ロボティクス基礎

第1学期 木 Ⅲ・Ⅳ限　11：00-13：10
1号館 大講義室

担当：平田 健太郎

4/18　第3回 ラグランジュ法

講義日程(予定)

4/11		第1回	序論
4/16	*	第2回	運動方程式 (4/25休講分)
4/18		第3回	ラグランジュ法
5/9		第4回	座標変換
5/16		第5回	運動学・動力学
5/21	*	第6回	線形制御との関わり (5/23休講分)
5/30		第7回	サーボ系
6/6		第8回	まとめ/期末試験

* 補講

ラグランジュの運動方程式

2リンク系の例からも分かるように, 複数の物体が互いに干渉しながら運動している場合, 作用・反作用に着目した運動方程式の導出は困難.
(内力を消去しなければならないため)

↓

ラグランジュの運動方程式

（内力を陽に考える必要のない, システマティックな方法）

3次元空間内である拘束を受けながら運動する自由度 p の質点や剛体の集合体において

自由度を表現する変位や回転角: $q_1, q_2, \cdots, q_p$ ➡ 一般化座標

それらの時間微分: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_p$ ➡ 一般化速度

$$q = (q_1 \quad \cdots \quad q_p)^{\mathrm{T}},\ \dot{q} = (\dot{q}_1 \quad \cdots \quad \dot{q}_p)^T$$ (ベクトル表記)

この運動体内の運動エネルギーの総和: $\mathcal{T}(\dot{q}, q)$

〃　　ポテンシャルエネルギーの総和: $\mathcal{U}(q)$

〃　　損失エネルギーの総和: $\mathcal{D}(\dot{q})$

一般化座標 q_i 方向へ働く一般化力: u_i

とするとき, 次のラグランジュの運動方程式が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathcal{T}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{T} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathcal{D} + \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{U} = u_i \qquad i = 1, \cdots, p$$

q_i 方向への粘性摩擦係数を D_i とすると　$\mathcal{D}(\dot{q}) = \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{p} D_i \dot{q}_i^2$

■ 並進と回転の両方をおこなっている剛体の運動エネルギー

$$\left.\begin{array}{l}\text{重心を原点とし, 剛体に固定された正規直交座標系: } \tilde{x}\text{-}\tilde{y}\text{-}\tilde{z} \\ \text{剛体の密度: } \rho\end{array}\right\}$$

に対して, 慣性行列 $\underset{\sim}{I}$ は

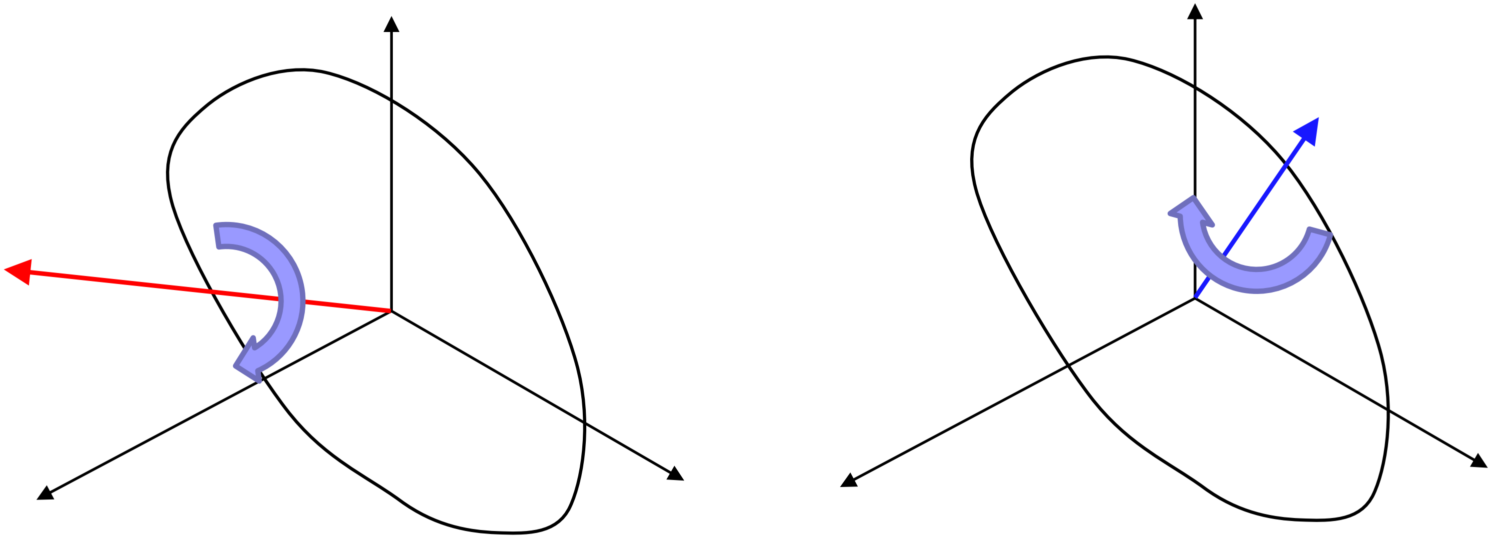
$$\underset{\sim}{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

と定められる. ここで

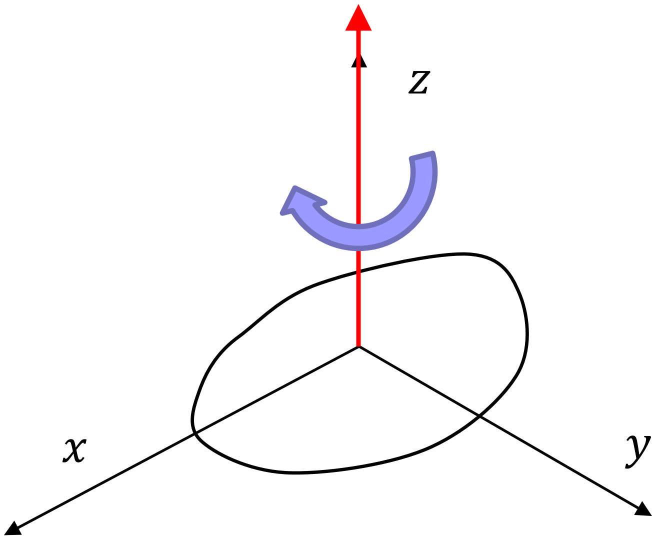
$$\left.\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V \rho(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) dV \\ I_{yy} &= \int_V \rho(\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2) dV \\ I_{zz} &= \int_V \rho(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) dV \end{aligned}\right\} \text{慣性モーメント}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = -\int_V \rho\tilde{x}\tilde{y}\, dV \\ I_{xz} &= I_{zx} = -\int_V \rho\tilde{x}\tilde{z}\, dV \\ I_{yz} &= I_{zy} = -\int_V \rho\tilde{z}\tilde{y}\, dV \end{aligned}\right\} \text{慣性乗積}$$

3次元空間内では剛体は任意の軸まわりに回転できる.
このことが話を難しくする.



2次元空間(xy平面)内での剛体の回転では回転軸は固定(z軸).
だから話が簡単.



慣性モーメントもスカラー量.

外部の静止座標系 x- y- zから見た剛体の重心の位置ベクトル: $p_g = \left(x_g, y_g, z_g\right)^T$

剛体の角速度ベクトル: ω

外部の静止座標系 x- y- zからみた, 剛体の回転軸に平行で, その大きさが回転角速度に一致するベクトル

ω の $\tilde{x}$- $\tilde{y}$- $\tilde{z}$ 方向の成分: $\widetilde{\omega}_x, \widetilde{\omega}_y, \widetilde{\omega}_z$

剛体の全質量: m

とするとき,

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2\right) + \frac{1}{2}\omega^T I \omega$$

慣性行列 I の固有ベクトル方向:　慣性主軸

$\tilde{x}$- $\tilde{y}$- $\tilde{z}$ として慣性主軸を選ぶと, 慣性乗積は0となり, 慣性行列 I は対角行列になる.

対角化, 覚えてますか？

■ 対角化の簡単なまとめ

n次の正方行列 M (行と列の数がnで等しい行列)に対して

$$Mx = \lambda x$$

を満たすスカラ λ とベクトル $x \neq 0$ が存在するとき, それぞれを固有値, 固有ベクトルという.
($x = 0$ならば上式は M によらず成立するので意味がない.)

上式は $(M - \lambda I)x = 0$ と書けるので, 非零の固有ベクトルが存在するためには, $(M - \lambda I)^{-1}$が存在してはならない. (存在すれば解は $x = 0$ のみ)

したがって λ は $\det(M - \lambda I) = 0$ の解である. これを固有方程式という. これはn次多項式なので, n次の行列 M には,n個の固有値, 固有ベクトルが存在する.

簡単のため, $n=2$とする. $Mx_1=\lambda_1 x_1, Mx_2=\lambda_2 x_2$ に対して

$$M[x_1 x_2]=[x_1 x_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

となる. $T\coloneqq[x_1 x_2]$が正則であれば, $T^{-1}MT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$, すなわち
座標変換 T によって M を対角化できる.

x_1, x_2 が線形独立にならなければならないので, 任意の行列 M が
いつも対角化できるわけではない.

対称行列 ($M^T=M$ を満たす行列) は特殊なクラスであり, 直交行列
(行・列ベクトルが正規直交系をなす)を用いて, いつでも対角化できる.

演習1: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の対角化

1. 固有値を計算する.
2. 固有ベクトルを求める. 正規直交化する.
3. 次式に当てはめて, 変換行列 $T \coloneqq [x_1 x_2]$ を求める.

$$M[x_1 x_2] = [x_1 x_2]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

4. 確かに $T^{-1}MT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ となるか検算.

$$|\lambda I - M| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$\therefore \ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$$(\lambda_i I - M)x_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x_1 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x_2 = 0, \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 x_1 &= M x_1 \\ \lambda_2 x_2 &= M x_2 \end{aligned}\right\} \qquad [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = M [x_1 \quad x_2]$$

$T \coloneqq [x_1 \quad x_2], \ \Lambda \coloneqq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ とおくと $\quad T\Lambda = MT \quad \Rightarrow \quad \Lambda = T^{-1} M T$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow T = [x_1 \quad x_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

確認してみよう. $|T| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$ より

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = T^T$$

（たしかに直交行列）

$$T^{-1}MT = T^TMT = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 3\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \Lambda$$

（たしかに対角化される）

慣性行列 I の固有ベクトル方向：　慣性主軸

$\tilde{x}$- $\tilde{y}$- $\tilde{z}$ として慣性主軸を選ぶと, 慣性乗積は0となり, 慣性行列 I は対角行列になる.

いま I は対称行列なので, 直交行列で対角化できる.

⇕

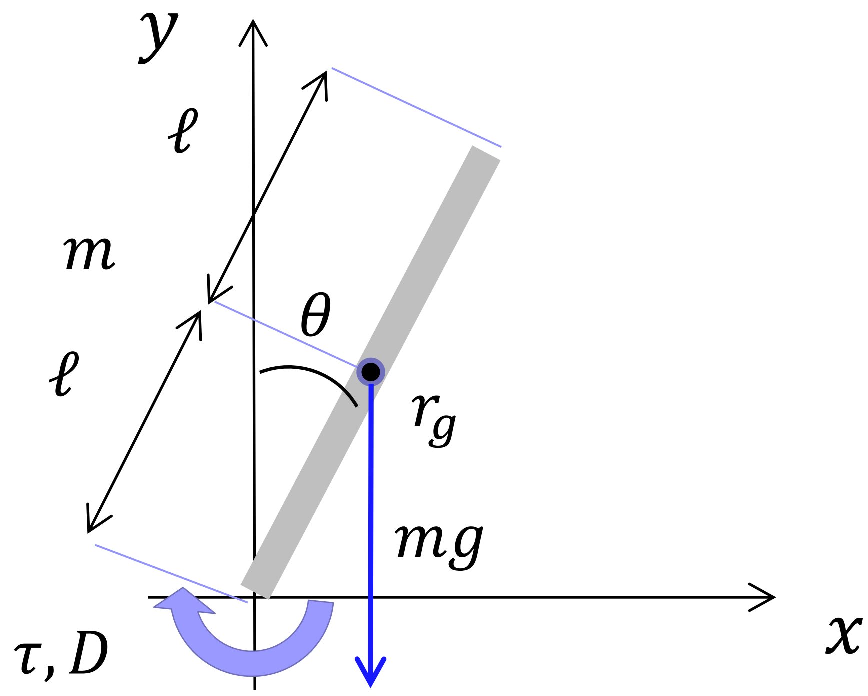
I の固有値: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,　I の固有ベクトル: x_1, x_2, x_3 とするとき,
x_1, x_2, x_3を正規直交系にとることができる.

$$I x_1 = \lambda_1 x_1, I x_2 = \lambda_2 x_2, I x_3 = \lambda_3 x_3$$

$T := [x_1 x_2 x_3]$ とすると
$$T^{-1} = T^T$$

$$\Rightarrow \quad I\,[x_1 x_2 x_3] = [x_1 x_2 x_3]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^T I\,T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

■ ラグランジュの運動方程式　－1リンクの場合－



重心まわりの慣性モーメント $I = \int_{\ell}^{\ell} \frac{m}{2\ell} r^2 dr = \frac{1}{3} m\ell^2$

自由度 $p = 1$

一般化座標: $q_1 = \theta$　　一般化速度: $\dot{q}_1 = \dot{\theta}$

一般化座標 q_1 方向へ働く一般化力: $u_1 = \tau$

この運動体内の運動エネルギーの総和: $\mathcal{T}(\dot{q}, q)$

(2次元運動なので）

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2\right) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$r_g = \left(x_g, y_g\right) = (\ell \sin\theta, \ell\cos\theta)$$

この運動体内のポテンシャルエネルギーの総和: $\mathcal{U}(q)$

$$\mathcal{U}(q) = mgy_g = mg\ell\cos\theta$$

この運動体内の損失エネルギーの総和: $\mathcal{D}(\dot{q})$

$$\mathcal{D}(\dot{q}) = \frac{1}{2}D\dot{\theta}^2$$

ラグランジュの運動方程式:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathcal{T}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{T} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathcal{D} + \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{U} = u_i \qquad i = 1$$

各自やってみよ: 演習2

$$\left(x_g, y_g\right) = (\ell \sin\theta, \ell\cos\theta)$$

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}\left\{\left(\ell\,\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(-\ell\,\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right\} + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$\mathcal{U} = mg\ell\cos\theta\,,\ \mathcal{D} = \tfrac{1}{2}D\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\mathcal{T}\right) - \frac{\partial}{\partial q_1}\mathcal{T} + \frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\mathcal{D} + \frac{\partial}{\partial q_1}\mathcal{U} = u_1, \qquad q_1 = \theta$$

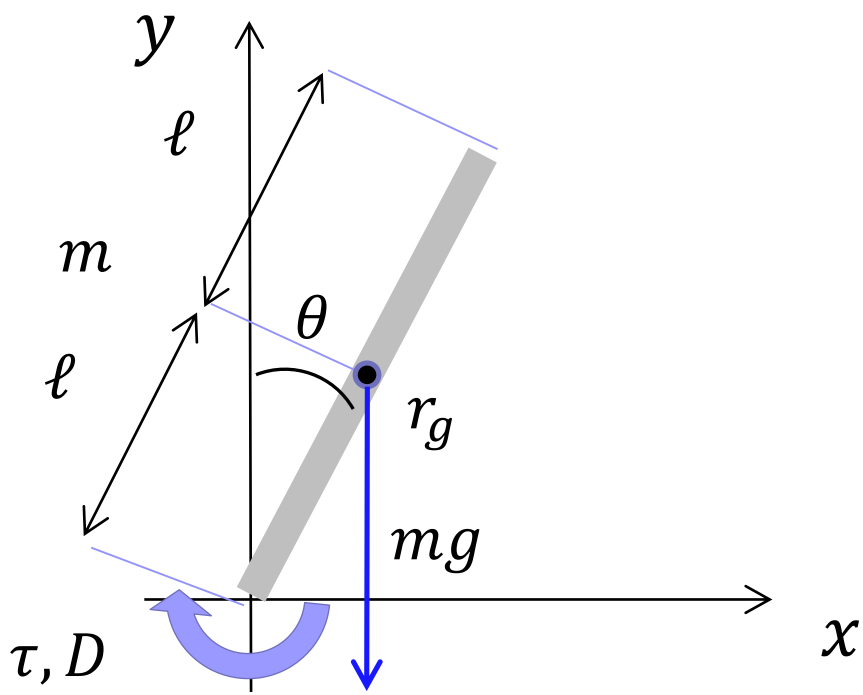
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}\right) + D\dot{\theta} - mg\ell\sin\theta = \tau_1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + D\dot{\theta} - mg\ell\sin\theta = \tau_1$$

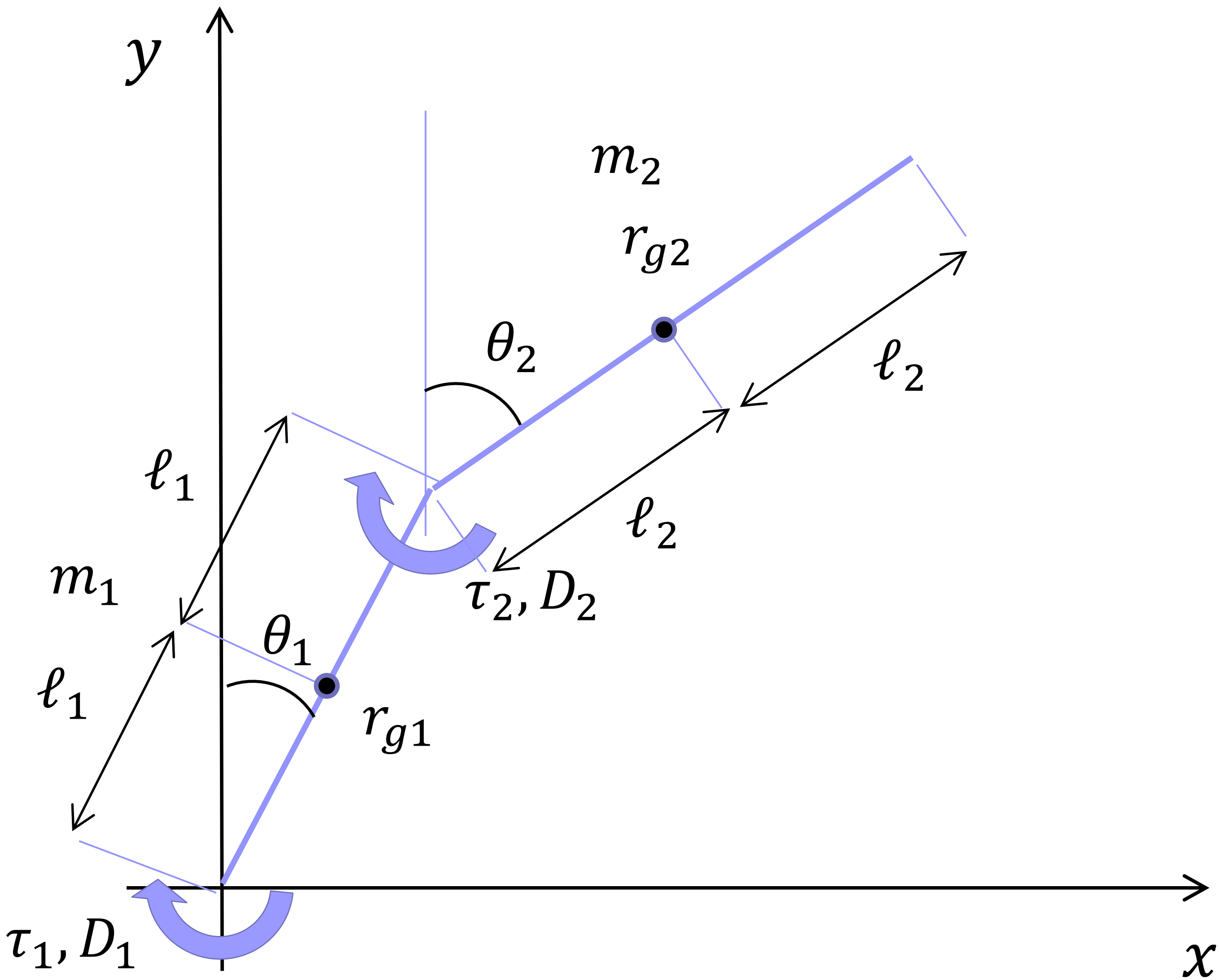
$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + D\dot{\theta} - mg\ell\sin\theta = \tau_1$$

回転軸まわりの慣性モーメントは $I' = \int_0^{2\ell} \frac{m}{2\ell} r^2 dr = \frac{4}{3}m\ell^2$ なので,

上式は(初等的に求めた)オイラーの運動方程式に一致する.



■ ラグランジュの運動方程式　－2リンクの場合－



重心まわりの慣性モーメント I_1, I_2

■ 入力の方向に関する変換

一般化座標 θ, q の間に$\theta = f(q)$ という関係がある. θ に関する一般化力 τ が既知, q に関する一般化力 u が未知であるとき, どのように u を定めるか.

仮想仕事の原理から $\delta W \coloneqq \tau^T \delta\theta = u^T \delta q$

$$\delta\theta = \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T \delta q$$ を上式に代入

$$\tau^T \delta\theta = \tau^T \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T \delta q = u^T \delta q$$ が任意の δq について成り立つので

$$\tau^T \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T = u^T \Rightarrow u = \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) \tau$$

$$u = \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\tau$$

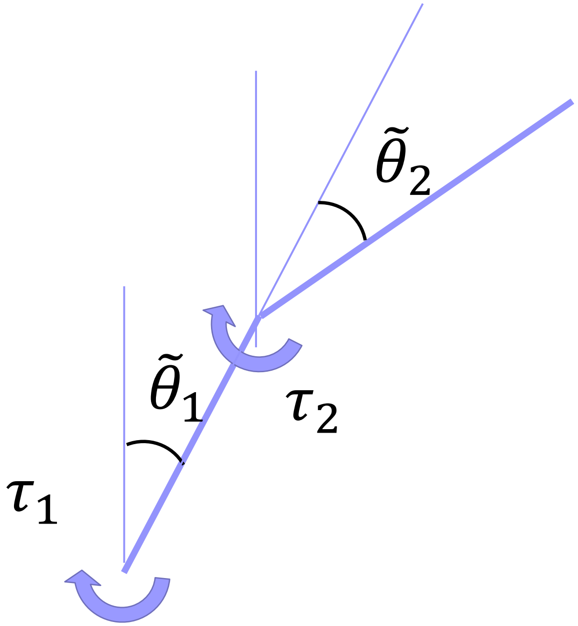
ヤコビアン: $\left[\frac{\partial f}{\partial q}\right]_{ij} := \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$

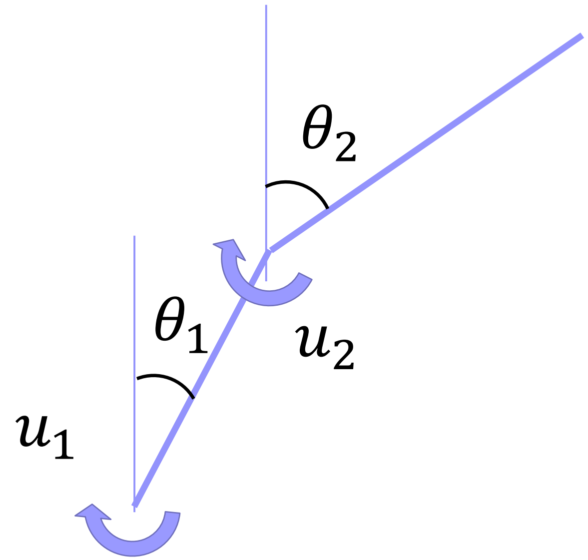
(i, j)要素の定義に注意

$\theta = f(q) = Kq$ (線形関数)ならば

$$\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1 \\ \vdots \\ q_n\end{bmatrix} \qquad \theta_j = f_j(q) = [K_{j1} \quad \cdots \quad K_{jn}]\begin{bmatrix}q_1 \\ \vdots \\ q_n\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_i} = K_{ji} \Rightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial q}\right]_{ij} = K_{ji} \qquad \therefore\ u = K^T q$$





トルク τ_1, τ_2 は回転 $\tilde{\theta}_1$, $\tilde{\theta}_2$ を生じさせる

一般化座標 θ_1, θ_2 に対応する一般化力 u_1, u_2 は?

$$\theta = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = Kq$$

$$\Rightarrow u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = K^T \tau = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 - \tau_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

自由度 $p = 2$

一般化座標: $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$　　一般化速度: $\dot{q}_1 = \dot{\theta}_1$, $\dot{q}_2 = \dot{\theta}_2$

一般化座標 $q_{1,} q_2$ 方向へ働く一般化力: u_1, u_2（前述）

<u>この運動体内の</u>運動エネルギーの総和: $\mathcal{T}(\dot{q}, q)$

リンク毎ではないことに注意

$$r_{g1} = \left(x_{g1}, y_{g1}\right) = (\ell_1 \sin\theta_1, \ell_2 \cos\theta_2)$$

$$r_{g2} = \left(x_{g2}, y_{g2}\right) = (2\ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2,\ 2\ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2)$$

$$\mathcal{T} = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_{g1}^2 + \dot{y}_{g1}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_{g2}^2 + \dot{y}_{g2}^2\right) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2{}^2$$

この運動体内のポテンシャルエネルギーの総和: $\mathcal{U}\,(q)$

$$\mathcal{U}\,(q) = m_1 g y_{g1} + m_2\, g y_{g2}$$

この運動体内の損失エネルギーの総和: $\mathcal{D}\,(\dot{q})$

$$\mathcal{D}\,(\dot{q}) = \frac{1}{2} D_1 \dot{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2} D_2 \left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right)^2$$

リンク毎ではないことに注意

ラグランジュの運動方程式:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathcal{T}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{T} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathcal{D} + \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{U} = u_i \quad i = 1,2$$

$\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{U}$ は共通.どの変数で偏微分するかで別々の運動方程式が導かれる.

内力を考慮して, ニュートン・オイラーの運動方程式から求めた式

$$J_1 := I_1 + (m_1 + 4m_2)\ell_1^2 \qquad J_2 := I_2 + m_2\ell_2^2 \qquad \beta \coloneqq 2m_2\ell_1\ell_2$$

$$J_1\ddot{\theta}_1 + \beta\cos(\theta_2 - \theta_1)\ddot{\theta}_2 - \beta\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2$$

$$+(D_1 + D_2)\dot{\theta}_1 - D_2\dot{\theta}_2 - (m_1 + 2m_2)g\ell_1\sin\theta_1 = \tau_1 - \tau_2$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + D_2\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right) + \beta\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - \beta\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 - m_2 g\ell_2\sin\theta_2 = \tau_2$$

と一致するはず. 確かめよ. 演習３

レポート課題

講義資料のページにアップロードする雑誌記事 Walk This Way, IEEE Spectrum, March, 2019 を読んでA4, 1枚程度に内容を要約して提出する.

5/9 講義冒頭で提出