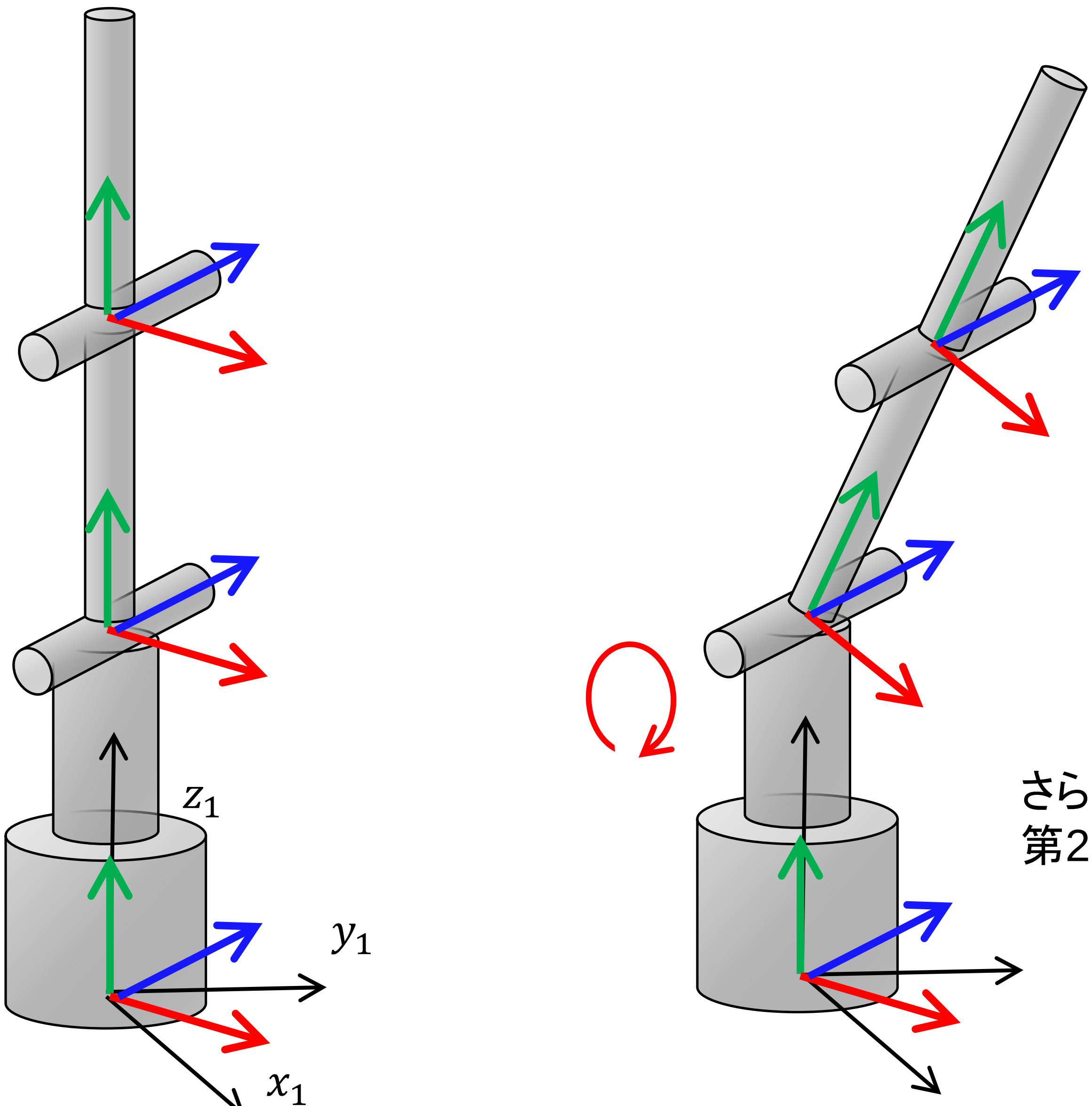


基準姿勢

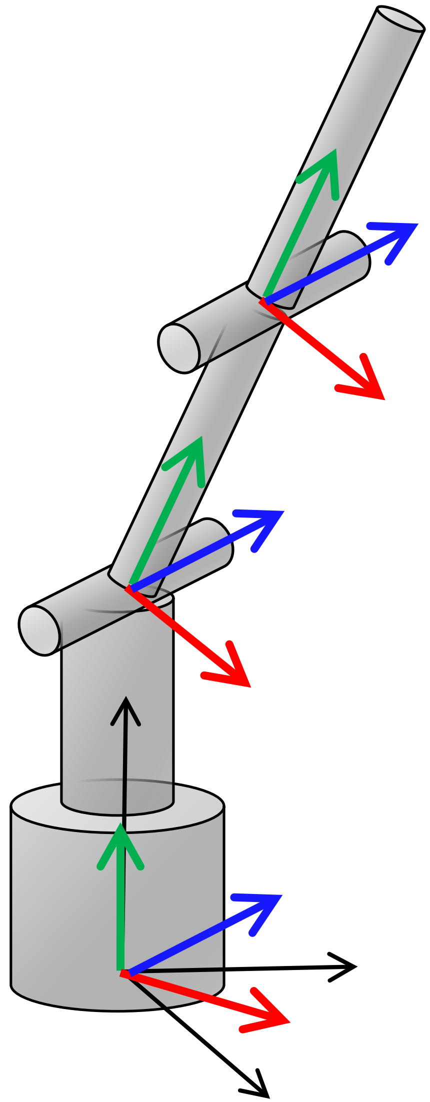


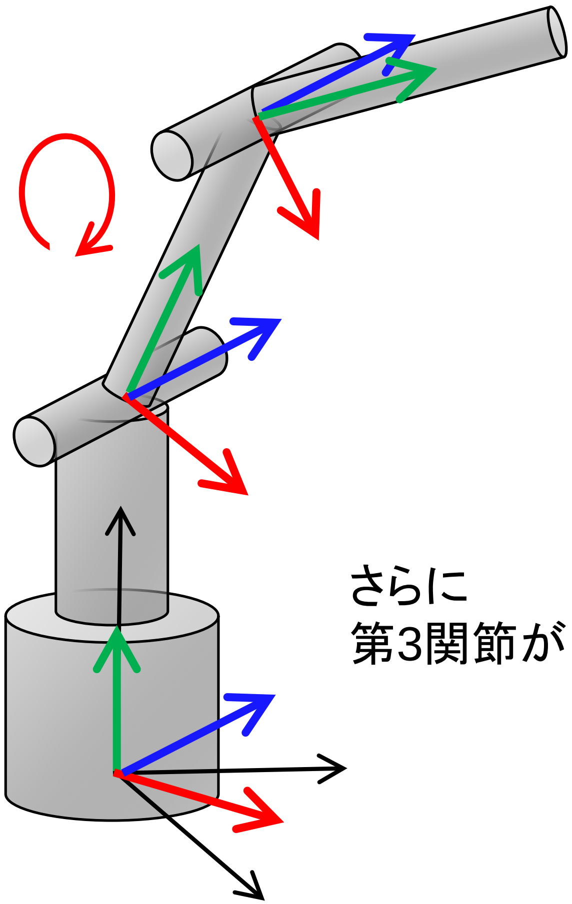
第1関節が回転





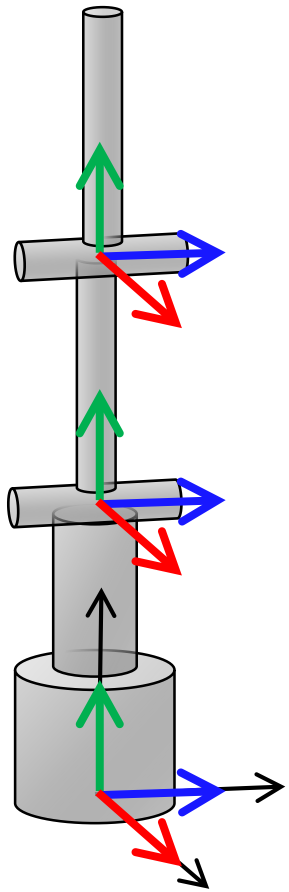
さらに
第2関節が回転



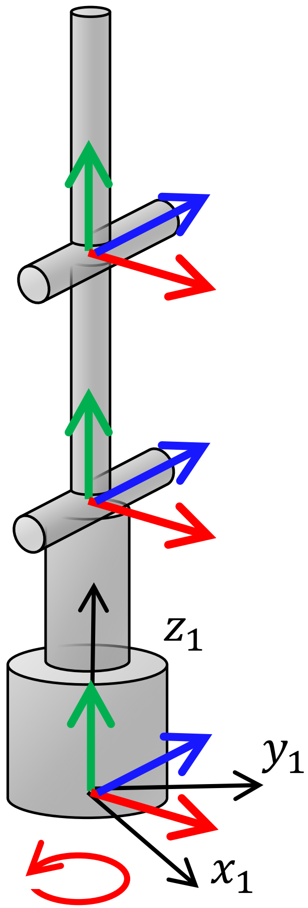


さらに
第3関節が回転

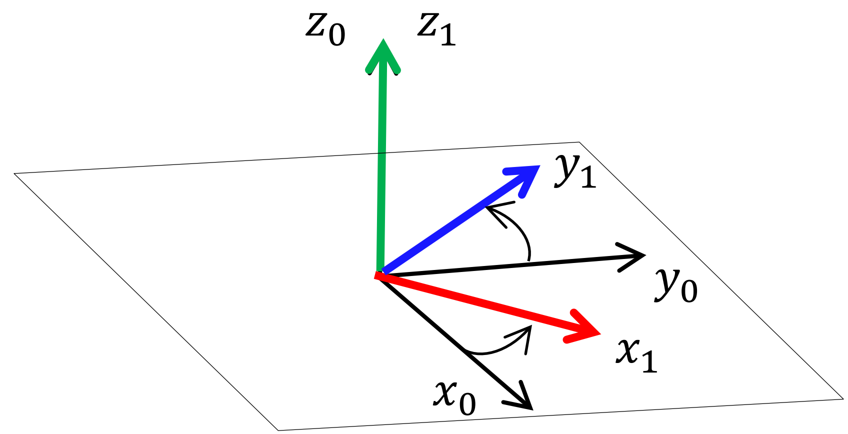
$$(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$$



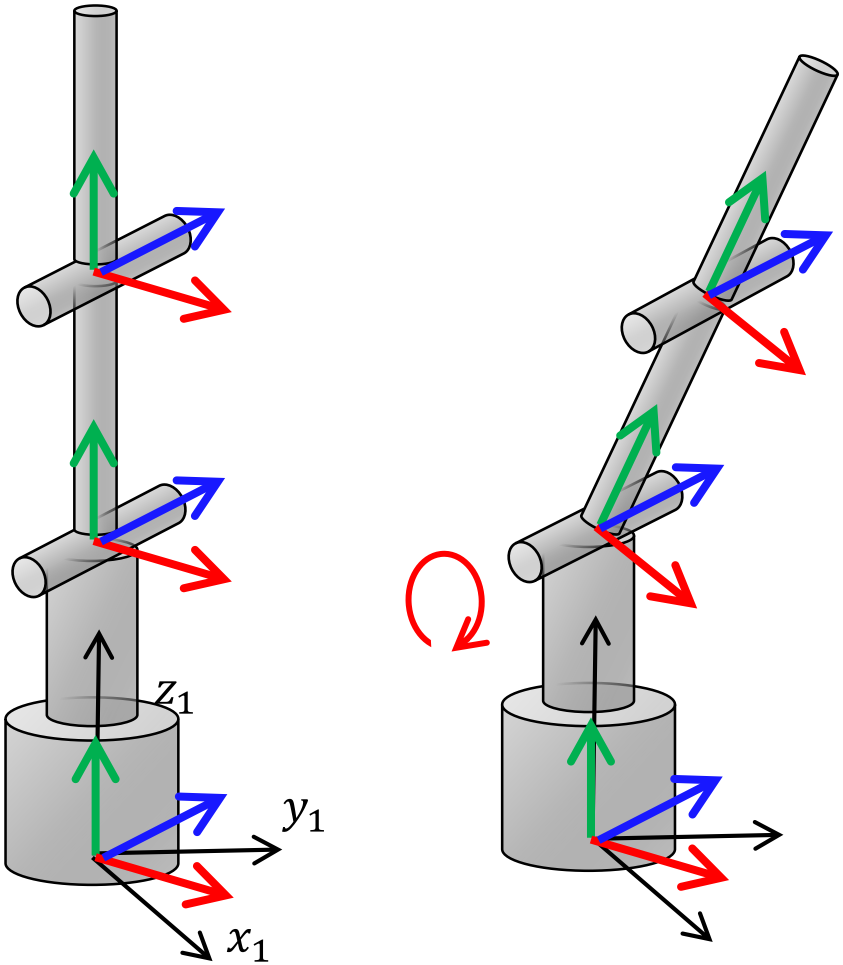
基準姿勢



第1関節が回転



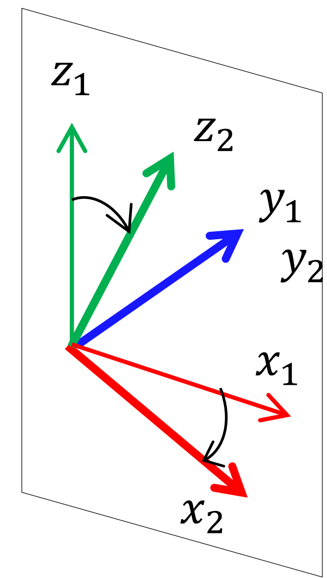
z_0 軸まわりの回転



さらに第2関節が回転

(x_2, y_2, z_2) の初期姿勢は
(x_1, y_1, z_1) に一致している

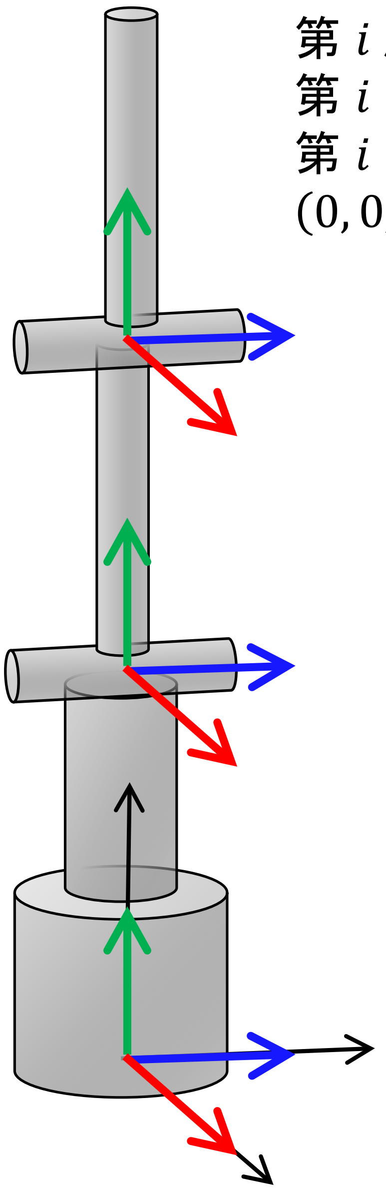
$(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (x_2, y_2, z_2)$

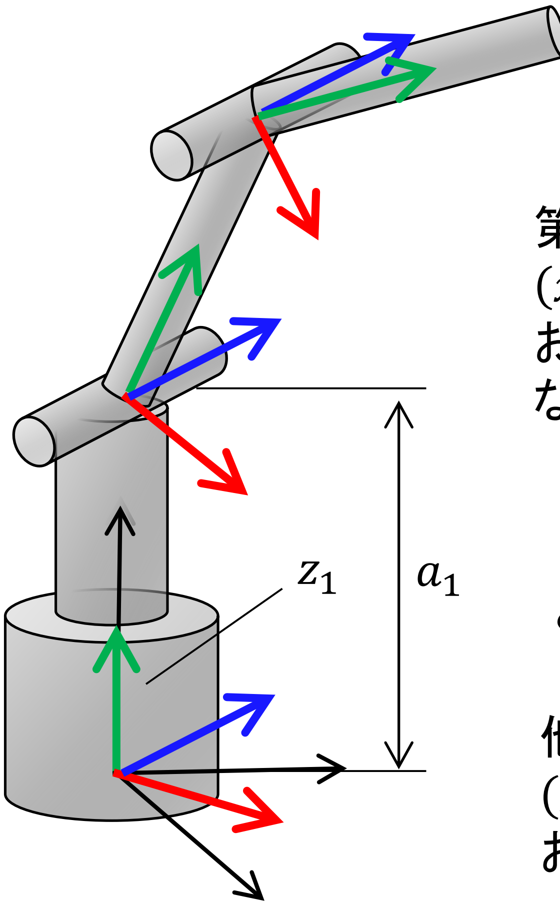


y_1 軸まわりの回転

$(x_2, y_2, z_2) \rightarrow (x_3, y_3, z_3)$
も同様

第 i 座標系における
第 $i+1$ 座標系の原点座標は
第 i リンク長さを a_i とすると
$(0, 0, a_i)^T$





第 i 座標系の基本ベクトル
(x_i, y_i, z_i) の基準座標系における表現（成分）が既知ならば, 例えば手先位置は

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3$$

と求まる.

他の物理量も同様なので
(x_i, y_i, z_i) の基準座標系における表現を求めたい.

各座標系は, ある軸周りにある角速度（瞬時値）で回転しているとする.

各リンクにおける重心位置, 速度, 角度, 回転軸, 角速度等の物理量が分かれば, ラグランジュ法によって運動方程式をたてることができる.

各種物理量が, 座標変換によって, 順次どのように影響を受けるか, 最終的には基準座標系でどのように表されるか, これが3次元運動の記述の肝である.

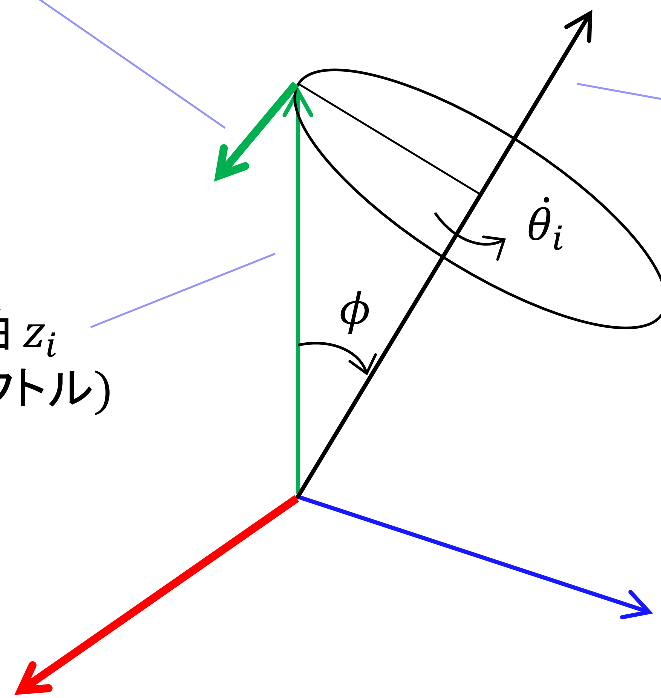
具体的には外積等を駆使した逐次計算をすることになるが, ここでは詳細には立ち入らない.

座標軸の時間変化分 $\dot{z}_i$

方向は q_i, z_i の直交方向（右手系）

大きさは　$\dot{\theta}_i \sin\phi$

$$\dot{z}_i = (q_i \times z_i)\dot{\theta}_i$$



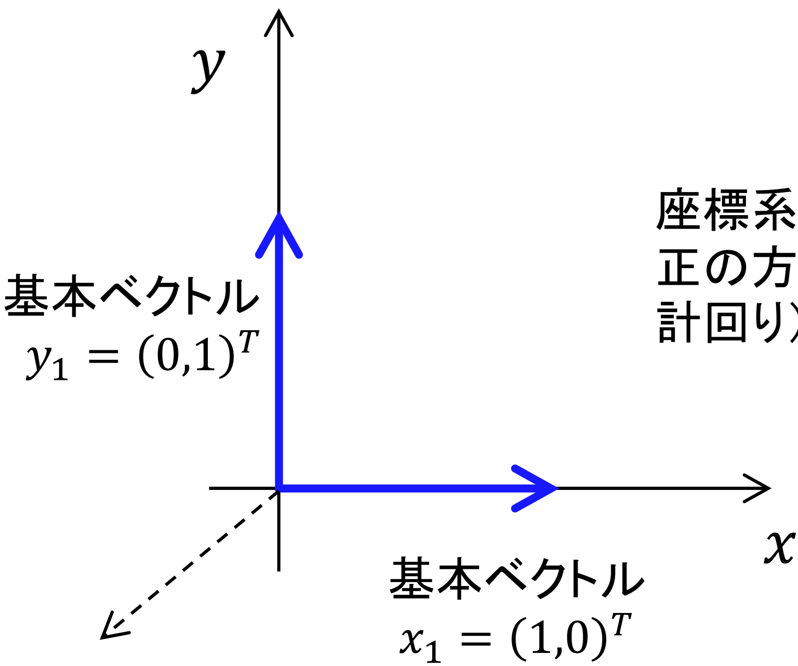
座標系の回転軸 q_i
(単位ベクトル)

座標軸 z_i
(単位ベクトル)

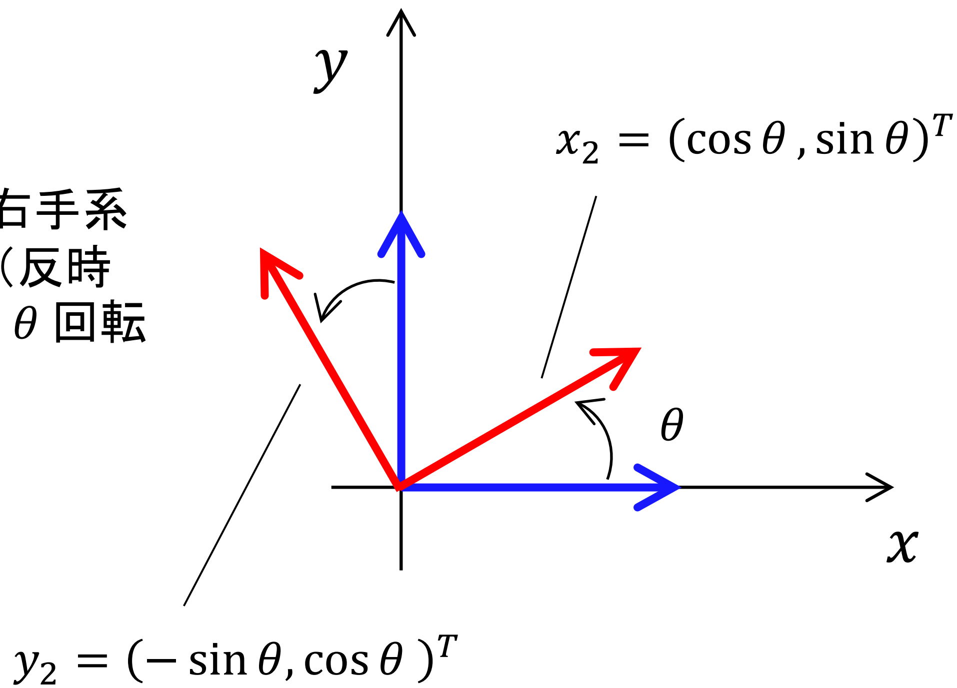
各座標系における増分の和をとれば基準座標系での $\dot{z}_i$ の表現が得られる.

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^{i}(q_j \times z_j)\dot{\theta}_j \qquad \text{(速度の漸化式)}$$

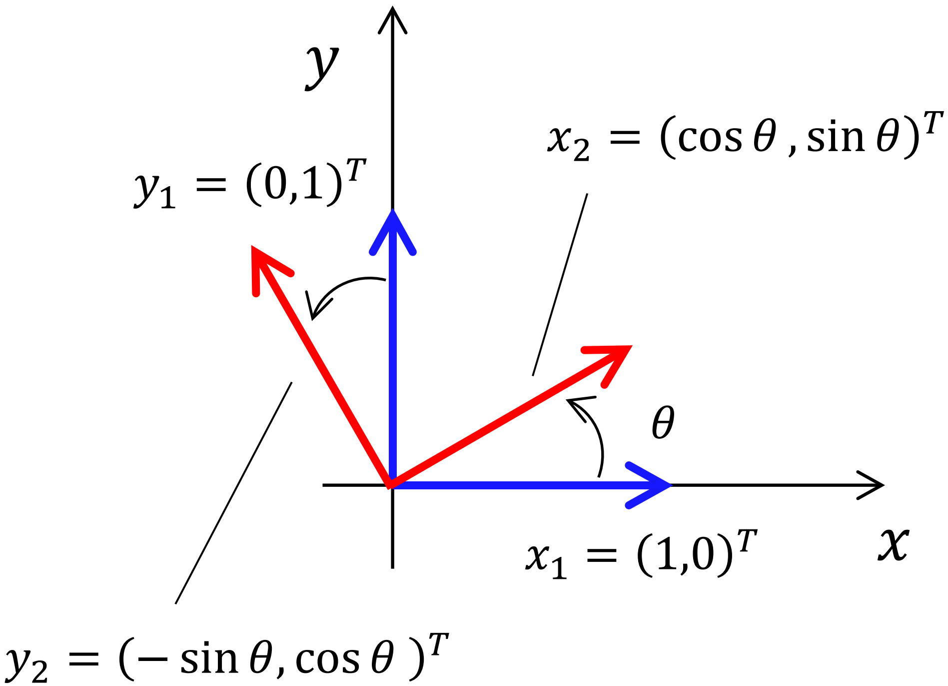
■ 回転の行列表現 (2D)



座標系を右手系
正の方向（反時
計回り）に θ 回転



（仮想）z 軸は手前側
を向いている.



$$x_2 = \cos\theta \, x_1 + \sin\theta \, y_1$$

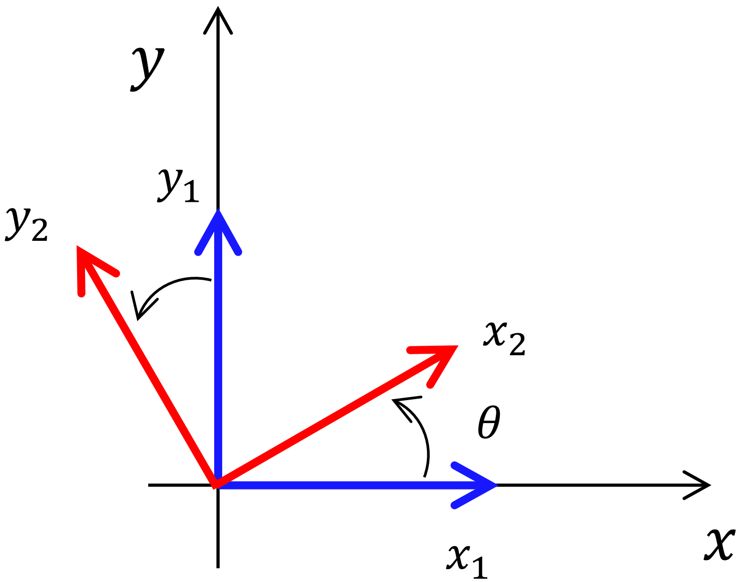
$$y_2 = -\sin\theta \, x_1 + \cos\theta \, y_1$$

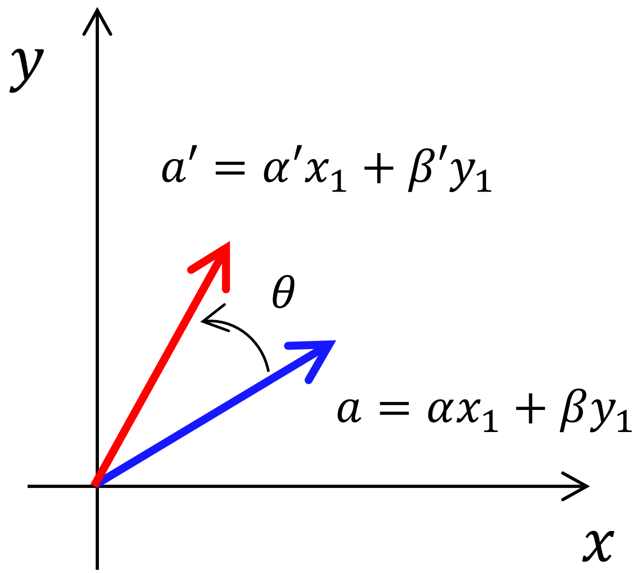
⇒

回転行列

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1)\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

2×2 の行列





座標系の回転

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1)\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=: (x_1, y_1)\, R(\theta)$$

行列を掛ける
方向の違いに注意

回転前後の座標値

$$\begin{bmatrix}\alpha' \\ \beta'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}$$

回転行列の性質

$$R(\phi)R(\theta) = R(\phi + \theta)$$

回転行列の積は, 角度の和をとった回転行列となる. これは, 回転軸が一意である2次元の場合に限定される性質であり, 3次元の場合には一般に成り立たない.

$$(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0)R(\theta) = R(\theta)$$

➡ $R(\theta)$ の列ベクトルx_1, y_1は正規直交系をなす.
（行ベクトルも同様）

➡ $R(\theta)$ は直交行列

➡ $R(\theta)$ の逆行列は $R^T(\theta)$ で表される.

$R(\theta)R^T(\theta) = I$ となることを確かめよ.

■ 回転の行列表現 (3D)

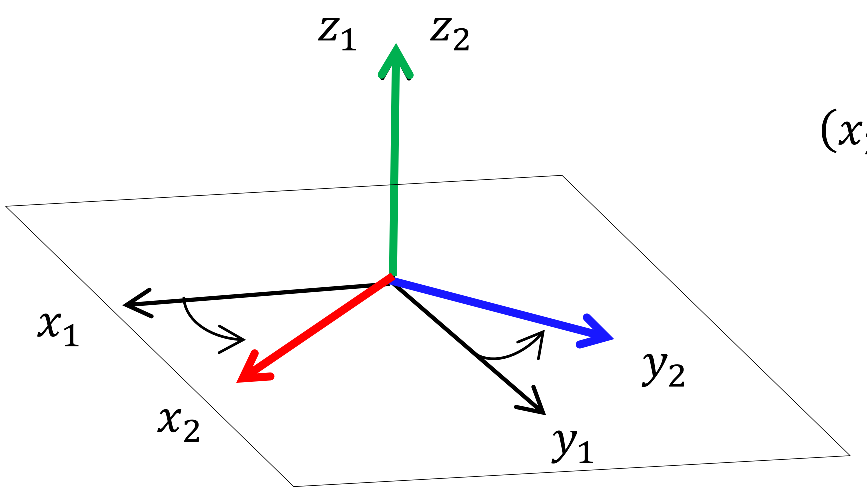
先の2Dの場合を拡張すればよい.

例） z_1 軸まわりの回転

$$(x_1, y_1, z_1) \to (x_2, y_2, z_2)$$

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1)\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$z_2 = \mathrm{z}_1$$



$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1)\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=: (x_1, y_1, z_1)R(z_1, \theta)$$

2次元の場合と異なり, どの軸まわりの回転かを明記する必要がある.

■ 回転の行列表現 (3D)

x_1 軸まわりの回転

$$(y_2, z_2) = (y_1, z_1)\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}, \qquad x_2 = x_1$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} =: (x_1, y_1, z_1)R(x_1, \theta)$$

y_1 軸まわりの回転

$$(z_2, x_2) = (z_1, x_1)\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}, \qquad y_2 = y_1$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1)\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix} =: (x_1, y_1, z_1)R(y_1, \theta)$$

例題:

a を z_0 軸まわりに $\pi/2$ 回転し, x_0 軸まわりに π 回転したときの ((x_0, y_0, z_0) 座標系における) 座標を求める.